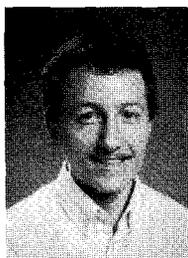


Filtrage-détection autoadaptatif de signaux non stationnaires

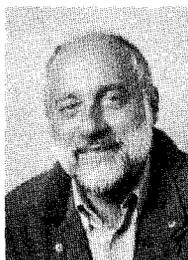
Auto-adaptive Filtering of non-stationary signals



Laurent GOERIG

Laboratoire d'Automatique de Nantes, Équipe Traitement du Signal, ENSM-LAN UA CNRS n° 823, 1, rue de la Noë, 44072 NANTES CEDEX 03.

Laurent Goerig est Ingénieur ENSM Nantes depuis 1986, et exerce à ce titre des activités de recherche en Traitement du Signal dans le cadre d'une thèse de Doctorat. Ses principaux centres d'intérêt englobent le Filtrage et Lissage adaptatifs, ainsi que la détection de changements brusques.



Christian DONCARLI

Laboratoire d'Automatique de Nantes, Équipe Traitement du Signal, ENSM-LAN UA CNRS n° 823, 1, rue de la Noë, 44072 NANTES CEDEX 03.

Christian Doncarli est Docteur-Ingénieur ENSM Nantes, Docteur ès Sciences et Professeur d'Université. Ses domaines de recherche regroupent le Filtrage statistique ainsi que la théorie de la détection-décision. Le champ d'application privilégié par ses recherches est l'Ingénierie Biomédicale.

RÉSUMÉ

Le but de cette étude est l'estimation récursive d'un signal non stationnaire perturbé par un bruit additif indépendant. Ce type de problème se rencontre lorsque le signal à estimer est mal représenté par un modèle statistique, essentiellement quand sa ligne de base fluctue de manière imprévisible et irrégulière, ou quand le bruit de mesure est non stationnaire. Dans ces conditions, la mise en œuvre d'un filtre estimateur d'état (signal et ses dérivées) est difficile, car le filtre doit satisfaire un compromis permettant de bien éliminer le bruit additif, mais aussi de bien poursuivre les évolutions rapides. On propose tout d'abord un modèle à temps discret de type « majorant », c'est-à-dire dont les dynamiques sont des intégrateurs en cascade (forme particulière des modèles ARIMA). On montre ensuite comment estimer récursivement les caractéristiques statistiques des bruits intervenant dans ce modèle. Ces caractéristiques, estimées en temps réel, sont utilisées pour ajuster le gain du filtre de Kalman d'estimation d'état, qui est donc autoadapté aux caractéristiques du signal et respecte ainsi le compromis évoqué plus haut.

Il peut toutefois se produire des aléas pendant lesquels le modèle retenu ne « majore » pas suffisamment les dynamiques du signal, provoquant ainsi une traînée du filtre (rupture de la validité de l'estimation). On propose donc d'adjoindre au filtre de Kalman autoadaptatif une détection d'apparition des dérives de forte amplitude causées des ruptures, basée sur la théorie du rapport de vraisemblance généralisé. Cette partie non linéaire permet de supprimer les retards dus à une mauvaise adaptation du filtre, fournissant ainsi un algorithme beaucoup plus performant.

MOTS CLÉS

Filtrage auto-adaptatif, identification, détection de ruptures, modèles ARIMA.

SUMMARY

The aim of this paper is the recursive estimation of a non stationary signal, disturbed by an independent additive noise. This kind of problem typically has to be solved when the signal is not correctly described by a statistical model, and particularly when the baseline has no regular and no predictable fluctuations, or when the additive measurement noise is non stationary. In this case, the design of a state estimating filter (the signal and its derivatives) is quite difficult because it is necessary to perform the best tradeoff between the elimination of the additive noise, and the tracking of the high dynamics of the signal.

We propose, first, a discrete-type "majorant" model (series of integrators) which is a particular case of ARIMA models. Then, we show how to estimate in real time the statistical parameters of the noises in this model, which are used to adapt automatically the Kalman filter gain.

However, risky high level dynamics of the signal may occur, and the model is no longer a "majorant" one. A bias appears, and to avoid this problem, we propose to join a high dynamics detector, based on the generalised likelihood ratio. This non linear part of the algorithm reduces the delay and finally leads to an efficient procedure.

KEY WORDS

Auto-adaptive filtering, identification, failure detection, ARIMA processes.

1. Introduction

Parmi les modèles susceptibles de représenter une large classe de signaux, ceux issus des travaux axés sur les problèmes de poursuite de trajectoire sont généralement reconnus comme efficaces, et ont donc donné lieu à de nombreuses études [1]. Le modèle le plus utilisé est celui de Singer [2], dont une structure majorante [3] est le modèle « triple intégrateur ». D'une manière générale, les filtres dérivés des modèles

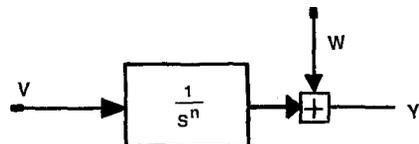


Fig. 1. — Modèle intégrateur continu. y : signal observé; v : bruit blanc de densité spectrale de puissance q ; w : bruit blanc de densité spectrale de puissance r ; s : variable de Laplace.

« intégrateurs d'ordre n » (cf. fig. 1) allient robustesses, simplicité et performances.

L'identification de tels modèles (à temps continu) basée sur l'estimation récursive des densités spectrales de puissance q et r permet ensuite la mise en œuvre d'un filtre de Kalman continu discrétisé [4].

On propose ici une étude restant rigoureusement dans le contexte des systèmes à temps discret, adaptée au modèle suivant (cf. fig. 2).

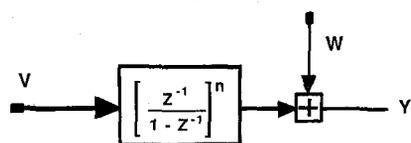


Fig. 2. — Modèle intégrateur discret. y : séquence observée; v : séquence blanche de variance q ; w : séquence blanche de variance r ; z^{-1} : opérateur retard.

On présente tout d'abord (§ 2) une méthode d'identification de ce modèle, permettant d'estimer en temps réel les variances q et r (éventuellement non stationnaires) des bruits intervenant dans le modèle.

Ces variances seront, en parallèle, utilisées pour calculer les éléments du filtre de Kalman à temps discret

d'estimation d'état (§ 3). L'examen des résultats obtenus en simulation (pour $n=3$) met en évidence les insuffisances d'un tel filtrage lors de l'apparition de dérives de grande amplitude sur le signal. On propose donc d'adjoindre une détection de ruptures, basée sur le principe du rapport de vraisemblance généralisé dont on donnera une présentation originale pour le type de modèle considéré (§ 4). On jugera sur les simulations l'amélioration apportée par un tel algorithme.

2. Identification récursive du modèle intégrateur discret

La mise en œuvre d'un filtre de Kalman sur le modèle intégrateur proposé nécessite la connaissance des variances q et r des séquences de bruit v et w . En généralisant les travaux concernant les triples intégrateurs continus [6], et en s'intéressant à une formulation discrète, on propose une estimation directe des variances q et r par filtrage parallèle du signal observé Y . On définit pour cela deux filtres discrets par leur transmittance :

$$F_i(z^{-1}) = \frac{(1 - z^{-1})^n}{(1 - \alpha_i z^{-1})^{n+1}}, \quad i=1,2$$

avec $0 \leq \alpha_i < 1$.

La forme choisie pour ces filtres répond à des objectifs évidents de stabilité et de simplicité.

En désignant par S_i la sortie de ces filtres excités par le signal Y , on obtient sans difficulté le système (S) suivant :

$$(S) \quad \text{Var } S_i = B_q(\alpha_i) \cdot q + B_r(\alpha_i) \cdot r, \quad i=1,2$$

où $\text{Var } S_i$ désigne la variance du signal S_i et

$$B_q(\alpha_i) = \frac{1}{2\pi j} \int \frac{F_i(z)}{(1-z)^n} \cdot \frac{F_i(z^{-1})}{(1-z^{-1})^n} \cdot z^{-1} dz$$

$$B_r(\alpha_i) = \frac{1}{2\pi j} \int F_i(z) \cdot F_i(z^{-1}) \cdot z^{-1} dz$$

avec $j^2 = -1$.

Un calcul assez long mais sans difficulté théorique permet d'obtenir les expressions analytiques suivantes :

$$B_q(\alpha_i) = \frac{\sum_{k=0}^n (C_n^k \alpha_i^k)^2}{(1 - \alpha_i^2)^{2n+1}}$$

$$B_r(\alpha_i) = C_{2n}^n \cdot \frac{(1 - \alpha_i)^{2n}}{(1 - \alpha_i^2)^{2n+1}}$$

La méthode d'estimation des variances q et r consiste donc à filtrer le signal observé par deux filtres distincts $F_i(z^{-1})$ ($i=1, 2$) ce qui permet d'élaborer les signaux S_i , dont on calculera les variances par un estimateur ergodique approprié. La résolution du système (S) donne alors les expressions analytiques des valeurs de q et r en fonction des variances estimées de S_1 et S_2 .

Dans la pratique, on souhaite pouvoir prendre en compte d'éventuelles non-stationnarités lentes de q et r . On choisira donc de préférence une estimation des variances des signaux S_i par filtrage exponentiel des carrés de ces signaux.

D'autre part, la seule condition $\alpha_1 \neq \alpha_2$ assure le succès théorique de la méthode. Cependant, dans la pratique, rien ne garantit la cohérence du résultat de la résolution du système (S), et en particulier, la positivité des solutions, et ce, en raison des erreurs introduites dans les estimations expérimentales des variances des signaux S_i . L'examen du comportement

problème en rendant le système (S) quasi diagonal par un choix approprié de α_1 et α_2 .

L'objectif est donc d'obtenir :

$$\begin{cases} B_q(\alpha_1) \cdot q \gg B_r(\alpha_1) \cdot r \\ B_q(\alpha_2) \cdot q \ll B_r(\alpha_2) \cdot r \end{cases}$$

En posant $M = (r/q)^{1/2n}$, proportionnel à un temps (cf. § 3.2, cas $n=3$), et

$$g(\alpha_i) = (1 - \alpha_i) \cdot \left(\frac{C_{2n}^n}{\sum_{k=0}^n (C_n^k \alpha_i^k)^2} \right)^{1/2n}$$

les conditions de quasi-diagonalité du système (S) s'écrivent :

$$g(\alpha_1) \ll \frac{1}{M}$$

$$g(\alpha_2) \gg \frac{1}{M}$$

Il suffira donc maintenant d'avoir une idée approximative du nombre de points M de la durée des dynamiques du signal pour choisir, par exemple, α_1 et α_2 tels que :

$$g(\alpha_1) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{M}$$

$$g(\alpha_2) = 10 \cdot \frac{1}{M}$$

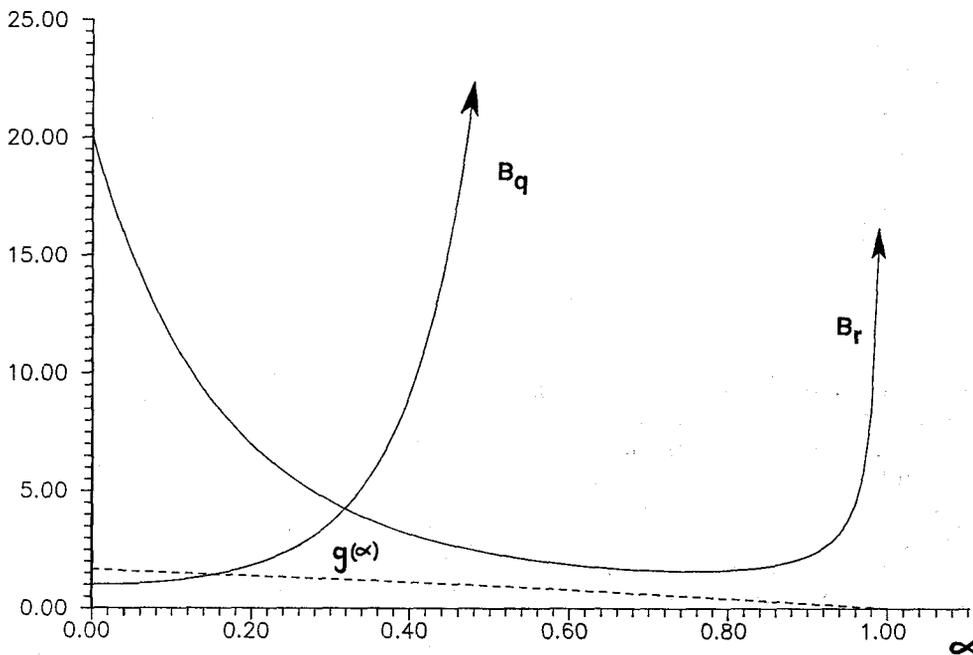


Fig. 3. — Comportement de B_q et B_r , cas $n=3$.

des coefficients $B_q(\alpha)$ et $B_r(\alpha)$ (cf. fig. 3 dans le cas $n=3$) suggère une possibilité de s'affranchir de ce

Ce choix n'est certainement pas le seul possible. On peut sans aucun problème envisager $\alpha_2=0$, ce qui

correspond à la valeur maximale de $g(\alpha)$ (cf. fig. 3). Toutefois, il est déconseillé de prendre $\alpha_1 \neq 1$ [valeur qui minimise $g(\alpha)$] pour des problèmes de stabilité et de retard dans l'estimation de q .

On remarque que ces choix reviennent physiquement à prendre α_1 et α_2 tels que S_1 soit représentatif des dynamiques du signal, et S_2 du bruit additif.

Les erreurs sur q et r introduites par l'estimateur ergodique de variance employé ont été appréciées sur de nombreuses simulations appliquées au modèle particulier triple intégrateur, comportant des échantillons de 512 points. Ces dernières n'excèdent pas 5 % dans le cas stationnaire avec le choix des α_i proposé. Il en est de même pour le cas non stationnaire, tant que les variations de M restent dans le cadre des conditions de quasi-diagonalité du système (S) précédent, et que celles de q et r restent lentes vis-à-vis des constantes de temps α_i choisis.

Le comportement global de la procédure d'identification est présenté sur les figures 4 à 6 (cas $n=3$).

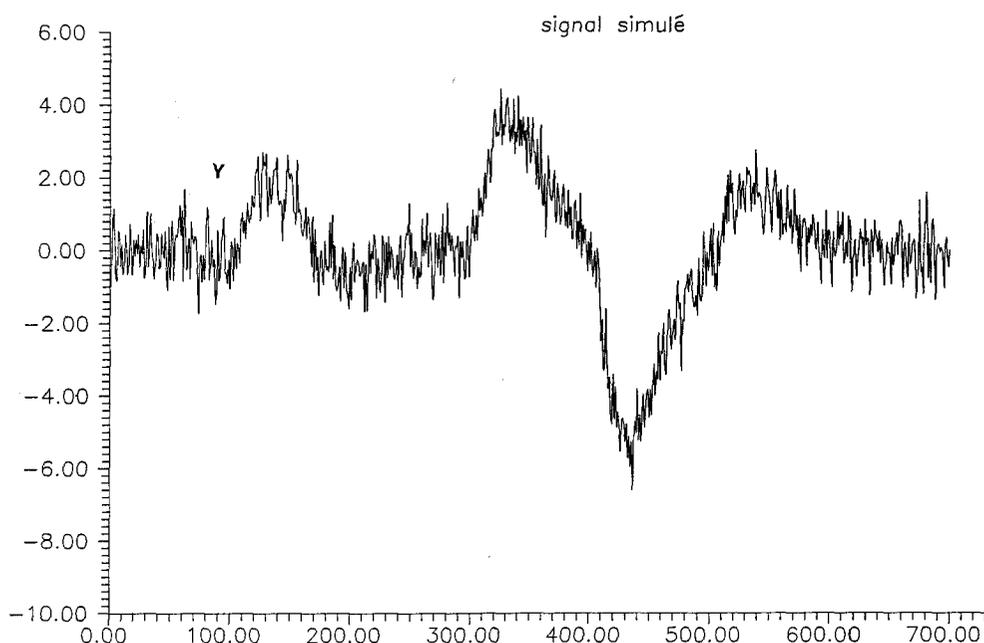


Fig. 4. — Signal étudié.

La figure 4 montre le signal étudié : il s'agit de la réponse d'un système linéaire (constantes de temps en cascade) à une suite d'impulsions d'amplitudes tirées au hasard, survenant à des instants aléatoires. Le bruit additif a une variance $r=0,35$. On notera que la génération du signal ne correspond pas à la structure du modèle identifié. L'observation des figures 5 (estimation courante de r) et surtout 6 (estimation courante de q) montre que la variance du bruit additif est correctement estimée, et que la valeur courante de q traduit effectivement l'apparition de dérives de forte amplitude du signal. Ces remarques laissent donc présager un bon comportement du filtre de Kalman utilisant les estimations de q et r proposées.

3. Filtrage de Kalman auto-adaptatif

On dispose, à l'issue de l'identification des variances, d'une modélisation du signal permettant de prendre en compte ses non-stationnarités. Il est donc tout à fait envisageable d'utiliser les valeurs courantes de q et r dans les équations classiques du filtre de Kalman discret non stationnaire déduit du modèle intégrateur. Le comportement d'un tel filtre est présenté sur la figure 9, où l'on peut observer le signal simulé et le signal estimé. On constate que malgré l'inadéquation du modèle ayant servi à construire le filtre, les performances sont assez honorables, sauf dans les transitoires dus aux dérives du signal. On présentera (§ 4) un moyen pour s'affranchir de ce défaut, utilisant la théorie de la détection. Au préalable, on propose une version sous-optimale du filtre précédent, qui évite les difficultés d'utilisation des équations de Kalman non stationnaires.

La simplification apportée consiste à utiliser, à chaque instant, la valeur stationnaire asymptotique du gain

de Kalman qui sera par la suite adaptée par les estimations courantes de q et r . Ceci n'a d'intérêt, évidemment, que dans la mesure où l'on dispose de formules analytiques permettant d'écrire le gain de Kalman stationnaire asymptotique en fonction de q et r . La solution rigoureuse de ce problème n'existe pas à notre connaissance, et on en propose donc une version approchée, en précisant le domaine où cette approximation est envisageable, et en limitant l'étude au cas $n=3$. Deux expressions analytiques de ce gain approché seront développées dans la suite par deux méthodes différentes, la première s'intéressant directement à l'équation de Riccati discrète, et la seconde utilisant l'analogie des modèles discrets et continus-discrétés.

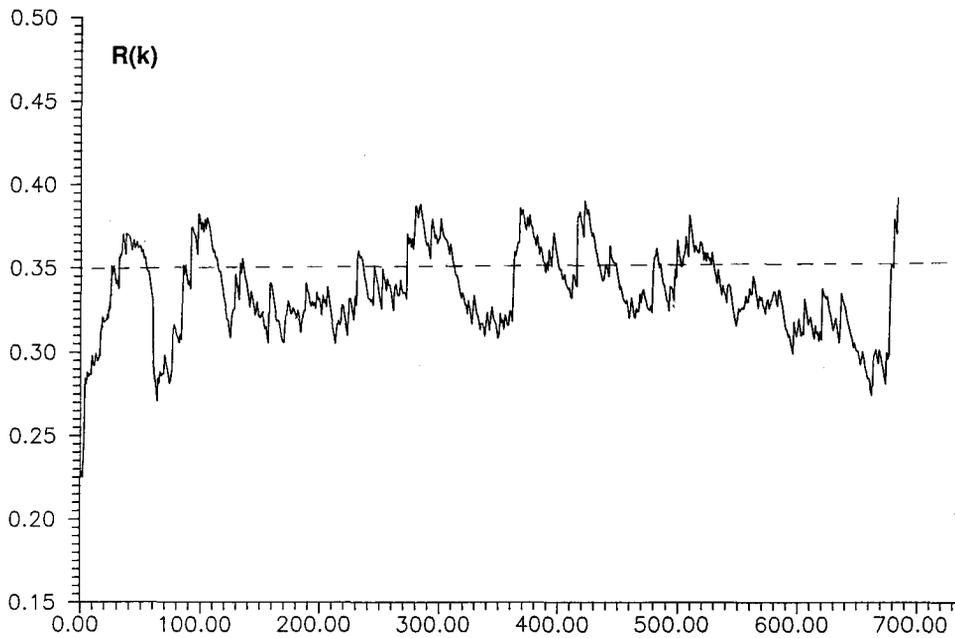


Fig. 5. — Estimation de r .

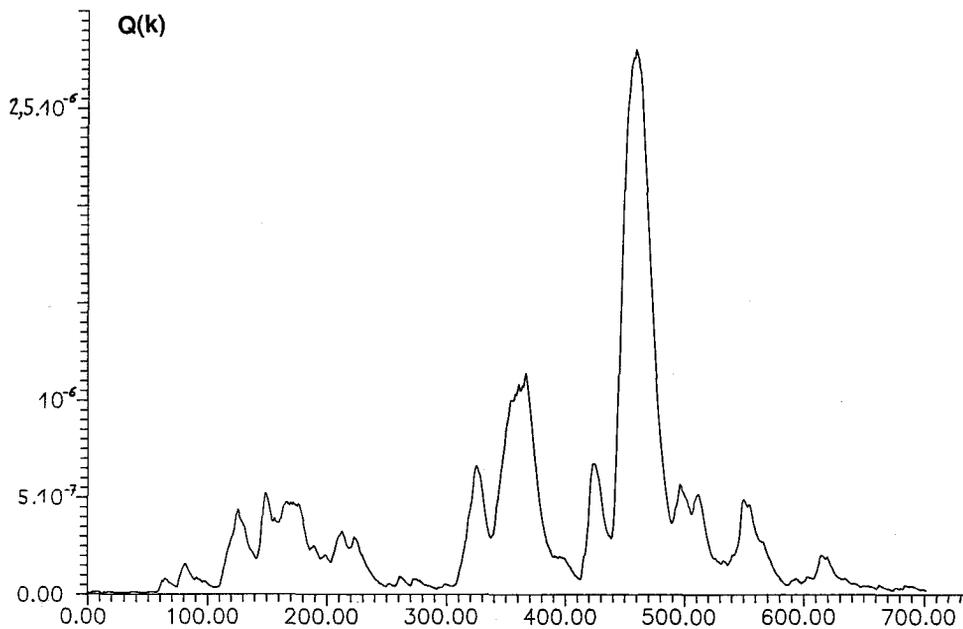


Fig. 6. — Estimation de q .

3.1. ÉVALUATION DU GAIN DE KALMAN STATIONNAIRE.
APPROCHE DIRECTE

stationnaire [1] :

On présente une première méthode de calcul approché du gain stationnaire asymptotique du filtre de Kalman correspondant à un modèle triple intégrateur discret, qui fait appel à la résolution de l'équation de Riccati correspondante. La démarche proposée consiste à appliquer la méthode de Vaughan [7] au système markovien étudié, préalablement écrit sous forme compagnon observable. Par un calcul analogue à celui mené par Bozzo dans le cas particulier du modèle de Friedland, et adapté au modèle triple intégrateur, on aboutit à l'expression suivante du gain

$$K_d = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{x^2} \\ 2 - \frac{\rho - \psi}{2x} + \frac{2}{x^2} \\ \frac{\psi}{x} \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} \rho &= (2^6 + \mu_d^6)^{1/2} \\ \psi &= \mu_d^3 \\ (E) \quad x^4 - \frac{\rho + \psi}{2} \cdot x^3 + 6 \cdot x^2 - \frac{\rho - \psi}{2} \cdot x + 1 &= 0. \end{aligned}$$

La résolution de l'équation précédente peut être envisagée de manière approchée par diverses méthodes classiques de résolution numérique d'équations analytiques (Newton par exemple). L'examen de la courbe d'évolution de x en fonction de μ_d , déduite de l'expression issue de (E) :

$$\mu_d(x) = \frac{1}{x} \left[\frac{x^4 - 1}{2} \cdot \sqrt{x^4 + 14 \cdot x^2 + 1} - \frac{x^2 - 1}{2} \cdot (x^4 + 6 \cdot x^2 + 1) \right]^{1/3}$$

permet d'assurer la convergence de telles procédures (cf. fig. 7).

Dans ces conditions, on dispose donc d'une approximation du gain de Kalman stationnaire discret, qui s'écrit, d'après l'expression de K_d :

$$K_d(\mu_d) \neq \frac{\mu_d}{1 + \mu_d} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2 + \mu_d}{1 + \mu_d} \\ \frac{\mu_d \cdot (4 + \mu_d + \mu_d^2)}{2 \cdot (1 + \mu_d)} \\ \mu_d^2 \end{bmatrix}$$

avec, à tout instant k ,

$$\mu_d = \mu_d(k) = \left(\frac{q_d(k)}{r_d(k)} \right)^{1/6}$$

Un calcul d'incertitude assez précis peut être mené, car l'erreur commise en prenant $x \neq 1 + \mu_d$ peut être appréciée sur la figure 7, en fonction de la valeur de μ_d . Pour $\mu_d \leq 0,15$, on montre que les erreurs sur le gain sont de l'ordre de 10 % maximum. De nombreuses simulations effectuées confirment ce résultat.

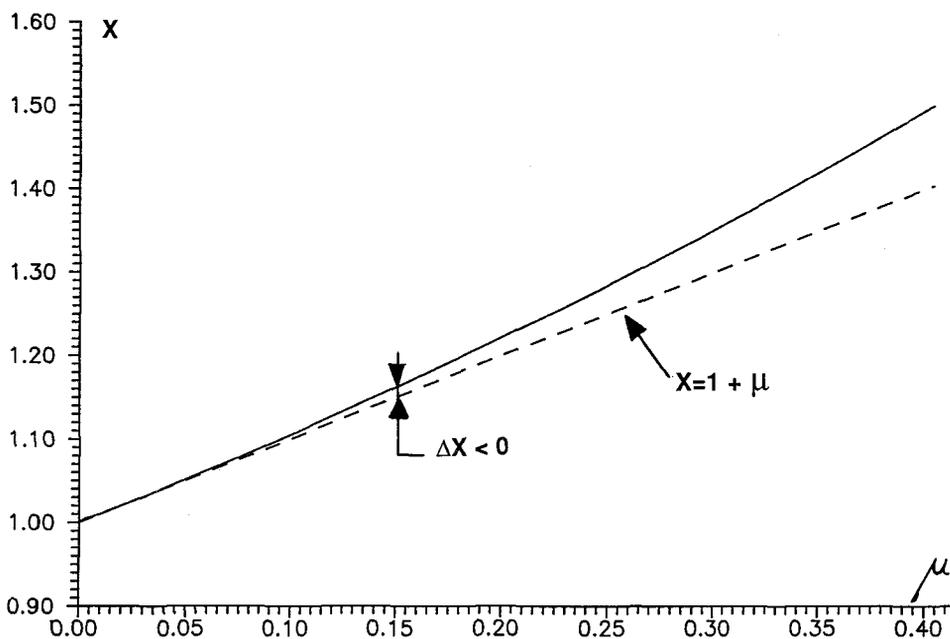


Fig. 7. - Évolution de x en fonction de μ_d .

Par ailleurs, l'équation (E) est visiblement canonique pour :

$$\begin{cases} \rho + \psi = 8 \\ \rho - \psi = 8 \end{cases}$$

soit $\rho = 8$ et $\psi = 0$.

Ces conditions sont approximativement vérifiées quand $\mu_d \neq 0$.

On a alors $x \neq 1$, ce qui permet d'écrire la linéarisation au premier ordre de $\mu_d(x)$:

$$\mu_d(x) = (x - 1) + O(x - 1)^2$$

soit finalement $x \neq 1 + \mu_d$ (cf. fig. 7).

3.2. ÉVALUATION DU GAIN DE KALMAN STATIONNAIRE. APPROCHE INDIRECTE

L'analyse des relations entre le modèle triple intégrateur discret et le modèle (et filtre) continu correspondant permet de développer une seconde méthode de calcul approché du gain stationnaire asymptotique du filtre de Kalman associé au modèle discret.

Les équations d'état du modèle triple intégrateur continu (cf. fig. 1) s'écrivent :

$$\begin{cases} \dot{X} = A \cdot X + \Gamma \cdot V \\ y = H \cdot X + W \end{cases}$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} 010 \\ 001 \\ 000 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad H^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On notera q_c et r_c les densités spectrales de puissance des bruits blancs V et W . La discrétisation au premier ordre de ce modèle conduit au triple intégrateur discrétisé :

$$\begin{cases} X(k+1) = (\mathbf{1} + A \cdot \Delta) \cdot X(k) + \Gamma \cdot \Delta \cdot V(k) \\ Y(k) = H \cdot X(k) + W(k) \end{cases}$$

où $\mathbf{1}$ est la matrice unité (3×3); Δ désigne la période d'échantillonnage; $V(k)$ est une séquence blanche de variance (q_c/Δ); $W(k)$ est une séquence blanche de variance (r_c/Δ).

Si on fait le changement de base :

$$X(k) = L \cdot x(k)$$

avec

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \Delta^{-2} \end{bmatrix}$$

Le triple intégrateur discrétisé s'écrit alors :

$$\begin{cases} x(k+1) = \Phi \cdot x(k) + \Gamma \cdot \beta(k) \\ Y(k) = H \cdot x(k) + \gamma(k) \end{cases}$$

avec

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et $\beta(k)$ séquence blanche de variance $q_d = \Delta^5 \cdot q_c$; $\gamma(k)$ séquence blanche de variance $r_d = (r_c/\Delta)$.

On retrouve ainsi la structure exacte du modèle d'état qui aurait pu être déduite directement du triple intégrateur discret (cf. fig. 2).

Si on désigne par P_c la valeur stationnaire de la matrice de variance-covariance du filtre de Kalman continu, élaborée avec :

$$q_c = \frac{q_d}{\Delta^5} \\ r_c = \Delta \cdot r_d$$

on aura, en notant P_d la valeur stationnaire du filtre discret (correspondant à q_d et r_d) :

$$P_d \neq L^{-1} \cdot P_c \cdot (L^{-1})^T \quad \text{quand } \Delta \neq 0.$$

Un calcul aisé permet de connaître l'expression analytique de P_c , solution de l'équation :

$$A \cdot P_c + P_c \cdot A^T - P_c \cdot H^T \cdot r_c^{-1} \cdot H \cdot P_c + \Gamma \cdot q_c \cdot \Gamma^T = 0.$$

Cette solution s'écrit :

$$P_c = \begin{bmatrix} 2\mu_c r_c & 2\mu_c^2 r_c & \mu_c^2 r_c \\ 2\mu_c^2 r_c & 3\mu_c^3 r_c & 2\mu_c^4 r_c \\ \mu_c^3 r_c & 2\mu_c^4 r_c & 2\mu_c^5 r_c \end{bmatrix}$$

Avec $\mu_c = (q_c/r_c)^{1/6}$ (μ_c a la dimension d'une fréquence).

On peut donc en déduire finalement l'approximation de P_d , dont l'expression sera identique à la matrice P_c ci-dessus, en y remplaçant les indices « c » par des indices « d », et avec $\mu_d = (q_d/r_d)^{1/6}$.

En rappelant les relations entre $\{q_c, r_c, q_d, r_d\}$, on trouve :

$$\mu_d = \Delta \cdot \mu_c.$$

La linéarisation au premier ordre du système continu n'est valable que lorsque $\Delta \neq 0$. En conséquence, l'approximation ci-dessus de P_d n'a de sens que pour $\mu_d \neq 0$. Or en rappelant la définition de M (cf. § 2), on peut écrire $\mu_d = 1/M$. Il en découle que la condition $\mu_d \neq 0$ ne sera vérifiée en pratique que si M est de l'ordre de quelques dizaines de points, ce qui est une condition tout à fait naturelle.

L'expression du gain stationnaire du filtre s'écrit finalement :

$$K_d = \frac{1}{1 + 2\mu_d} \begin{bmatrix} 2\mu_d \\ 2\mu_d^2 \\ \mu_d^3 \end{bmatrix}.$$

On constatera que cette approximation du gain stationnaire est tout à fait cohérente avec celle trouvée précédemment (cf. § 3.1) quand $\mu_d \neq 0$.

Les erreurs constatées sur les simulations par rapport au gain exact, bien que plus importantes que celles introduites par la formule du paragraphe 3.1, restent cependant inférieures à 10 % pour $\mu_d \leq 0,10$.

3.3. IMPLÉMENTATION DU FILTRE

On dispose donc de deux versions sous-optimales (la première étant plus précise) permettant d'appliquer un gain de filtre déduit des valeurs de q et r par une formule analytique. L'estimateur de ces variances pouvant prendre en compte d'éventuelles non-stationnarités lentes de ces dernières (cf. § 2), le gain résultant n'a plus, de fait, de caractère stationnaire (mais conserve sa qualité d'asymptotique). La mise en œuvre d'un tel filtre sera évidemment plus simple que celle du filtre optimal non stationnaire duquel il est dérivé. Les variances des erreurs d'estimation seront, si besoin est, issues des formules de filtrage linéaire non optimal [8]

$$P(k+1/k) = M(k+1, k) \cdot P(k/k-1) \cdot M(k+1, k)^T \\ + K_d(k) \cdot r(k) \cdot K_d(k)^T + \Gamma \cdot q(k) \cdot \Gamma^T$$

avec

$$M(k+1, k) = \Phi \cdot (\mathbf{1} - K_d(k) \cdot H).$$

Le comportement du filtre correspondant à l'approximation plus précise du paragraphe 3.1 est présenté

sur la figure 10. Les seules détériorations visibles par rapport au filtre optimale (cf. fig. 9) apparaissent aux instants $k = 60, 130, 330, \text{ et } 530$.

4. Détection de ruptures

L'examen des performances du filtre (optimal ou sous-optimal) montre une insuffisance lors de l'apparition des fortes dérives du signal (aux instants 130, 330, 440, et 530, fig. 9 et 10); ceci résulte de l'incompatibilité (due aux choix de la modélisation statistique) entre les objectifs de réjection des bruits et de suivi des dérives de grande amplitude. Cependant, on ne cherchera pas à dégrader les performances du filtre sous conditions normales (en l'absence de dérives brutales du signal) en lui donnant la possibilité de suivre en permanence de tels écarts : on sait en effet que pour un modèle intégrateur d'ordre supérieur ou égal à trois, la traînée asymptotique est nulle, et le filtre a normalement un comportement lisseur. Par contre, l'apparition sporadique de ces dérives suggère un modèle incluant d'éventuelles impulsions discrètes sur l'état, ce qui se traduit par :

$$x(k+1) = \Phi(k+1, k) \cdot x(k) + \Gamma \cdot V(k) + \delta(\theta, k+1) \cdot v$$

$\delta(\theta, k+1)$ étant le symbole de Kronecker, avec θ entier positif déterministe inconnu représentant l'instant d'apparition d'une impulsion discrétisée d'amplitude v sur l'une ou plusieurs des variables d'état, et cause d'un écart du filtre (rupture).

Le problème est de détecter un éventuel saut sur l'état, puis d'en tenir compte lors de l'estimation. Cette question a été résolue dans le cas général [5] grâce à la théorie du rapport de vraisemblance généralisé, dont les propriétés d'efficacité ont été bien étudiées du point de vue théorique.

Nous présentons dans ce qui suit une formulation plus pratique que celle proposée par Willsky-Jones [5], avant de l'appliquer au cas qui nous intéresse.

4.1. GÉNÉRALITÉS

Le modèle de l'innovation U issue d'un filtre de Kalman appliqué au système précédent s'écrit :

$$\begin{cases} \mathbf{X}(k+1) = \mathbf{M}(k+1, k) \cdot \mathbf{X}(k) + \mathbf{B}(k) + \delta(\theta, k+1) \cdot v \\ U(k+1) = \mathbf{H} \cdot \mathbf{X}(k+1) + \mathbf{W}(k+1) \end{cases}$$

avec la matrice de transition du filtre de Kalman :

$$\mathbf{M}(k+1, k) = \Phi \cdot (\mathbf{1} - \mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{H})$$

$\mathbf{K}(k)$ étant le gain du filtre, et :

$$\mathbf{X}(k) = x(k) - \hat{x}(k/k-1)$$

avec $\hat{x}(k/k-1)$ la prédiction sur l'état $x(k)$.

$\mathbf{B}(k)$ représente un bruit blanc centré de matrice variance-covariance :

$$\Gamma \cdot q(k) \cdot \Gamma^T + \Phi \cdot \mathbf{K}(k) \cdot r(k) \cdot \mathbf{K}^T(k) \cdot \Phi^T$$

Par suite du théorème de superposition, la contribution à l'innovation des paramètres θ et v seuls s'écrit :

$$U_2(k) = \mathbf{G}(k, \theta) \cdot v$$

avec :

$$\mathbf{G}(k, \theta) = \mathbf{H} \cdot \mathbf{M}(k, \theta)$$

$$\mathbf{M}(k+1, \theta) = \mathbf{M}(k+1, k) \cdot \mathbf{M}(k, \theta), \quad k > \theta;$$

$$\mathbf{M}(\theta, \theta) = \mathbf{1}.$$

On peut maintenant utiliser les équations développées par Willsky-Jones pour estimer $\hat{\theta}$ et v par maximum de vraisemblance :

$$\begin{cases} \hat{\theta}(k) = \text{Arg max}_{\theta \leq k} \mathbf{d}^T(k, \theta) \cdot \mathbf{C}^{-1}(k, \theta) \cdot \mathbf{d}(k, \theta) \\ \hat{v}(k) = \mathbf{C}^{-1}(k, \hat{\theta}(k)) \cdot \mathbf{d}(k, \hat{\theta}(k)) \end{cases}$$

avec :

$$\mathbf{C}(k, \theta) = \sum_{j=\theta}^k \mathbf{G}^T(j, \theta) \cdot \mathbf{V}^{-1}(j) \cdot \mathbf{G}(j, \theta)$$

$\mathbf{C}^{-1}(k, \theta)$ étant la matrice variance-covariance d'erreur d'estimation de v , et

$$\mathbf{d}(k, \theta) = \sum_{j=\theta}^k \mathbf{G}^T(j, \theta) \cdot \mathbf{V}^{-1}(j) \cdot U(j)$$

$V(k)$ représentant la variance de l'innovation U , déduite de l'équation de Riccati du filtre de Kalman.

Le test d'hypothèses consiste à comparer à un seuil le Log-rapport de vraisemblance des innovations, conditionnelles à l'absence ou à la présence d'un saut.

On montre très facilement que le Log-rapport de vraisemblance s'écrit :

$$\begin{aligned} L(k) &= \hat{v}^T(k) \cdot \mathbf{C}(k, \hat{\theta}(k)) \cdot \hat{v}(k) \\ &= \|\hat{v}(k)\|^2 \mathbf{C}(k, \hat{\theta}(k)) \leq \end{aligned}$$

Ce résultat (écrit sous cette forme), indique clairement que le test revient à comparer à un seuil ϵ l'estimation de l'amplitude du saut, pondérée par sa matrice d'information.

La réadaptation du filtre proposée par les auteurs [5] du détecteur porte à l'origine directement sur l'état estimé (et sa matrice de variance-covariance d'erreur) à l'instant k où s'est produite la détection. Nous proposons cependant d'utiliser les informations obtenues *a posteriori* sur v pour effectuer une réadaptation à l'instant $\hat{\theta}$, à l'aide des expressions :

$$\begin{aligned} x(\hat{\theta}/\hat{\theta})_{\text{Nouveau}} &= x_{\text{ancien}}(\hat{\theta}/\hat{\theta}) + (\mathbf{1} - \mathbf{K}(\hat{\theta}) \cdot \mathbf{H}) \cdot \hat{v}(k) \\ \mathbf{P}(\hat{\theta}/\hat{\theta})_{\text{Nouveau}} &= \mathbf{P}_{\text{ancien}}(\hat{\theta}/\hat{\theta}) \\ &\quad + (\mathbf{1} - \mathbf{K}(\hat{\theta}) \cdot \mathbf{H}) \cdot \mathbf{C}^{-1}(k, \hat{\theta}) \cdot (\mathbf{1} - \mathbf{K}(\hat{\theta}) \cdot \mathbf{H})^T \end{aligned}$$

où $\mathbf{1}$ représente la matrice unité, et poursuivre la correction sur l'estimation de l'état par un fonctionnement optimal du filtre de Kalman pour $k \geq \hat{\theta}$.

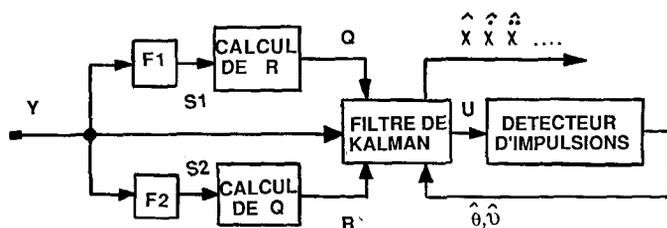


Fig. 8. — Algorithme complet de filtrage-détection.

Notons que les formules originales de réadaptation directe à l'instant k se déduisent précisément des réinitialisations ci-dessus par un fonctionnement itératif non optimal du filtre de l'instant θ à k , c'est-à-dire en gardant les valeurs du gain K obtenues avant la détection, et en utilisant la formule de calcul des matrices variance-covariance d'erreur d'estimation non optimale rappelée au paragraphe 3.3.

4.2. CAS DES MODÈLES INTÉGRATEURS

La variable de pilotage d'un processus intégrateur d'ordre n , c'est-à-dire celle responsable des manœuvres ou des apparitions des dérivés du signal est la n -ième composante du vecteur d'état. Il est donc logique de lui accorder toute l'importance d'un réajustement en cherchant à détecter d'éventuelles impulsions discrètes sur cette composante particulière plutôt que d'étendre le champ de détection sur tout le vecteur d'état. Les expressions précédentes du détecteur, notoirement complexes dans le cas général, se simplifient avantageusement avec ces considérations, et deviennent, sous forme récursive :

$$\begin{aligned}
 M_n(k+1, \theta) &= M(k+1, k) \cdot M_n(k, \theta); \\
 M_n(k, k) &= [0 \dots 0 \ 1]_n^T \\
 G_n(k, \theta) &= H \cdot M_n(k, \theta) \\
 d_n(k, \theta) &= G_n(k, \theta) \cdot U(k)/V(k) + d_n(k-1, \theta); \\
 d_n(k, k) &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{nn}(k, \theta) &= C_{nn}(k-1, \theta) + G_n^2(k, \theta)/V(k); \\
 C_{nn}(k, k) &= 0 \\
 \hat{\theta}(k) &= \text{Arg max}_{\theta \leq k} d_n^2(k, \theta)/C_{nn}(k, \theta), \\
 \hat{v}_n(k) &= d_n^2(k, \hat{\theta}(k))/C_{nn}(k, \hat{\theta}(k)); \\
 L(k) &= \hat{v}_n(k)^2 \cdot C_{nn}(k, \hat{\theta}(k))
 \end{aligned}$$

M_n étant un vecteur ($n \times 1$), et G_n, d_n, C_{nn} des scalaires, désignant, pour les deux premiers, la n -ième composante des vecteurs $G(k, \theta)$ et $d(k, \theta)$, et pour le troisième, l'élément de la n -ième ligne et n -ième colonne de la matrice $C(k, \theta)$, et avec :

$$\Phi_n = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix}_{n \times n};$$

$$v = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v_n \end{bmatrix}_{n \times 1}; \quad H^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

$$\begin{cases} x_n(\hat{\theta}/\hat{\theta})_{\text{Nouveau}} = x_n(\hat{\theta}/\hat{\theta})_{\text{Ancien}} + \hat{v}_n(k) \\ P_{nn}(\hat{\theta}/\hat{\theta})_{\text{Nouveau}} = P_{nn}(\hat{\theta}/\hat{\theta})_{\text{Ancien}} + 1/C_{nn}(k, \hat{\theta}) \end{cases}$$

Remarquons que le choix du seuil de décision ϵ n'est pas simple, le détecteur y étant relativement sensible. En effet, si ϵ est choisi trop grand, la probabilité de fausse alarme diminuera, au contraire de celle de manque, et réciproquement pour ϵ trop petit. Il s'agit donc de trouver un compromis heuristique entre ces contraintes.

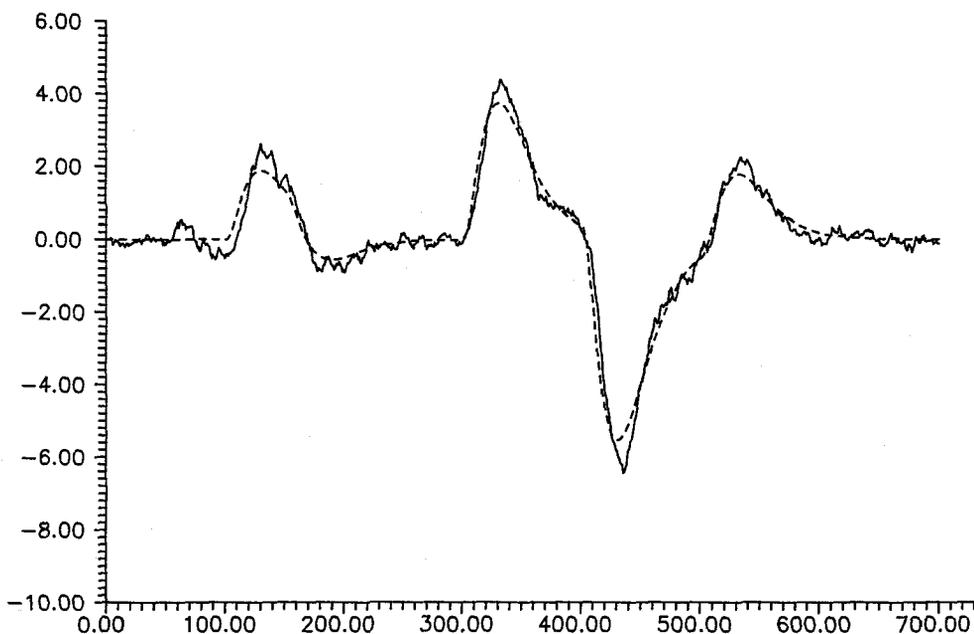


Fig. 9. — Filtre optimal. — : signal estimé; - - - : signal réel (non bruité).

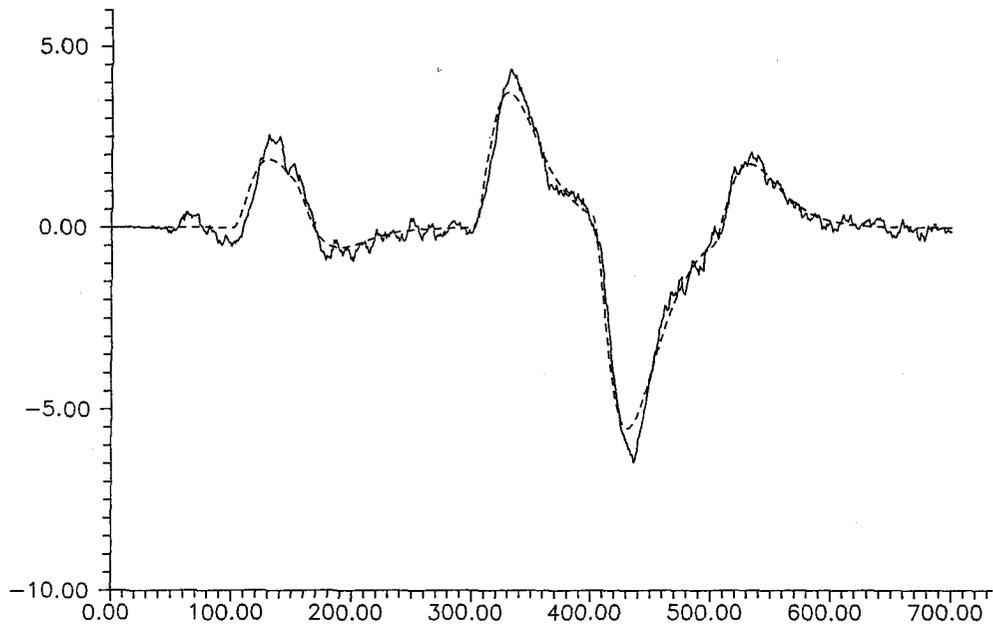


Fig. 10. — Filtrage sous-optimal. — : signal estimé; - - - : signal réel (non bruité).

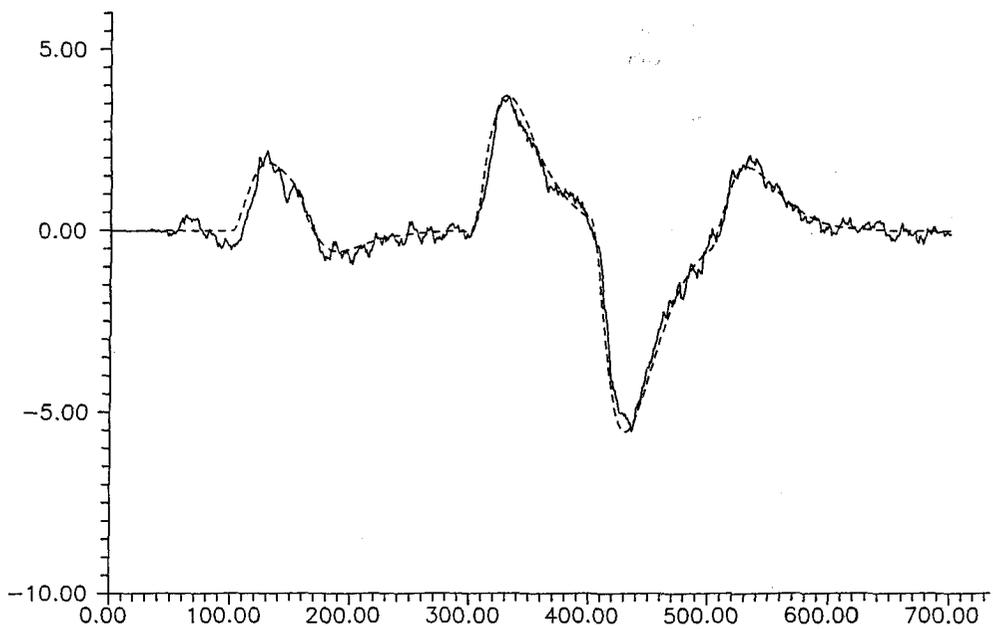


Fig. 11. — Filtrage et détection. — : signal estimé; - - - : signal réel (non bruité).

Avant d'examiner le comportement de l'algorithme complet en simulation, on en rappelle la structure générale (cf. fig. 8).

4.3. SIMULATIONS

La mise en œuvre du détecteur de Willsky-Jones complet exige un important volume de calcul car la recherche de l'instant optimal $\hat{\theta}$ de rupture ne peut se faire que par inspection des diverses valeurs de $d_n(k, \theta)$ et $C_{nn}(k, \theta)$, ce qui nécessite de plus la mémorisation d'une banque de données croissante avec k . Les auteurs du détecteur [5] proposent donc de réduire sensiblement ce volume en limitant l'intervalle d'investigation de θ à une fenêtre finie :

$$k - N1 < \theta \leq k - N2 \quad \text{avec} \quad 0 < N2 < N1$$

$N1$ et $N2$ étant choisis tels que largeur et position de la fenêtre soient satisfaisants pour assurer à la fois une bonne estimation du saut, et conduire à des délais de détection acceptables.

D'une manière générale, si la fenêtre est suffisamment large pour permettre la détection et l'identification des ruptures importantes, cette limitation ne conduit à aucune difficulté sérieuse.

Le détecteur a été intégré à la chaîne du filtrage adaptatif présentée au paragraphe 3, et appliqué au signal déjà étudié. La détection des ruptures a eu lieu aux instants 121, 320, et 416 avec le choix $N1 = 300$ et $N2 = 10$, et le résultat obtenu par la chaîne complète de filtrage adaptatif et détection de ruptures est présenté sur la figure 11 (à comparer avec les figures 9 et 10).

5. Conclusions

On a montré l'intérêt des modèles de type « intégrateur » pour des signaux mal représentés par des modèles statistiques. L'estimation en ligne des variances des bruits permet de mettre en œuvre un filtre de Kalman auto-adaptatif, dont les éventuels décrochages sont rattrapés par un détecteur de ruptures. On peut ainsi disposer d'une chaîne complète d'estimation dont l'efficacité a été prouvée sur un signal non régi par un modèle statistique stationnaire.

Certaines questions sont encore à l'étude, en particulier la sensibilité de la méthode à l'indépendance du bruit additif.

D'autre part, on pense étendre les concepts développés ici dans le contexte du filtrage temps-réel, vers le lissage, c'est-à-dire utiliser l'ensemble filtrage-détection au sein d'une procédure hors-ligne non causale.

Manuscrit reçu le 21 septembre 1987.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] C. A. Bozzo, *Le filtrage optimal et ses applications aux problèmes de poursuite*, III, Librairies Lavoisier, 1983.
- [2] R. A. SINGER, Estimating optimal tracking filter performance for manned maneuvering targets, *IEEE Trans. AES*, 6, 1970, n° 4.
- [3] Ph. DE LARMINAT et J. M. PIASCO, Modèles majorants : application au filtrage de trajectoires de mobiles manœuvrants, 8° colloque sur le traitement du signal et ses applications, Nice, 1981, pp. 451-456.
- [4] C. DONCARLI, Ph. DE LARMINAT et A. LINARD, *Étude et application d'algorithmes d'identification récursive multivariable à l'estimation de la cinématique d'un but*, Rapport final convention DCAN/ENSM, 1979.
- [5] A. S. WILLSKY et H. L. JONES, A generalized likelihood ratio approach to the detection and estimation of jumps in linear systems, *IEEE Trans. on automatic control*, 1976, pp. 108-112, February, n° 1.
- [6] Ph. DE LARMINAT et J. M. PIASCO, Filtrage auto-adaptatif de trajectoires de mobiles manœuvrants, *Control and computers*, 10, n° 1, 1982, p. 10-14.
- [7] D. R. VAUGHAN, A non recursive algebraic solution for the discrete Riccati equation, *IEEE AC*, 15, 1970, pp. 597-599, Octobre n° 5.
- [8] B. D. O. ANDERSON et B. MOORE, *Optimal filtering*, Prentice-Hall, Electrical Engineering series, p. 49, 1979.