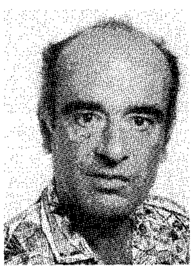
Logique multivalente pour systèmes de diagnostic et application à la logique ternaire [1]

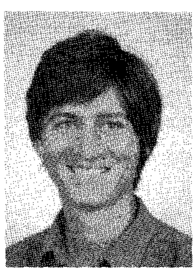
Multivalued logics for diagnosis systems and application to three-valued logics



Alain BONNEMAY

IRDI D. LETI/DEIN/SAI, CEN/SACLAY, 91191 GIF-SUR-YVETTE CEDEX.

Alain Bonnemay est Docteur ès Sciences Physiques depuis 1968 et professeur à l'INSTN. Il est chargé au sein du D. LETI/DEIN d'une mission de recherche sur les réseaux neuronaux. Il assure en outre un enseignement d'IA à l'ESE et dans un DEA de Paris-XI.



François TERRIER

CEA-CEN/SACLAY, IRDI/D.LETI/DEIN/SAI, 91191 GIF-SUR-YVETTE CEDEX.

François Terrier est Docteur en Sciences Physique depuis 1987. Il est entré il y a 1 an au Commissariat à l'Énergie Atomique à l'IRDI/D.LETI où il effectue des travaux de recherche et développement sur les systèmes de diagnostic temps réel appliqués aux centrales nucléaires. Il effectue en liaison avec ces travaux de recherche, des cours sur l'Intelligence Artificielle au DEA d'électronique, option traitement de l'information, à l'Université d'Orsay, Paris-XI.

RÉSUMÉ

Ce texte présente une procédure de traitement des incertitudes dans les systèmes experts, généralisant la théorie des possibilités et levant certaines contradictions qui résultent de l'utilisation de cette dernière. Une interprétation trivalente est décrite.

MOTS CLÉS

Logique multivalente, logique ternaire, théorie des possibilités systèmes experts.

SUMMARY

This paper presents a method for uncertainities processing in expert systems. It extends possibility theory, avoiding some inconsequencies which come from its application. A derived three valued logic is described.

KEY WORDS

Multivalued logics, three-valued logics, possibility theory, expert systems.

[1] Communication présentée à « International Conférence IPMU », ENST, 28.06.86, Paris, CEA-CONF.

1. Introduction

1.1. LES SOURCES

L'intérêt d'études sur la prise en compte des incertitudes dans les systèmes experts n'est plus à établir. Depuis ces tartes à la crème de l'intelligence artificielle que sont MYCIN et PROSPECTOR jusqu'à des études plus récentes [1, 2], mais aussi plus mathématiques, le problème de la gestion de données, voire de règles incertaines a été constamment posé.

Seules les bases mathématiques sont développées dans ce texte, qui sera suivi d'un document décrivant la mise en œuvre informatique des résultats théoriques acquis.

1.2. LES LIGNES DIRECTRICES DE L'ÉTUDE

Le but du travail est de décrire et de traiter le fait qu'une information fournie à un système expert, que ce soit un fait ou une règle, est éventuellement entâchée d'incertitude.

Il convient donc de préciser les points suivants:

– Comment l'expert va-t-il décrire, c'est-à-dire informer l'ordinateur de ses connaissances et éventuellement de ses doutes?

– Comment l'ordinateur va-t-il traiter ces informations nuancées?

– Sous quelle forme les conclusions seront-elles communiquées à l'utilisateur?

Ces trois points vont être successivement examinés.

2. Description de l'incertitude: valuation d'un énoncé

2.1. DÉFINITIONS

Soit X un ensemble fini d'objets sur lesquels porte l'expertise et un énoncé instancié sur X par un ou plusieurs arguments et valués par une fonction ε, définie sur $\mathscr{P}$ et à valeurs dans un carré $(0,1)\times(0,1)$:

$$\varepsilon=(\alpha, \delta)$$

α est l'indice d'affirmation;

δ est l'indice de dénégation

Cas particulier: ε est une possibilité si et seulement si:

$$\max(\alpha, \delta)=1$$

On notera l'ensemble des possibilités par π^∞. Cette notation se justifie en remarquant que:

$$\max(\alpha, \delta)=\|\varepsilon\|_\infty$$

ou $\|.\|_\infty$ désigne la norme de Tchebitchev.

On subdivise π^∞ en deux parties:

ensemble des couples tels que $\alpha=1$;

ensemble des couples tels que $\delta=1$.

Cette présentation permet d'englober comme des cas particuliers la théorie des possibilités [3], qui formalise, à quelques détails près, les techniques de traitement des incertitudes utilisées dans MYCIN et dans PROSPECTOR. Un autre sous-ensemble intéressant est celui des couples tels que:

$$\alpha+\delta=1$$

On le notera π^1, par allusion à la norme de Holder Minkowski d'ordre 1: $|\alpha|+|\delta|=1$.

C'est l'ensemble des probabilités.

2.2. LA NÉGATION

Soit P un énoncé,

$$\varepsilon(P)=(\alpha(P), \delta(P))$$

sa valuation. On posera par définition:

$$\varepsilon(\neg P)=(\delta(P), \alpha(P))$$

Cette relation s'explicite en:

$$\alpha(\neg P)=\delta(P)$$
$$\delta(\neg P)=\alpha(P)$$

Elle implique donc qu'un énoncé P est valué par:

$$\varepsilon(P)=(\alpha(P), \alpha(\neg P))$$

Remarque: si P est une possibilité, $\neg$ P est une possibilité. Si P est une probabilité, $\neg$ P est une probabilité.

La définition de la négation que nous avons posée ne coïncide avec la définition usuelle en logique floue que sur l'ensemble π^1.

Justification du choix

Il est clair que le mode opératoire choisi dépend des objectifs que l'on se fixe, et qu'il est nécessaire d'expliciter ces derniers.

Une intéressante discussion de ce problème est donnée dans [1] au chapitre 3, p. 77sq.

On exige que la négation soit strictement décroissante, involutive, et continue.

En outre, elle doit bien sûr, en logique binaire, redonner les résultats classiques.

Elle peut se comprendre comme une extension de la définition de la théorie des possibilités au pavé $[0, 1]\times[0, 1]$.

On peut noter que la négation est involutive:

$$\varepsilon(\neg\neg P)=\varepsilon(P)$$

ou, comme nous le noterons par un abus de notation sans conséquence:

$$\neg\neg\,\varepsilon(P)=\varepsilon(P)$$

On notera toutefois que, contrairement à la logique binaire usuelle, la relation:

$$\varepsilon(P)=\varepsilon(\neg P)$$

admet des solutions: il suffit que l'énoncé P vérifie $\alpha(P)=\delta(P)$.

De tels énoncés seront dits *indéterminés*.

Enfin, si l'on restreint le domaine d'application à π^1 ou à π^∞, on retrouve la négation probabiliste et la négation possibiliste.

3. Conjonction et disjonction

Posons :

$$\varepsilon(P \wedge Q) \overset{\Delta}{=} \varepsilon(P) \wedge \varepsilon(Q) = (\min(\alpha(P), \alpha(Q)), \max(6(P), \delta(Q)))$$

$$\varepsilon(P \vee Q) \overset{\Delta}{=} \varepsilon(P) \vee \varepsilon(Q) = (\max(\alpha(P), \alpha(Q)), \min(\delta(P), \delta(Q)))$$

Il découle des propriétés du min et du max que :

$\wedge$, $\vee$ sont commutatifs, associatifs, involutifs, et réciproquement distributifs;

$\vee$ admet (0, 1) comme élément neutre et (1, 0) comme élément absorbant. La double distributivité implique alors que (1, 0) est neutre pour $\wedge$ et que (0, 1) est absorbant pour ce même opérateur.

Les démonstrations complètes sont données dans, par exemple [4].

Remarquons que :

$$\varepsilon(P \wedge \neg P) = (\min(\alpha(P), \delta(P)), \quad \max(\delta(P), \alpha(P)))$$

puisque :

$$\varepsilon(\neg P) = (\delta(P), \alpha(P))$$

Il en résulte que :

$$\varepsilon(P \wedge \neg P) = \varepsilon(P) \quad \text{ssi} \quad \alpha(P) \leqq \delta(P)$$
$$\varepsilon(P \wedge \neg P) = \varepsilon(\neg P) \quad \text{ssi} \quad \alpha(P) \geqq \delta(P)$$

On constate que le principe du tiers-exclu et son dual qui est le principe de non-contradiction, ne sont vérifiés que sur le sous-ensemble $\{(1,0), (0,1)\}$ Ceci nous autorise à identifier ce dernier à l'ensemble booléen. Il en résulte aussi que la structure induite par nos opérations n'est pas une « algèbre » au sens formel. Nous utiliserons toutefois ce mot pour la désigner.

On prouve de plus sans difficultés que dans le cadre d'une logique monotone (*cf.* Annexe 1), le théorème de De Morgan est vérifié. Il est montré dans [6] que les opérateurs choisis sont les seuls qui conservent l'ensemble des propriétés citées.

Existence de générateurs

Zadeh [5] et Kaufmann [4] avaient proposé une extension formelle des opérateurs de Pierce et Sheffer.

Posons :

$$\varepsilon(P) \downarrow \varepsilon(Q) = (\min(\delta(Q), \delta(P)), \max(\alpha(Q), \alpha(P)))$$
$$\varepsilon(P) \mid \varepsilon(Q) = (\max(\delta(P), \delta(Q)), \min(\alpha(P), \alpha(Q)))$$

Notons d'abord que :

$$\varepsilon(P) \downarrow \varepsilon(P) = \varepsilon(P) \mid \varepsilon(P) = \neg\, \varepsilon(P)$$

La négation étant engendrée, on a, comme en logique booléenne :

$$(\varepsilon(P) \downarrow \varepsilon(Q)) \downarrow (\varepsilon(P) \downarrow \varepsilon(Q)) = \varepsilon(P) \vee \varepsilon(Q)$$

et :

$$\varepsilon(P) \wedge \varepsilon(Q) = \neg(\neg\, \varepsilon(P) \vee \neg\, \varepsilon(Q))$$

Cette relation dérive directement de l'application du théorème de De Morgan à la précédente.

Des formes similaires peuvent être établies pour l'opérateur de Sheffer.

4. Propriétés de l'inférence

4.1. LA RÈGLE CERTAINE

De même que nous avons choisi des formes algébriques des opérateurs *et, ou, non* pour qu'ils conservent un certain nombre de propriétés du cas binaire, nous allons d'abord donner sur l'inférence les propriétés que nous souhaitons conserver.

Tout d'abord, le fait d'inférer ne peut qu'augmenter la détermination de l'énoncé inféré, et cette détermination est au moins égale à celle de l'énoncé inférant.

Si donc on a :

$$P \vdash Q$$

on a, en désignant par $\alpha^+(Q)$ l'indice d'affirmation de Q après inférence :

$$\alpha^+(Q) \geqq \alpha(Q)$$
$$\alpha^+(Q) \geqq \alpha(P)$$

soit encore :

$$\alpha^+(Q) \geqq \max(\alpha(P), \alpha(Q))$$

Un problème de cohérence peut se poser quand plusieurs experts (humains ou informatiques) ou plusieurs règles du même système expert, conduisent à inférer Q.

Les solutions compatibles avec le principe précédemment posé consistent à choisir, si les énoncés P_i sont tous les inférants de Q :

$$\alpha^+(Q) \geqq \max(\alpha(Q), \quad \alpha(P_1), \ldots, \alpha(P_n))$$

Si maintenant, nous exigeons que, dans les cas particuliers des logiques binaire et ternaire, on retrouve les mêmes résultats, la seule solution est :

$$\alpha^+(Q) = \max(\alpha(Q), \quad \alpha(P_1), \ldots, \alpha(P_n))$$

On peut le vérifier sur le cas ternaire en remarquant que Q doit être valué à 1 si et seulement si il l'était antérieurement ou que le premier membre P est lui-même valué à 1.

4.2. LA RÈGLE INCERTAINE

Il est tentant — et quelquefois utile — d'admettre que les règles elles-mêmes sont entâchées d'incertitude et de leur associer, comme pour les éléments de la base de données, un indice d'affirmation. En d'autres termes, une règle n'est pas donnée comme vraie, mais est caractérisée par un nombre compris entre 0 et 1.

On souhaitera bien sûr que:
- pour $\alpha=0$ la règle disparaisse;
- pour $\alpha=1$ elle apparaisse comme certaine.

La conservation du modus ponens (si P et si $P \vdash Q$ alors Q) nous conduit à poser, compte tenu du principe de croissance de la détermination de l'inféré:

$$\alpha^+(Q)=\max(\alpha(Q), \quad \min(\alpha(P), \alpha(P \vdash Q)))$$

L'intérêt que l'on peut trouver à affecter une règle d'un indice d'affirmation est double. D'une part exprimer des relations du type « généralement, les oiseaux volent ». Cet intérêt est limité, et l'utilisation inconsidérée des méthodes de calcul que nous proposons conduirait à admettre: « Or l'autruche est un oiseau, donc l'autruche vole généralement ».

Par contre, une utilisation plus réaliste serait de formaliser rigoureusement des « dépendances », par exemple: « Si une soupape du pressuriseur d'un REP s'est ouverte, il est probable qu'elle ne se refermera pas ».

4.3. Expressions logiques de second membre

La présence de disjonctions dans les seconds membres est un problème tout à fait particulier, discuté dans le cas ternaire dans [1]. Nous ne nous intéresserons ici qu'aux conjonctions.

Supposons donc une règle:

$$\alpha\left(P \vdash \bigwedge_{i=1}^{k} Q_i\right)=1$$

Nous pouvons en tirer:

$$\alpha^+\left(\bigwedge_{i=1}^{k} Q_i\right)=\max\left(\alpha\left(\bigwedge_{i=1}^{k} Q_i\right), \alpha(P)\right)$$

soit encore:

$$\alpha^+\left(\bigwedge_{i=1}^{k} Q_i\right)=\max(\alpha(P), \min_i(\alpha(Q_i)))$$

Le problème qui se pose est l'évaluation de $\alpha^+(Q_i)$ à partir de:

$$\alpha^+(\bigwedge_i Q_i).$$

Nous admettrons les métarègles:

$$\alpha\left(\bigwedge_{i=1}^{k} Q_i \vdash Q_i\right)=1$$

Elle procèdent du simple bon sens ou des axiomes de Heyting, pour les lecteurs plus formalistes, et expriment simplement le fait que si l'on a avéré Q_1 *et* Q_2 *et...* *et* Q_k, alors on a en particulier Q_1 et aussi Q_2...

Il résulte de ces règles que:

$$\alpha^+(Q_j)=\max\left(\alpha(Q_j), \alpha^+\left(\bigwedge_{i=1}^{k} Q_j\right)\right)$$

D'où:

$$\alpha^+(Q_j)=\max(\alpha(Q_j),$$
$$\max(\min(\alpha(Q_i)), \alpha(P)$$
$$=\max(\alpha(Q_j), \alpha(P))$$

puisque:

$$\forall i, \quad \alpha(Q_i) \geq \min_i(\alpha(Q_i))$$

D'où finalement:

$$\alpha^+(Q_j)=\max(\alpha(Q_j), \alpha(P))$$

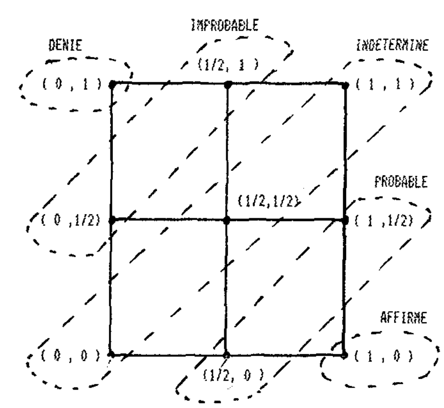
5. Valuation des incertitudes dans une logique à neuf valeurs et formalisme pentavalent

Nous avons jusqu'ici caractérisé un énoncé par le couple (α, δ) où α et δ sont des éléments de l'intervalle $[0, 1]$.

Il est clair qu'il n'est pas toujours nécessaire, pour valuer un énoncé entâché d'incertitudes, de disposer de tout le pavé $[0, 1] \times [0, 1]$. En fait, tout sous-ensemble de $[0, 1]^2$ ayant une structure de treillis (*cf.* Annexe 2) relativement aux opérations $\wedge$, $\vee$ peut constituer un ensemble de valuation.

Cette démarche que nous avions suivie dans la construction d'une logique ternaire, *cf.* [7] peut de nouveau être utilisée.

Considérons le treillis $\{0, 1/2, 1\}^2$.



Les neuf points peuvent se répartir en cinq classes que l'on appellera respectivement:

DENIE
IMPROBABLE
INDETERMINE
PROBABLE
AFFIRME

Ce classement se réfère aux propriétés des points de référence relativement au tiers-exclu.

DENIE et AFFIRME le vérifient

IMPROBABLE vérifie :

$$\varepsilon(P \vee \neg P) = \varepsilon(\neg P) \neq \varepsilon(P)$$

PROBABLE vérifie :

$$\varepsilon(P \vee \neg P) = \varepsilon(P) \neq \varepsilon(\neg P)$$

INDETERMINE vérifie :

$$\varepsilon(P \vee \neg P) = \varepsilon(P) = \varepsilon(\neg P)$$

Ce classement permet d'interpréter les résultats, mais ne constitue pas pour autant une logique pentavalente, il suffit de vérifier que :

PROBABLE *et* PROBABLE

ne donne pas toujours le même résultat.

Conclusion

Résumons brièvement les acquis de cette théorie.

Un énoncé incertain P est décrit par deux nombres positifs inférieurs à 1 : $\alpha(P)$, $\alpha(\neg P)$.

L'opération *et* (notée $\wedge$) est réalisée par :

$$\alpha(P \wedge Q) = \min(\alpha(P), \alpha(Q))$$

L'opération *ou* (notée $\vee$) est réalisée par :

$$\alpha(P \vee Q) = \max(\alpha(P), \alpha(Q))$$

Ces deux opérations sont reliées par la relation de De Morgan :

$$\alpha(\neg(P \wedge Q)) = \alpha(\neg P) \vee \alpha(\neg Q)$$
$$\alpha(\neg(P \vee Q)) = \alpha(\neg P) \wedge \alpha(\neg Q)$$

ou $\neg$ désigne la négation.

Les générateurs NAND (opérateur de Sheffer) et NOR (Opérateur de Pierce) existent et conservent leurs propriétés.

A une règle $(P \vdash Q)$ est associé un indice d'affirmation $\alpha\,(P \vdash Q)$.

6. Application à la logique ternaire

6.1. Justification

Initialement, l'introduction d'un troisième état, dans la formalisation d'énoncés devant être déterminés « VRAI » ou « FAUX », a été intéressante surtout par la possibilité qu'elle donne d'associer à tout instant un état à une expression logique, et par là d'en faire une évaluation par un simple calcul algébrique.

Cette démarche bien qu'étant apparemment un artifice de calcul, résulte de l'observation suivante : à un instant donné, une expression logique contenant des inconnues est susceptible d'être soit « affirmée » (VRAI), soit « déniée » (FAUX), soit encore « indéterminée ».

Cette remarque est particulièrement adaptée à la réalité des systèmes experts ou par construction certains atomes peuvent n'être déterminés qu'après utilisation d'une règle, et sont donc pendant un temps complètement indéterminés.

6.2. Opérations de base

Les opérateurs et propriétés d'une logique trivalente ont été donnés en [7, 8, 9].

Les opérateurs utiles pour la suite sont rappelés par les tables suivantes.

L'application de cette démarche permet de formaliser la notion d'inférence en la représentant par une fonction de la logique trivalente, aisément programmable, et c'est là aussi une partie de son intérêt.

De manière générale, on modélisera les inférences d'un jeu de règles quelconque, pour chaque atome de conclusion, Q, par l'instruction suivante :

$$Q_{n+1} = [Q_0 \wedge \neg L(\bigvee_{P_i \in E} P_i)] \vee L(\bigvee_{E_{aff}} P_{aff}) \vee \left(\frac{1}{2} \wedge L(\bigvee_{E_{ind}} P_{ind})\right)$$

P		$\neg$ P	LP
Affirmé	1	0	1
Indéterminé	1/2	1/2	0
Dénié	0	1	0

P $\vee$ Q

P \ Q	1	1/2	0
1	1	1	1
1/2	1	1/2	1/2
0	1	1/2	0

P $\wedge$ Q

P \ Q	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1/2	1/2	0
0	0	0	0

La forme générale de l'inférence est :

$$\alpha^+(Q) = \max(\alpha(Q), \min(\alpha(P_1), \alpha(P_1 \vdash Q)), \ldots, \min(\alpha(P_n), \alpha(P_n \vdash Q)))$$

où $P_1 \ldots P_n$ sont tous les énoncés tels que : $\alpha(P_i \vdash Q) \neq 0$.

Ces règles permettent d'écrire un langage expert, ce qui sera fait dans une prochaine étape du travail.

Les énoncés P, Q sont identifiés à leur état logique.

Une règle sera de la forme :

« Si $\langle$expression logique$\rangle$ alors Q = état, sinon $Q = Q_0$ ».

La partie « sinon $Q = Q_0$ » étant souvent omise et prise par défaut, la valeur dépendant alors de la logique employée (en général : $Q_0 = Q_n$, valeur précédente de la conclusion Q, si Q était inconnue alors $Q_0 = 1/2$).

Q_0 : valeur à donner à Q si aucune expression de E n'est validée.

E: ensemble des expressions logiques de premier membre permettant d'inférer Q à l'état « affirmé », ou « indéterminé », ou « dénié ».

E_{aff}: ensemble des expressions logiques de premier membre permettant d'inférer Q à l'état « affirmé ».

E_{ind}: ensemble des expressions logiques de premier membre permettant d'inférer Q à l'état « indéterminé ».

Manuscrit reçu le 1er décembre 1986.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Farreny et Prade, *Mécanisation de raisonnements* in *Matériels et logiciels pour la 5e génération*, 5-7 mars 1985, Congrès AFCET.

[2] Kodratoff, Communication au *Congrès AFCET Matériels et logiciels pour la 5e génération*, 5-7 mars 1985.

[3] Dubois et Prade, *Théorie des possibilités*, Masson, 1985.

[4] Kaufmann, *Théorie des sous-ensembles floux à l'usage des ingénieurs*, 1, chap. III.

[5] Zadeh, Fuzzy sets and systems, *Inform. and Control*, 8, 06-1965, p. 338-352.

[6] J. Aczel, *Lectures on functional equations and their applications*, Ac. Press, NY, 1966.

[7] Bonnemay, Terrier et Descamps, Logique ternaire et intelligence artificielle, Rapport CEA-R 5317.

[8] Lukasiewicz, Elements of mathematical logics, *Int. Series of monographes on pure and applied math*, n° 31, Pergamon Press, 1963.

[9] M. Wajsberg, *Logical works*, Wroclaw, Bibliothèque Nationale, cote BN, n° 5, 1977, 15874.

Annexe

Axiomatique de l'incertitude

Propriétés fondamentales et définitions:

Soit E un ensemble. $\mathscr{P}$ un treillis $(\cup, \cap)$ dans $\mathscr{P}(E)$ tel que $\varnothing \in \mathscr{P}$ et soit M l'élément maximal:

$$M = \{ x \in E / \exists A \in \mathscr{P}, x \in A \}$$

Soit $\mathscr{L}$ un sous-ensemble de [0, 1], tel que $0 \in \mathscr{L}$, $1 \in \mathscr{L}$, doté de l'ordre total des réels.

Soit α un morphisme $(\mathscr{P}, \subset) \to (\mathscr{L}, \leqq)$, δ un morphisme $(\mathscr{P}, \subset) \to (\mathscr{L}, \geqq)$.

On supposera que α et δ vérifient en outre:

α et δ sont valués sur $\mathscr{L}$;

$$\alpha(\varnothing) = 0; \qquad \delta(M) = 0,$$
$$\alpha(M) = 1; \qquad \delta(\varnothing) = 1$$

On dira que $A \in \mathscr{P}$ est une éventualité, $\alpha(A)$ son indice d'affirmation $\delta(A)$ son indice de dénégation. La valuation logique de A est par définition:

$$\varepsilon(A) = (\alpha(A), \delta(A))$$

Soit

$$\lambda \in \mathscr{L}^2; \qquad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2);$$
$$\mu \in \mathscr{L}^2; \qquad \mu = (\mu_1, \mu_x)$$

lorsque

$$\lambda_1 \geqq \mu_1, \qquad \lambda_2 \leqq \mu_2$$

nous dirons que la valuation λ, à la fois plus affirmée et moins déniée que λ est *plus vraisemblable* que μ ce que nous noterons:

$$\lambda \rhd \mu$$

Il découle des définitions:

$$A \subset B \;\Rightarrow\; \varepsilon(A) \quad \varepsilon(B)$$

et par conséquent:

$$\varepsilon(A \cup B) \rhd (\max(\alpha(A), \alpha(B)), \min(\delta(A), \delta(B)))$$
$$\varepsilon(A \cap B) \lhd (\min(\alpha(A), \alpha(B)), \max(\delta(A), \delta(B)))$$

Hypothèses:

(1) $\forall A \in \mathscr{P}$, $\forall \lambda \rhd \varepsilon(A)$; $\exists A' \in \mathscr{P}: \varepsilon(A') = \lambda$, $A' \supset A$.

(2) Considérons maintenant la relation de vraisemblance définie ci-dessus. C'est un préordre partiel, et comme tel, il définit sur $\mathscr{P}$ des classes d'équivalence notées $\varepsilon^-(\lambda)$; $\lambda \in \mathscr{L}^2$.

Nous poserons *l'hypothèse*:

$\varepsilon(A) = \varepsilon(A')$;

$\varepsilon(B) = \varepsilon(B')$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon(A \cup B) = \varepsilon(A' \cup B')$$
$$\Rightarrow \quad \varepsilon(A \cap B) = \varepsilon(A' \cap B')$$

Cette hypothèse peut se réécrire, en notant par C_A, C_B, $C_{A \cup B}$, $C_{A \cap B}$ les classes qui contiennent respectivement A, B, $A \cup B$, $A \cap B$:

$$\{ A' \cup B' / A' \in C_A, B' \in C_B \} \subset C_{A \cup B}$$
$$\{ A' \cap B' / A' \in C_A, B' \in B \} \subset C_{A \cap B}$$

Notons $\mathscr{U}(A, B)$ l'application définie sur $\mathscr{P}^2$ et valuée sur $\mathscr{L}^2$ qui a (A, B) associe $\varepsilon(A \cup B)$. Soit de même $\mathscr{I}(A, B)$ celle qui à (A, B) associe $\varepsilon(A \cap B)$.

On montre que:

$$\mathscr{U} = \varepsilon \circ u$$
$$\mathscr{I} = \varepsilon \circ i$$

où u et i sont des lois de composition interne sur $\mathscr{L}$. C'est une conséquence de l'hypothèse (2).

De plus, u admet (0, 1) pour élément neutre et (1, 0) pour élément absorbant:

$$u(\varepsilon(A), \varepsilon(B)) = \varepsilon(A \cup B)$$

et

$$A \varnothing \;\Rightarrow\; \varepsilon(A) = (0, 1)$$
$$\Rightarrow\; A \cup B = B$$
$$\Rightarrow\; D B \in \mathscr{P},$$
$$u((0, 1), \varepsilon(B)) = \varepsilon(B)$$
$$\Leftrightarrow\; D \lambda \in \mathscr{L}^2, \qquad u((0, 1), \lambda) = \lambda$$

De même :

$$u(\varepsilon(\mathrm{M}), \varepsilon(\mathrm{B})) = \varepsilon(\mathrm{M} \cup \mathrm{B}) = \varepsilon(\mathrm{M})$$

et

$$\varepsilon(\mathrm{M}) = (1, 0) \quad \forall \lambda \in \mathscr{L}^2,$$
$$u((1, 0), \lambda) = (1/0)$$

De façon similaire, on montre que $i(.,.)$ admet (0, 1) pour élément neutre et (0, 1) pour élément absorbant.

u et i sont évidemment commutatives, et de la double distributivité de $\cup$, $\cap$ on déduit celle de u et i.

De plus, u et i sont idempotents.

Notons enfin que u est isotone et i antitone pour .

Démonstration: Soient $u(\lambda, \lambda')$, $u(\lambda, \lambda'')$ et λ' λ''.

On a aloes :

$$\varepsilon^-(\lambda') \neq \varnothing \quad \text{(surjectivité)}$$
$$\varepsilon^-(\lambda'') \neq \varnothing$$

et

$$\lambda' \rhd \lambda'' \Rightarrow \exists \mathrm{A}' \in \varepsilon^-(\lambda'),$$
$$\mathrm{A}'' \in \varepsilon^-(\lambda''), \qquad \mathrm{A}' \supset \mathrm{A}''$$

(hypothèse 1).

D'où, en introduisant $\mathrm{A} \in \varepsilon^-(\lambda)$

$$u(\lambda, \lambda') = u(\varepsilon(\mathrm{A}), \varepsilon(\mathrm{A}')) = u(\varepsilon(\mathrm{A} \cup \mathrm{A}'))$$
$$u(\lambda, \lambda'') = u(\varepsilon(\mathrm{A}), \varepsilon(\mathrm{A}'')) = u(\varepsilon(\mathrm{A} \cup \mathrm{A}''))$$

et

$$\mathrm{A} \cup \mathrm{A}' \supset \mathrm{A} \cup \mathrm{A}'' \Rightarrow \varepsilon(\mathrm{A} \cup \mathrm{A}') \rhd \varepsilon(\mathrm{A} \cup \mathrm{A}'')$$

D'où

$$u(\lambda, \lambda') \rhd u(\lambda, \lambda'')$$

[démonstration similaire pour $i(.,.)$].

Négation et principe de dualité

Soit $\lambda = (\alpha, \delta) \in \mathscr{L}^2$. On dira que $\bar{\lambda} = (\delta, \alpha)$ est son élément dual, et on définira la négation d'une classe d'éventualités par :

$$\varepsilon(\mathrm{A}) = \lambda \Leftrightarrow \varepsilon(\bar{\mathrm{A}}) = \bar{\lambda}$$

où encore :

$$\mathrm{A} \in \varepsilon^-(\lambda) \Leftrightarrow \bar{\mathrm{A}}\, 1\, \varepsilon^-(\bar{\lambda}) \Rightarrow \lambda = \bar{\bar{\lambda}}$$

Soient :

$$A \in \varepsilon^-(\lambda), \qquad \mathrm{B} \in \varepsilon^-(\lambda')$$
$$\bar{\mathrm{A}} \in \varepsilon^-(\bar{\lambda}), \qquad \bar{\mathrm{B}} \in \varepsilon^-(\bar{\lambda}') \Rightarrow \bar{\mathrm{A}} \cup \bar{\mathrm{B}} \in \varepsilon^-(u(\bar{\lambda}, \bar{\lambda}')$$
$$\overline{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}} \in \varepsilon^-(\overline{i(\lambda, \lambda')})$$

Nous poserons le *principe de dualité* :

$$u(\bar{\lambda}, \bar{\lambda}') = \overline{i(\lambda, \lambda')};$$
$$i(\bar{\lambda}, \bar{\lambda}') = \overline{u(\lambda, \lambda')}$$

qui est une extension de la règle de De Morgan.

DÉFINITION : Une éventualité A est indéterminée si et seulement si :

$$\alpha(\mathrm{A}) = \delta(\mathrm{A})$$

[forme équivalente : $\mathrm{A} \in \varepsilon^-(\overline{\varepsilon(\mathrm{A})})$].

Cas particulier : théorie des possibilités de Zadeh

Supposons que $\mathscr{P}$ soit une tribu borélienne : alors $\varnothing \in \mathscr{P} \Rightarrow \mathrm{E} \in \mathscr{P}$ et $\mathrm{M} = \mathrm{E}$.

Soit α, morphisme croissant de $\mathscr{P} \to \mathscr{L}$ et

$$\delta(\mathrm{A}) = \alpha(\mathrm{E} \setminus \mathrm{A})$$

On a :

$$\alpha(\mathrm{A} \cup \mathrm{E} \setminus \mathrm{A}) \geqq \max(\alpha(\mathrm{A}), \alpha(\mathrm{E} \setminus \mathrm{A}))$$

En identifiant $u(.,.)$ à max $(.,.)$ et $i(.,.)$ à min $(.,.)$; on a :

$$\max(\alpha(\mathrm{A}), \alpha(\mathrm{E} \setminus \mathrm{A})) = 1$$

et compte tenu de :

$$\delta(\mathrm{A}) = \alpha(\mathrm{E} \setminus \mathrm{A})$$
$$\alpha(\mathrm{A}) = \delta(\mathrm{E} \setminus \mathrm{A})$$

on a :

$$\mathrm{E} \setminus \mathrm{A} \in \varepsilon^-(\overline{\varepsilon(\mathrm{A})}),$$

$\mathrm{E} \setminus \mathrm{A}$ est une négation de A.

Une forme particulière

Supposons maintenant que :

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2); \qquad \lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2)$$
$$u(\lambda, \lambda') = (u_1(\lambda_1, \lambda'_1), u_2(\lambda_2, \lambda'_2))$$
$$i(\lambda, \lambda') = (i_1(\lambda_1, \lambda'_1), i_1(\lambda_2, \lambda'_2))$$

Il résulte du principe de dualité que :

$$u_1(\lambda_2, \lambda'_2) = i_2(\lambda_2, \lambda'_2)$$
$$u_2(\lambda_1, \lambda'_1) = i_1(\lambda_1, \lambda'_1)$$

On montre aisément à partir des résultats précédents que u_1 et i_1 sont commutatives, associatives, et réciproquement distributives. Elles s'identifient sur (0, 1) aux fonctions logiques ordinaires *ou* et *et* de la logique booléenne, vérifient le théorème de De Morgan et sont monotones par rapport à leurs arguments.

Elles s'identifient donc (*cf.* Aczel [6]) aux opérateurs max et min.

On a donc :

$$u(\lambda, \lambda') = (\max(\lambda_1, \lambda'_1), \min(\lambda_2, \lambda'_2))$$
$$i(\lambda, \lambda') = (\min(\lambda_2, \lambda'_2), \max(\lambda_2, \lambda'_2))$$

Annexe 2

Treillis sur $[0, 1]^2$

L'ensemble des couples $\varepsilon=(\alpha, \delta)$ est doté par les opérateurs $\wedge$ et $\vee$ d'une structure de treillis. $\wedge$ et $\vee$ sont en effet associatifs; commutatifs, idempotents et :

$$\max(\alpha_1, \min(\alpha_1, \alpha_2))=\alpha_1$$
$$\min(\alpha_1, \max(\alpha_1, \alpha_2))=\alpha_2$$

d'où la propriété d'absorption :

$$\varepsilon_1 \wedge (\varepsilon \wedge \vee \varepsilon_2)=\varepsilon_1$$
$$\varepsilon_1 \vee (\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2)=\varepsilon_1$$

Le treillis ainsi construit est évidemment doublement distributif.

Tous les ensembles fermés de la forme $\mathscr{V} \times \mathscr{V}$ sont des treillis.