

L'identification de fronts d'ondes corrélés et distordus

Identification of correlated and distorted wavefronts



Jacques MUNIER

Centre d'Étude des PHénomènes Aléatoires et Géophysiques, (CEPHAG), École Nationale Supérieure d'Ingénieurs Électriciens de GRENOBLE, BP n° 46, 38402 Saint-Martin-d'Hères.

Directeur de recherche du CNRS au CEPHAG. Domaine de recherche : Traitement d'antenne, modèles de propagation en acoustique aérienne ou sous-marine, analyse paramétrique de signaux.

RÉSUMÉ

Les méthodes d'analyse spatiale développées depuis 2 décennies reposent sur des hypothèses contraignantes qui ne sont généralement pas respectées en pratique et, par suite, donnent des résultats souvent décevants; il s'agit notamment des hypothèses de non-corrélation entre sources, de planéité des fronts d'ondes et d'identité des capteurs. Classiquement, l'estimation des paramètres des sources est basée sur l'information contenue dans les valeurs et vecteurs propres de la matrice interspectrale des signaux captés. Partant des propriétés de cette matrice, on montre dans cet article qu'il existe une variante de la méthode des éléments propres, fondée sur la relation de dépendance linéaire existant entre les lignes de la matrice-sources. L'examen des diverses causes de perte de performance met en évidence l'intérêt d'une identification aussi complète que possible des fronts d'ondes distordus. Un nouvel algorithme est proposé *in fine*, permettant d'estimer les phases des éléments des vecteurs-sources, sous l'hypothèse de modules égaux.

MOTS CLÉS

Traitement d'antenne, analyse spatiale, fronts d'ondes distordus, matrice interspectrale.

SUMMARY

Over the past 2 decades, the spatial analysis methods developed were based upon restricting hypotheses that are not fulfilled in practical cases and, therefore, often yield disappointing results. This is particularly true when uncorrelated sources, plane wavefronts and identical sensors hypotheses are introduced. In a classical approach, source parameters estimates are obtained using the information contained in the eigenvalues and eigenvectors of the received signals cross-spectral matrix. Making use of the properties of this matrix, an alternate version of the eigensystem method based upon the linear dependency between the source-matrix rows is shown to exist. A deep insight into the causes of performance loss clearly shows an interest for an estimation as complete as possible of the distorted wavefronts. Letting the modules of the sources-vectors elements being equal, a new algorithm which permits the estimation of their phases is finally adressed.

KEY WORDS

Antenna processing, spatial analysis, distorted wavefronts, cross-spectral matrix, sources subspace.

1. Principes et limitations des méthodes d'analyse spatiale

Le but de l'analyse spatiale au second ordre est de localiser des sources rayonnantes, à partir des signaux reçus par un réseau de capteurs, et d'estimer leurs intensités de rayonnement à une fréquence donnée ou

dans une bande étroite de fréquence. Si les ondes incidentes sont planes et les capteurs identiques, alignés et équidistants, si de plus les sources ne sont pas corrélées, le problème est formellement identique à celui de l'analyse spectrale à partir d'échantillons périodiques du signal temporel, l'identification de sources ponctuelles étant équivalente à celle de raies spectrales. Le modèle de vecteur-signal unitaire est

alors de la forme

$$(1) \quad \mathbf{u}(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{N}} [1, e^{j\varphi}, \dots, e^{j(N-1)\varphi}]^T,$$

N étant le nombre d'échantillons temporels en spectral et le nombre de capteurs en spatial; dans ce dernier cas, $\mathbf{u}(\varphi)$ est le vecteur-source unitaire correspondant à une onde incidente plane pour laquelle le déphasage de propagation entre capteurs adjacents est φ .

La méthode classique ancienne d'analyse continue consiste à effectuer un filtrage sélectif en appliquant des pondérations complexes aux éléments du vecteur des signaux observés et en sommant les quantités obtenues, c'est-à-dire finalement en réalisant le produit scalaire de ce vecteur par un certain vecteur de filtrage (complexe conjugué du vecteur des pondérations). Par exemple, en prenant un vecteur de filtrage colinéaire à $\mathbf{u}(\varphi)$, la réponse est maximale pour un vecteur-signal colinéaire à ce même vecteur; c'est la technique des réseaux directifs (ou voies préformées) en spatial. En faisant suivre le filtre par un estimateur de variance et en faisant varier φ de $-\pi$ à $+\pi$, on réalise une analyse continue au second ordre, spectrale ou spatiale selon le cas.

Depuis une quinzaine d'années sont apparues les méthodes d'analyse continue adaptatives, c'est-à-dire dans lesquelles le traitement appliqué est fonction non seulement de la valeur de scrutation φ , mais encore des signaux reçus eux-mêmes : maximum de vraisemblance de Capon, maximum d'entropie ou filtrage auto-régressif [1, 2], Borgiotti [3], Lagunas [4], goniomètre de Bienvenu [5]. En fait, ces méthodes, qui sont basées sur l'hypothèse de non-corrélation entre sources, reviennent à utiliser un système « produit scalaire par un vecteur de filtrage + estimateur de variance », dans lequel le filtrage est fonction de la matrice de covariance des échantillons temporels en spectral et de la matrice interspectrale des signaux captés en spatial [6, 19]; avec le modèle de vecteur-signal défini par (1), ces matrices sont de type Toeplitz. La propriété fondamentale dont dépendent les performances de ces méthodes est que le produit scalaire permet d'éliminer jusqu'à $N-1$ vecteurs composants du signal d'entrée linéairement indépendants (lesquels sont alors orthogonaux au vecteur de filtrage); par suite, en dehors des valeurs de φ correspondant à des raies ou à des sources, supposées en nombre au plus égal à $N-1$, la réponse du système est nulle : on observe donc une résolution infinie. En présence de bruit, la situation se dégrade, mais on l'améliore en retranchant de la matrice de covariance ou interspectrale une matrice de bruit du type $\sigma^2 \mathbf{I}$.

Les propriétés de superrésolution des méthodes adaptatives ont fait leur succès en analyse spectrale; par contre, en analyse spatiale, les résultats sont nettement moins brillants, en raison du non-respect des hypothèses de base, à savoir :

1° le bruit est souvent dû en grande partie à des sources en surnombre qui produisent une matrice de bruit (de type Toeplitz seulement si elles sont à grande distance) de forme très différente de $\sigma^2 \mathbf{I}$;

2° certaines sources peuvent être corrélées, au moins partiellement; c'est le cas des ondes incidentes pro-

venant d'une même source par des trajets multiples; plusieurs trajets corrélés produisent sur le réseau de capteurs une figure d'interférence donnant un vecteur-source résultant non conforme au modèle (1);

3° les fronts d'ondes ne sont pas réellement assimilables à des plans; ils peuvent être sphériques (si les sources ne sont pas à grande distance) et, de plus, ils sont généralement distordus aléatoirement par les inhomogénéités locales du milieu et la diffraction par des obstacles proches;

4° l'antenne est éventuellement déformable;

5° les gains complexes des capteurs ne sont pas strictement identiques.

La non-identité des capteurs, les déformations permanentes de l'antenne et la proximité d'obstacles fixes provoquent, par rapport au modèle, un biais constant des vecteurs-sources. L'identification et la compensation de ce biais sont à considérer comme des préalables indispensables. Par contre, les distorsions dues à la turbulence locale du milieu et aux déformations variables de l'antenne ne peuvent être qu'atténuées par un moyennage de la matrice interspectrale sur un intervalle de temps suffisamment long.

Quant aux distorsions dues aux interférences entre trajets multiples corrélés, ce sont souvent les plus importantes et c'est pourquoi il importe d'identifier séparément toutes les ondes incidentes d'amplitudes significatives, fussent-elles corrélées. Chacune d'entre elles produit alors un vecteur-source conforme au modèle, aux autres causes de distorsion près. On remarquera que les méthodes citées peuvent s'accommoder de modèles de vecteur-source différents de celui défini par (1); le problème réside donc dans les écarts existant entre les vecteurs-sources réels et le modèle choisi.

Parallèlement aux méthodes d'analyse spatiale continue sont apparues les méthodes d'estimation paramétrique basées sur l'information contenue dans les éléments propres de la matrice interspectrale; les notions de sous-espace - sources et de sous-espace - bruit ont été développées et exploitées, notamment par Liggett [7], Mermoz [8], Reddi [9], Bienvenu et Kopp [5, 10], Schmidt [11] et bien d'autres depuis, tout d'abord sous l'hypothèse de sources non corrélées, puis dans le cas général. Une synthèse en a été présentée par Bienvenu et Kopp [12] qui, par ailleurs, en ont montré l'optimalité en un certain sens [10].

La méthode plus ancienne de Pisarenko [13], limitée au cas de sources non corrélées et au seul modèle défini par (1) relève de la même catégorie.

Ces dernières méthodes se sont révélées nettement plus puissantes que celles d'analyse continue, principalement du fait que le sous-espace - sources ne dépend que de la géométrie de l'antenne et des positions spatiales des sources et non de leurs intensités et de leurs corrélations (pour autant que celles-ci ne soient pas totales); elles sont donc applicables à des sources corrélées. D'autre part, Mermoz a évalué le nombre de paramètres libres disponibles du modèle, lequel peut-être beaucoup plus complexe que celui défini par (1). Partant de cette idée, Vezzosi [14, 18] a développé une méthode applicable à des vecteurs-sources dont les éléments ont même module, mais des

phases quelconques, et qui permettrait donc d'identifier des fronts d'ondes distordus.

Dans ce qui suit, nous montrerons qu'il existe une variante à la méthode des éléments propres, puis nous indiquerons le principe d'une résolution paramétrique parfaite dans un cas idéal; nous examinerons ensuite les pertes de performances dues aux trajets multiples, aux sources en surnombre, aux matrices de bruit non Toeplitz et aux distorsions des fronts d'ondes. Nous proposerons pour terminer un algorithme permettant d'identifier les fronts d'ondes non plans.

2. Propriétés de la matrice interspectrale

On considérera le cas idéal où, sur N capteurs, on reçoit les signaux de n sources, en l'absence de bruit, avec $n < N$.

Le vecteur des signaux reçus, à une fréquence donnée, s'écrit

$$(2) \quad \mathbf{v} = \sum_{p=1}^n \alpha_p \mathbf{u}_p \quad (\text{vecteur de dimension } N),$$

l'amplitude complexe α_p étant une variable aléatoire supposée centrée et \mathbf{u}_p un vecteur-source unitaire ($\mathbf{u}_p^+ \mathbf{u}_p = 1$). On peut également écrire

$$(3) \quad \mathbf{v} = \mathbf{U} \boldsymbol{\alpha},$$

$$(4) \quad \begin{cases} \mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n] \\ \boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]^T \end{cases}$$

\mathbf{U} étant la matrice-sources, dont les colonnes sont formées par les vecteurs-sources, et $\boldsymbol{\alpha}$ le vecteur des amplitudes complexes.

L'expression de la matrice interspectrale est alors

$$(5) \quad \Gamma_s = E\{\mathbf{v}\mathbf{v}^+\} = \mathbf{U} E\{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^+\} \mathbf{U}^+,$$

soit

$$(6) \quad \Gamma_s = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{U}^+,$$

$\mathbf{S} = E\{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^+\}$ étant la matrice (n, n) de covariance des amplitudes complexes α_p , c'est-à-dire, en fait, la matrice interspectrale des sources telle qu'on peut l'observer sur un capteur isolé, laquelle est diagonale si les sources ne sont pas corrélées. La matrice \mathbf{S} est hermitienne et définie non négative; on la supposera non singulière, ce qui implique qu'il n'y ait pas de dépendance linéaire entre les α_p , en particulier, qu'il n'y ait pas deux sources totalement corrélées.

La matrice-sources étant partitionnée de la façon suivante

$$(7) \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix}$$

(N, n) (n, n) $(N-n, n)$

si l'on suppose que le modèle de propagation est tel que les lignes (ou colonnes) de \mathbf{X} sont linéairement indépendantes, alors la matrice carrée \mathbf{X} est non singulière et la matrice \mathbf{U} est de rang n . Les colonnes de

\mathbf{U} , c'est-à-dire les vecteurs-sources, sont linéairement indépendantes et engendrent le « sous-espace-sources ». Quant aux $N-n$ lignes de la matrice \mathbf{Y} , elles sont linéairement dépendantes des n premières, ce qu'on écrira

$$(8) \quad \mathbf{Y} = \mathbf{P} \mathbf{X},$$

\mathbf{Y} et \mathbf{P} étant de dimension $(N-n, n)$.

En utilisant (6), (7) et (8), on obtient

$$(9) \quad \Gamma_s = \begin{bmatrix} \mathbf{X} \mathbf{S} \mathbf{X}^+ & \mathbf{X} \mathbf{S} \mathbf{X}^+ \mathbf{P}^+ \\ \mathbf{P} \mathbf{X} \mathbf{S} \mathbf{X}^+ & \mathbf{P} \mathbf{X} \mathbf{S} \mathbf{X}^+ \mathbf{P}^+ \end{bmatrix}.$$

En posant

$$(10) \quad \Gamma_s = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^+ \\ \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{bmatrix}$$

(n) $(N-n)$ (n) $(N-n)$

on obtient

$$(11) \quad \mathbf{B} = \mathbf{P} \mathbf{A},$$

ce qui donne, considérant la non-singularité des matrices \mathbf{X} et \mathbf{S} et, par suite, de \mathbf{A} , la relation suivante permettant de calculer l'opérateur \mathbf{P} à partir des éléments de la matrice interspectrale

$$(12) \quad \mathbf{P} = \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1}.$$

\mathbf{P} est appelé « opérateur de propagation » par Spitz [15].

Sous les hypothèses admises, la matrice interspectrale Γ_s est de rang n et a donc une valeur propre nulle de multiplicité $N-n$. Son expression en fonction de ses éléments propres est

$$(13) \quad \Gamma_s = \mathbf{V}_n \boldsymbol{\Lambda}_n \mathbf{V}_n^+,$$

$$(14) \quad \mathbf{V}_n = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n], \quad \boldsymbol{\Lambda}_n = \text{diag} [\lambda_i],$$

(N, n) (n, n)

les colonnes de la matrice \mathbf{V}_n étant formées par les vecteurs propres associés aux n valeurs propres non nulles, lesquelles forment la diagonale de $\boldsymbol{\Lambda}_n$.

Les vecteurs propres sont orthonormés, ce qui entraîne les propriétés suivantes

$$(15) \quad \mathbf{V}_n^+ \mathbf{V}_n = \mathbf{I}_n \quad (\text{matrice identité } n, n),$$

$$(16) \quad \mathbf{V}_n \mathbf{V}_n^+ \Gamma_s = \mathbf{V}_n \mathbf{V}_n^+ \mathbf{V}_n \boldsymbol{\Lambda}_n \mathbf{V}_n^+ = \mathbf{V}_n \boldsymbol{\Lambda}_n \mathbf{V}_n^+ = \Gamma_s.$$

Posons :

$$(17) \quad \mathbf{R} = \mathbf{I}_N - \mathbf{V}_n \mathbf{V}_n^+ = \mathbf{I}_N - \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^+,$$

(N, N)

et soit \mathbf{x} un vecteur de dimension N appartenant à l'espace-colonne de \mathbf{V}_n (c'est-à-dire au sous-espace engendré par les vecteurs propres \mathbf{v}_1 à \mathbf{v}_n); le vecteur \mathbf{x} est donc orthogonal au noyau de Γ_s et il peut s'exprimer par une combinaison linéaire des \mathbf{v}_i ($i \in [1, n]$), soit

$$(18) \quad \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{v}_i, \quad a_i = \mathbf{v}_i^+ \mathbf{x}.$$

Alors on a :

$$(19) \quad \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i^+ \mathbf{x} \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^+ \mathbf{x} = \mathbf{V}_n \mathbf{V}_n^+ \mathbf{x},$$

$$(20) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R} \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Donc, tout \mathbf{x} orthogonal au noyau de Γ_s appartient au noyau de \mathbf{R} (qui est de dimension n); la réciproque se vérifie aisément. Cette orthogonalité pourrait être exprimée au moyen des vecteurs propres $\mathbf{v}_{n+1}, \dots, \mathbf{v}_N$, mais ceux-ci ne peuvent être définis par la relation $\Gamma_s \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ (sauf si le noyau est de dimension 1). De nombreux auteurs procèdent néanmoins ainsi, du moins dans des cas où les valeurs propres $\lambda_{n+1}, \dots, \lambda_N$ ne sont pas strictement nulles ou égales entre elles, mais il faut noter que, si ces valeurs propres sont très voisines, la détermination des vecteurs propres correspondants est imprécise.

La matrice \mathbf{R} a la propriété suivante, obtenue en utilisant (16)

$$(21) \quad \mathbf{R} \Gamma_s = \Gamma_s - \mathbf{V}_n \mathbf{V}_n^+ \Gamma_s = \mathbf{0}$$

et si on pose

$$(22) \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & \mathbf{R}_2 \\ (n) & (N-n) \end{bmatrix}^{(N)},$$

on obtient, d'après (10), (11) et (21), la relation suivante

$$(23) \quad \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 \mathbf{P} = \mathbf{0}.$$

D'autre part, on a

$$(24) \quad \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{R}_1 \mathbf{X} + \mathbf{R}_2 \mathbf{Y} = \mathbf{R}_1 \mathbf{X} + \mathbf{R}_2 \mathbf{P} \mathbf{X},$$

ce qui donne, compte tenu de (23)

$$(25) \quad \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{0}.$$

Cette relation exprime l'orthogonalité des n vecteurs-sources avec le noyau de la matrice interspectrale; ces vecteurs appartiennent donc à l'espace-colonne de \mathbf{V}_n , c'est-à-dire qu'il y a identité entre cet espace et le sous-espace - sources. Cette propriété fondamentale a été utilisée par la grande majorité des auteurs; elle nécessite la connaissance des vecteurs propres de Γ_s . On remarquera qu'il est équivalent d'utiliser la relation de dépendance linéaire (8) entre les lignes de la matrice-sources, laquelle nécessite la connaissance de l'opérateur \mathbf{P} , identifiable à partir de la matrice interspectrale d'après (12). La relation (8) peut être remaniée de la façon suivante; en posant

$$(26) \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & -\mathbf{I} \\ (N-n, N) & (N-n, N-n) \end{bmatrix},$$

la relation (8), qui s'écrit $\mathbf{P} \mathbf{X} - \mathbf{Y} = \mathbf{0}$, devient

$$(27) \quad \mathbf{Q} \mathbf{U} = \mathbf{0},$$

la matrice nulle au second membre ayant pour dimension $(N-n, n)$. Finalement, tout vecteur-source \mathbf{u} est solution de l'un et l'autre des systèmes d'équations

homogènes suivants

$$(28) \quad \boxed{(a) \quad \mathbf{R} \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (b) \quad \mathbf{Q} \mathbf{u} = \mathbf{0}}$$

mais, tandis que les matrices \mathbf{R} et \mathbf{Q} ont respectivement pour dimension (N, N) et $(N-n, N)$, leurs rangs sont identiques et égaux à $N-n$; l'information relative aux sources est la même, mais elle est « plus condensée » dans \mathbf{Q} . De plus, la matrice \mathbf{Q} est plus rapide à calculer que \mathbf{R} . Ces systèmes ont n solutions linéairement indépendantes et toute combinaison linéaire de ces solutions est elle-même solution; ils ne suffisent donc pas pour déterminer les vecteurs-sources, mais définissent seulement le sous-espace de dimension n auquel ces vecteurs appartiennent. Les transposés-conjugués des $N-n$ lignes de la matrice \mathbf{Q} constituent autant de vecteurs de dimension N , généralement non orthogonaux; ces vecteurs engendrent le noyau de Γ_s ; autrement dit, le sous-espace engendré par ces vecteurs s'identifie avec le « sous-espace orthogonal », complémentaire du sous-espace sources. Lorsqu'on a $n=N-1$, la matrice \mathbf{Q} se réduit à un vecteur-ligne qui n'est autre que le transposé-conjugué, à un facteur complexe près, du vecteur propre de Γ_s associé à la valeur propre nulle de multiplicité unité; la relation (28 b) exprime alors l'orthogonalité entre ce vecteur propre et les $N-1$ vecteurs-sources (comme dans la méthode de Pisarenko). En quelque sorte, l'équation matricielle (28 b) permet une généralisation de la méthode de Pisarenko au cas où le sous-espace orthogonal est de dimension supérieure à l'unité.

Quant au nombre de paramètres libres par source, il est de $2(N-n)$, puisqu'il y a $N-n$ équations complexes. On verra plus loin comment ces propriétés peuvent être utilisées, en conjonction avec un modèle de propagation, pour identifier les vecteurs-sources.

Avant de poursuivre, il est essentiel de bien noter que la localisation des sources (au moyen des vecteurs-sources estimés) ne dépend absolument pas de leurs intensités ni de leurs corrélations, du moins dans le cas idéal qui vient d'être étudié. C'est donc la première opération à effectuer avant de procéder à l'estimation des intensités.

3. Résolution paramétrique parfaite dans un cas idéal

On considérera le cas où la matrice interspectrale est de la forme

$$(29) \quad \Gamma = \Gamma_s + \sigma^2 \mathbf{I}_N,$$

$\sigma^2 \mathbf{I}_N$ étant une matrice de bruit et Γ_s la contribution des sources dans les conditions de la section 2 : N capteurs, n sources non corrélées ou partiellement corrélées, $n < N$. Les vecteurs-sources sont supposés conformes à un modèle connu $\mathbf{u}(\varphi)$, où φ est un paramètre uni ou multi-dimensionnel représentant les déphasages de propagation entre capteurs, fonction de la position de la source dans l'espace, des caractéristiques du milieu et de la fréquence de travail.

Le fait d'ajouter la matrice $\sigma^2 \mathbf{I}_N$ à Γ_s ne modifie pas les vecteurs propres, mais a pour effet d'augmenter toutes les valeurs propres de la quantité σ^2 ; en particulier, les $N-n$ plus petites prennent la valeur σ^2 et le noyau de Γ est donc de dimension nulle. Apparaît alors le problème de la détermination du nombre n de sources (qui ne sera pas traité dans cet article). A supposer qu'on ait pu déterminer n exactement, alors les $N-n$ vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_{n+1}, \dots, \lambda_N$ engendrent un sous-espace appelé « sous-espace-bruit », identique au noyau de Γ_s et donc orthogonal au sous-espace-sources. La localisation des sources revient alors à chercher les vecteurs \mathbf{u}_p conformes au modèle $\mathbf{u}(\varphi)$ et orthogonaux au sous-espace-bruit, c'est-à-dire solutions des systèmes d'équations (28 a) ou (28 b). Par exemple, dans la méthode de Pisarenko, on réduit la dimension de la matrice Γ jusqu'à ce que le noyau de Γ_s soit de dimension unité et on cherche les vecteurs \mathbf{u}_p orthogonaux au dernier vecteur propre. Si le modèle est tel que tout ensemble de n vecteurs \mathbf{u}_p engendre un sous-espace de dimension n (vecteurs linéairement indépendants), alors la solution est unique. Pour le modèle défini par (1), la condition à respecter pour qu'il en soit ainsi est $-\pi \leq \varphi \leq \pi$, ce qui impose, les ondes étant planes et les capteurs alignés et équidistants, une distance entre capteurs au plus égale à la demi-longueur d'onde pour des azimuts allant de $-\pi/2$ à $\pi/2$.

Lorsque les vecteurs-sources ont été déterminés, on procède à l'estimation des intensités et des corrélations des sources. Plusieurs formules sont disponibles, équivalentes dans le cas considéré.

Si Λ_n est la matrice diagonale des n plus grandes valeurs propres en présence de bruit, cette matrice deviendrait $\Lambda_n - \sigma^2 \mathbf{I}_n$ en l'absence de bruit; d'après (6) et (13), on a donc

$$(30) \quad \Gamma_s = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{U}^+ = \mathbf{V}_n (\Lambda_n - \sigma^2 \mathbf{I}_n) \mathbf{V}_n^+$$

ce qui donne, en multipliant à gauche par \mathbf{U}^+ et à droite par \mathbf{U}

$$(31) \quad \mathbf{U}^+ \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{U}^+ \mathbf{U} = \mathbf{U}^+ \mathbf{V}_n (\Lambda_n - \sigma^2 \mathbf{I}_n) \mathbf{V}_n^+ \mathbf{U}$$

La matrice \mathbf{U} de dimension N , n est de rang n et, par suite, $\mathbf{U}^+ \mathbf{U}$ est inversible, ce qui permet d'écrire

$$(32) \quad \boxed{\mathbf{S} = \text{P.I.}(\mathbf{U}) \mathbf{V}_n (\Lambda_n - \sigma^2 \mathbf{I}_n) \mathbf{V}_n^+ [\text{P.I.}(\mathbf{U})]^+}$$

P.I. (\mathbf{U}) étant la pseudo-inverse de \mathbf{U} , définie par

$$(33) \quad \text{P.I.}(\mathbf{U}) = (\mathbf{U}^+ \mathbf{U})^{-1} \mathbf{U}^+$$

La formule (32) a été utilisée par Schmidt [11] et reprise par différents auteurs, notamment Wax, Shan et Kailath (16).

On peut aussi écrire, à partir de (6) et (29)

$$(34) \quad \Gamma - \sigma^2 \mathbf{I}_N = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{U}^+,$$

ce qui donne, en procédant comme précédemment

$$(35) \quad \boxed{\mathbf{S} = \text{P.I.}(\mathbf{U}) (\Gamma - \sigma^2 \mathbf{I}_N) [\text{P.I.}(\mathbf{U})]^+}$$

Cette formule, proposée par Spitz [15], permet avec (28 b) d'effectuer la résolution complète du problème sans avoir à calculer les vecteurs propres.

On peut encore écrire, à partir de (30), en multipliant à gauche par \mathbf{V}_n^+ et à droite par \mathbf{V}_n , et compte tenu de (15),

$$(36) \quad \boxed{\mathbf{S} = (\mathbf{V}_n^+ \mathbf{U})^{-1} (\Lambda_n - \sigma^2 \mathbf{I}_n) (\mathbf{U}^+ \mathbf{V}_n)^{-1}}$$

L'inverse de la matrice de covariance des sources, tiré de (36), s'écrit

$$(37) \quad \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{U}^+ \mathbf{V}_n \text{diag} \left[\frac{1}{\lambda_i - \sigma^2} \right] \mathbf{V}_n^+ \mathbf{U},$$

d'où l'expression des éléments a_{pq} de cet inverse

$$(38) \quad a_{pq} = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{u}_p^+ \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^+ \mathbf{u}_q}{\lambda_i - \sigma^2}$$

Sur la diagonale principale, on a

$$(39) \quad a_{pp} = \sum_{i=1}^n \frac{|\mathbf{v}_i^+ \mathbf{u}_p|^2}{\lambda_i - \sigma^2},$$

les quantités $\mathbf{v}_i^+ \mathbf{u}_p$ étant les projections des vecteurs-sources sur les vecteurs propres.

A titre de comparaison, l'estimateur de Capon donne une estimation de variance $\hat{\mu}$ en fonction du paramètre φ selon la formule

$$(40) \quad \hat{\mu}(\varphi) = \frac{1}{\mathbf{u}^+(\varphi) \Gamma^{-1} \mathbf{u}(\varphi)}$$

Lorsque $\mathbf{u}(\varphi)$ s'identifie avec l'un des vecteurs-sources \mathbf{u}_p , on obtient

$$(41) \quad \frac{1}{\hat{\mu}_p} = \sum_{i=1}^N \frac{|\mathbf{v}_i^+ \mathbf{u}_p|^2}{\lambda_i}$$

En fait, la sommation s'étend seulement de 1 à n , car les produits scalaires $\mathbf{v}_i^+ \mathbf{u}_p$ sont nuls pour $i > n$. A bruit nul ($\sigma^2 = 0$), on voit que les inverses des estimateurs de Capon, considérés aux emplacements des sources (soit $\varphi = \varphi_p$), sont égaux aux éléments diagonaux de l'inverse de la matrice de covariance des sources; si celle-ci est diagonale (sources non corrélées), alors l'estimateur de Capon est parfait.

La figure 1 donne un exemple correspondant aux conditions idéales considérées dans cette section; les sources vraies sont représentées par les barres verticales; leurs emplacements estimés ont été déterminés par la méthode de Pisarenko; la matrice de covariance \mathbf{S} , dont les éléments diagonaux donnent les intensités des sources, a été calculée par l'une (au choix) des formules (32), (35) ou (36); les hypothèses de départ étant respectées, on obtient une solution parfaite. En ce qui concerne l'analyse continue par la méthode de Capon, le résultat est mauvais pour ce qui est des trois sources principales corrélées à 98% (courbe en trait plein). Lorsque ces sources ne sont pas corrélées (courbe en tirets), le résultat est nettement plus satisfaisant, mais le pouvoir séparateur

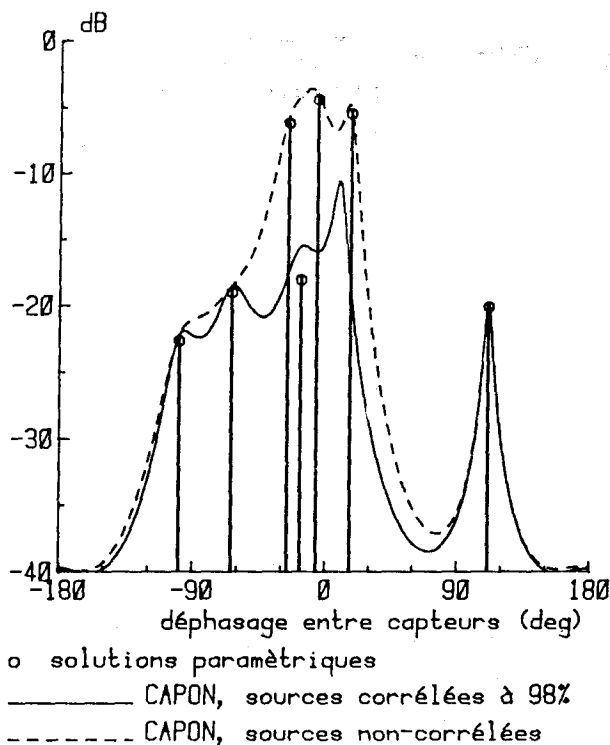


Fig. 1. — 7 sources, dont 3 principales corrélées ou non et 4 secondaires non corrélées + bruit blanc (puiss. sources/bruit : 31,7 dB), 8 capteurs espacés d'une demi-longueur d'onde.

est insuffisant; on peut l'améliorer grandement en réduisant la variance σ^2 , ce qui est réalisable en retranchant une quantité appropriée des éléments diagonaux de la matrice interspectrale (de manière à faire tendre vers zéro la dernière valeur propre).

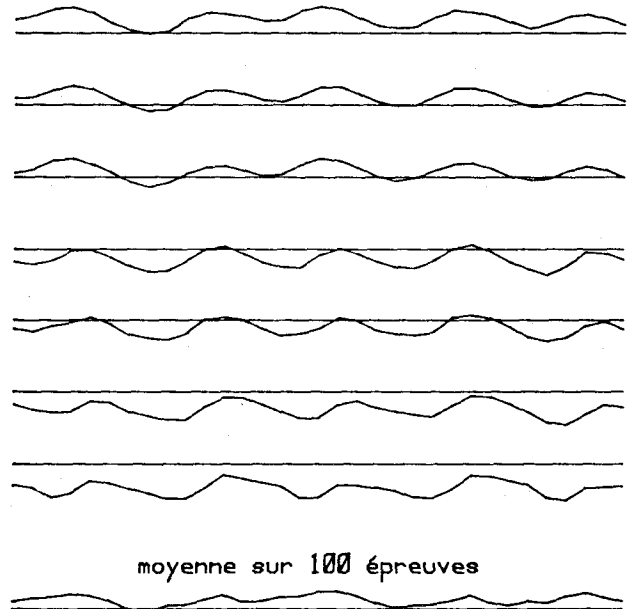
4. Trajets multiples et sources en surnombre

Au cours d'une épreuve de courte durée, le milieu de propagation apparaît comme quasiment figé et, par suite, les signaux provenant d'une même source par plusieurs trajets d'azimuts différents sont presque totalement corrélés, du moins lorsque les retards différentiels entre trajets sont faibles devant la largeur de la fonction d'autocorrélation du signal de la source. Puisqu'il s'agit d'une seule épreuve de durée limitée, il faut entendre par signaux corrélés des signaux qui présentent une énergie d'interaction non nulle; le « coefficient de corrélation complexe » est alors le quotient de l'énergie complexe d'interaction par la racine carrée du produit des énergies propres.

Si l'on utilise un algorithme basé sur la non-corrélation entre sources, alors la partie non corrélée de toute onde secondaire est assimilable à une source distincte de bas niveau, tandis que la partie corrélée interfère avec l'onde principale. L'onde résultante présente, dans ce cas, des distorsions de phase et d'amplitude, qui peuvent être importantes, par rapport à une onde plane.

La figure 2 donne un exemple typique de figures d'interférence pour une source principale à l'azimut zéro et cinq trajets secondaires totalement corrélés (aux azimuts $-49,1^\circ$; $-17,5^\circ$; $-6,4^\circ$; $9,4^\circ$; $38,2^\circ$), le

Fronts d'ondes ; 7 épreuves successives
(écart entre droites de référence 100 deg.)



base d'observation : 16 longueurs d'onde

Fig. 2. — Distorsions de phase provoquées par les trajets multiples. Une source principale et 5 trajets secondaires (niveau moyen $-10,3$ dB).

niveau moyen des secondaires étant $-10,3$ dB. Seules les répartitions de phase sur la base d'observation ont été représentées, pour plusieurs épreuves successives; d'une épreuve à l'autre, on a fait fluctuer aléatoirement les phases (avec un écart-type d'environ 20°) et les amplitudes (avec un écart-type relatif de 10%) des diverses ondes incidentes. Les droites horizontales correspondent à l'onde plane observée en l'absence de trajets secondaires. Les écarts de phase par rapport à l'onde plane peuvent atteindre couramment, en pratique, plusieurs dizaines de degrés; dans l'exemple présenté, l'écart-type des phases est voisin de 30° .

On a représenté également la moyenne sur 100 épreuves; on constate que l'écart-type a à peine diminué. On ne peut, en fait, espérer éliminer ce type de distorsion par un moyennage de longue durée, sauf si les dispersions de phases des ondes incidentes sont telles qu'on puisse considérer ces phases comme équiparties sur 2π ; les trajets multiples apparaissent alors comme non corrélés sur un intervalle de temps suffisamment long.

De ce qui précède, il ressort qu'on a intérêt :

- 1° à choisir des épreuves de durée pas trop courte et une bande passante aussi large que possible, afin que les trajets multiples ne soient pas totalement corrélés;
- 2° à traiter les divers trajets comme des sources distinctes partiellement corrélées, en utilisant un algorithme approprié (cf. sections 1 et 2).

On peut avoir, par exemple, une seule source principale avec un ou deux trajets secondaires de niveau comparable fortement corrélés et, en outre, une multitude de trajets à bas niveau provenant de la réverbération lointaine; ces derniers sont généralement très peu

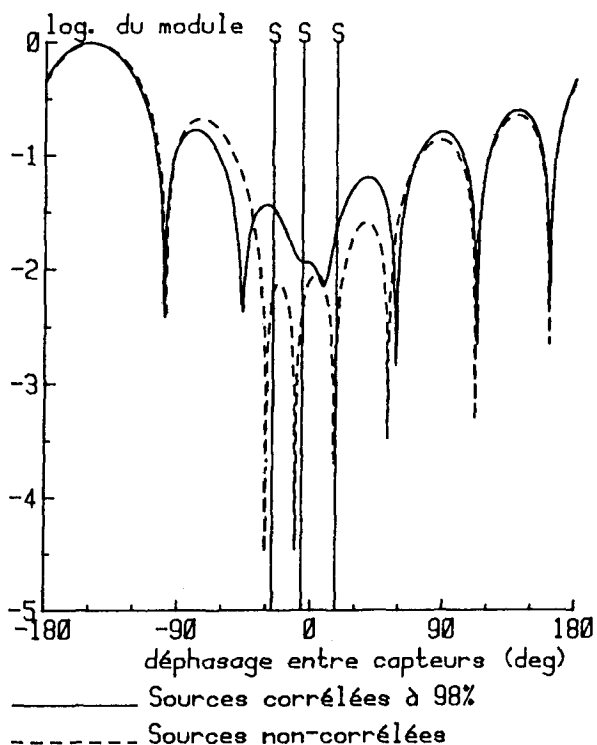


Fig. 3. - Module du produit scalaire : dernier vecteur propre * vecteur d'analyse, 8 capteurs espacés d'une demi-longueur d'onde, 3 sources corrélées ou non + 15 bruiteurs non corrélés.

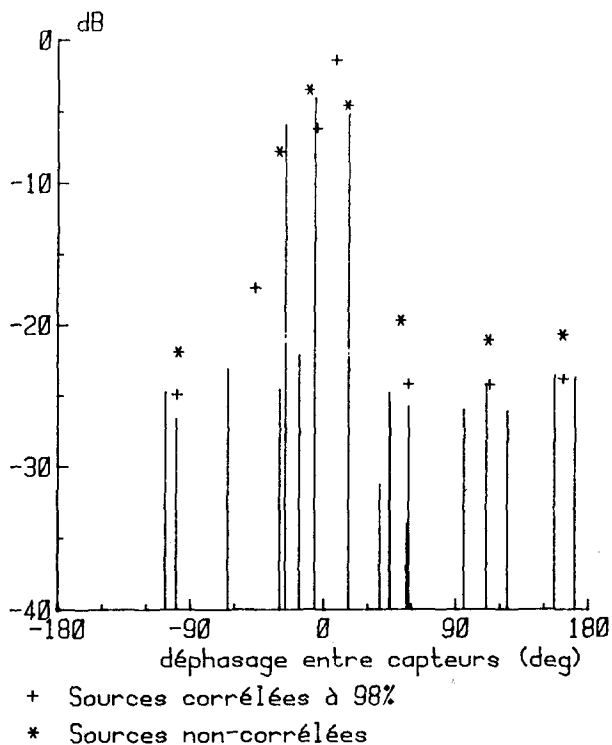


Fig. 4. - Solutions paramétriques (données de la figure 3), 8 capteurs espacés d'une demi-longueur d'onde, 3 sources corrélées ou non + 15 bruiteurs non corrélés.

corrélés avec la source principale. En pareil cas, on est en présence de sources en surnombre (par rapport au maximum $N-1$ autorisé pour N capteurs). Ce genre de situation est illustré par les figures 3, 4 et 5,

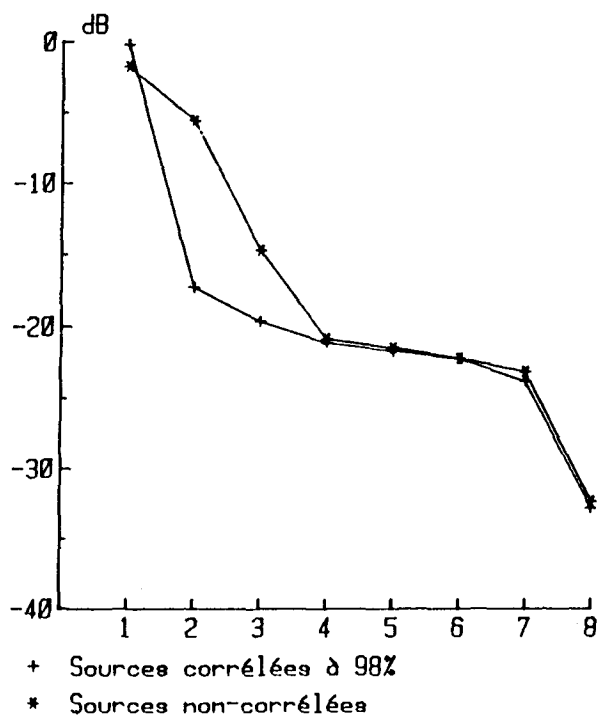


Fig. 5. - Spectre des valeurs propres (données de la figure 3), 8 capteurs espacés d'une demi-longueur d'onde, 3 sources corrélées ou non + 15 bruiteurs non corrélés.

pour lesquelles on a trois sources principales (corrélées ou non) et une quinzaine de sources secondaires non corrélées, considérées comme des bruiteurs, à niveau beaucoup plus bas; l'observation est faite au moyen d'un réseau de huit capteurs; la répartition des sources et bruiteurs est visible sur la figure 4.

Avec huit capteurs, on peut espérer identifier sept sources par l'orthogonalité du vecteur d'analyse, conforme au modèle de propagation (1), avec le vecteur propre associé à la plus petite valeur propre; la figure 3 représente la variation du module du produit scalaire de ces deux vecteurs en fonction du paramètre ϕ , déphasage de propagation entre capteurs adjacents. On constate que les trois sources principales sont identifiées et localisées si elles ne sont pas corrélées, toutefois avec des erreurs d'estimation liées à la présence d'une matrice de bruit due aux sources en surnombre. Leurs intensités sont à peu près correctement estimées, comme on le voit sur la figure 4. Par contre, lorsque ces sources sont corrélées à 98%, le résultat est franchement mauvais. L'explication de ce phénomène est donné par la figure 5, qui représente le spectre des valeurs propres de la matrice interspectrale : lorsque les trois sources principales ne sont pas corrélées, les trois premières valeurs propres se détachent très nettement des suivantes et, par suite, ces sources sont identifiées; lorsqu'elles sont fortement corrélées, la deuxième et la troisième valeurs propres s'effondrent.

Finalement, si les sources corrélées peuvent être théoriquement localisées et leurs intensités estimées, il y a néanmoins intérêt à ce que la corrélation soit modérée. En cas de forte corrélation, on peut utiliser la technique de diversité d'espace, appelée « spatial smoothing » par Shan, Wax et Kailath [17], qui a

pour effet de réduire la corrélation entre sources. Cette technique consiste à moyenner plusieurs matrices interspectrales (N, N) estimées à partir de sous-réseaux de N capteurs spatialement décalés.

Si on forme m sous-réseaux de N capteurs décalés de $l=kd$ (k entier), d étant la distance entre capteurs, alors on peut montrer que le coefficient de corrélation entre deux sources p et q est réduit par le facteur

$$(42) \quad \left| \frac{\sin(mk((\varphi_p - \varphi_q)/2))}{m \sin(k((\varphi_p - \varphi_q)/2))} \right|,$$

φ_p et φ_q étant les déphasages de propagation entre capteurs successifs, respectivement pour les sources p et q . En fait, on a intérêt à prendre $k=1$ et m aussi grand que possible (on peut d'ailleurs montrer [17] que m doit être au moins égal au nombre de sources corrélées). Par exemple, si on prend $k=l/d=1$ et $m=N$, alors le coefficient de corrélation entre deux sources à la limite de Rayleigh (c'est-à-dire dont les vecteurs-sources sont orthogonaux) est annulé. Évidemment, cette technique augmente le nombre de capteurs nécessaires, ainsi que la charge de calcul; le nombre total de capteurs est, en effet, $N+(m-1)k$ et il y a m matrices interspectrales à calculer.

5. Matrice de bruit non Toeplitz et distorsions des fronts d'ondes

Sous l'hypothèse ondes incidentes planes et capteurs identiques, alignés et équidistants, les sources en sur-nombre produisent une matrice de bruit Toeplitz et on peut toujours retrouver le « cas idéal » examiné précédemment en augmentant le nombre de capteurs jusqu'à pouvoir identifier toutes ces sources (même partiellement corrélées). Le cas de matrices de bruit non Toeplitz se présente s'il y a des sources proches (qui produisent des ondes sphériques), ou des distorsions dues à la diffraction sur des obstacles proches, à la turbulence locale ou à la déformation de l'antenne, ou encore si les capteurs ne sont pas identiques; tout vecteur-source peut alors être assimilé à la somme d'un vecteur-signal conforme au modèle théorique et d'un vecteur-bruit représentant les distorsions. Sont à inclure en outre dans la matrice de bruit les erreurs d'estimation de la matrice interspectrale.

L'effet d'une matrice de bruit non Toeplitz est illustré par la figure 6 où l'on a huit capteurs et trois sources, avec un rapport signal à bruit de 17 dB, défini comme étant le rapport de la trace de la matrice-signal à celle de la matrice-bruit. On constate que les sources sont très bien localisées si elles ne sont pas corrélées; par contre, si elles sont corrélées à 98%, le résultat est mauvais. Comme pour la figure 3, l'effondrement des deuxième et troisième valeurs propres dû à la corrélation, visible sur la figure 7, est la cause de ce phénomène. Dans cette simulation, la matrice de bruit a été générée selon la formule

$$(43) \quad \Gamma_b = \sum_{i=1}^8 \mathbf{b}_i \mathbf{b}_i^+,$$

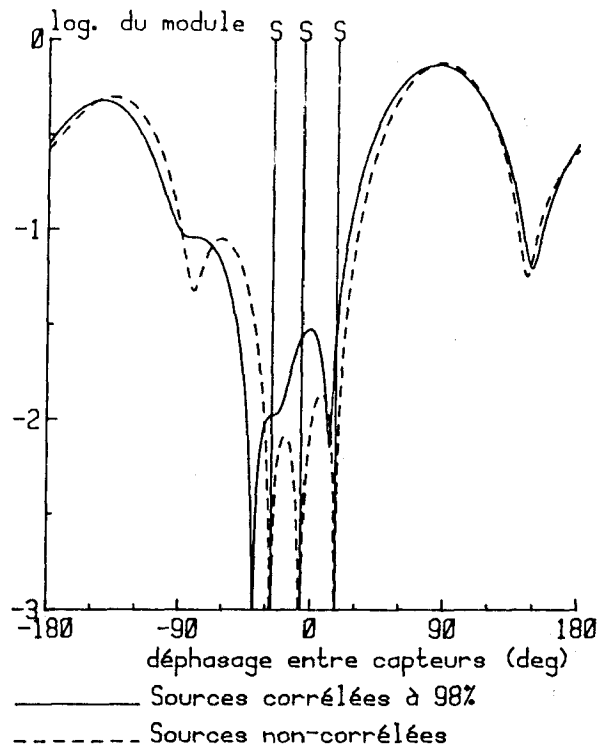


Fig. 6. — Module du produit scalaire : dernier vecteur propre * vecteur d'analyse, 8 capteurs espacés d'une demi-longueur d'onde, 3 sources corrélées ou non; matrice de bruit non Toeplitz (S/B : 17 dB).

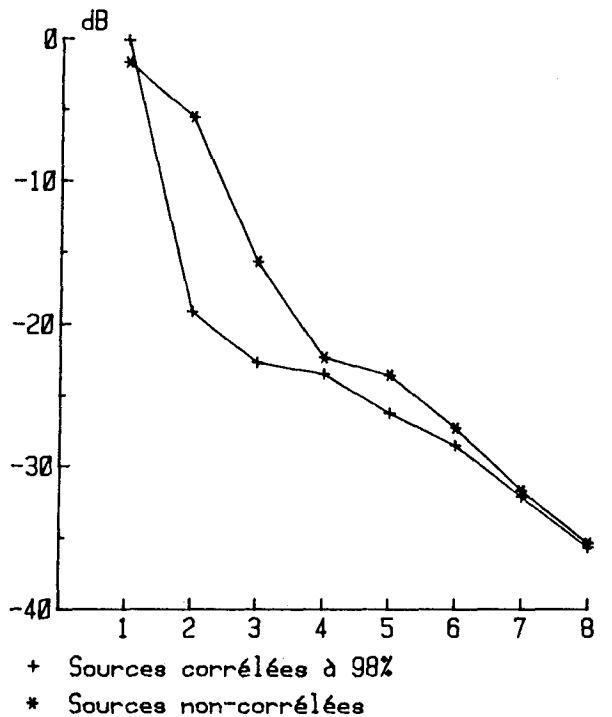


Fig. 7. — Spectre des valeurs propres (données de la figure 6), 8 capteurs espacés d'une demi-longueur d'onde, 3 sources corrélées ou non; matrice de bruit non Toeplitz (S/B : 17 dB).

les vecteurs \mathbf{b}_i ayant des éléments à modules et phases aléatoires, distribués selon une loi de Rayleigh pour les modules et une loi uniforme de $-\pi$ à $+\pi$ pour les phases. Par construction, cette matrice est hermitienne et définie positive.

Le cas spécifique de fronts d'ondes distordus est illustré par la figure 8, où l'on a sept sources, dont trois à haut niveau corrélées à 98% et quatre à bas niveau non corrélées; le champ de sources est le même qu'à la figure 1. Ici, il n'a pas été fait usage de matrice de bruit, mais les vecteurs-sources ont été perturbés en ajoutant à chacun de leurs éléments un terme d'erreur aléatoire à phase équipartie entre $-\pi$ et $+\pi$, dont le module présentait un écart-type relatif (par rapport au module de l'élément perturbé) de 1% (courbe en trait plein) ou de 5% (courbe en tiretés); les écarts-types correspondants de la distorsion de phase des fronts d'ondes sont alors respectivement de 0,9 et 4,5°. On voit que la situation se dégrade très rapidement dès qu'apparaissent les moindres distorsions de phase; à la lumière de cet exemple, des écarts-types supérieurs au degré paraissent déjà prohibitifs, d'où la nécessité, déjà signalé à la section 1, de compenser autant que possible les « biais » constants. Quant aux distorsions résiduelles, il paraît souhaitable de les identifier, ce qui est le sujet de la section suivante.

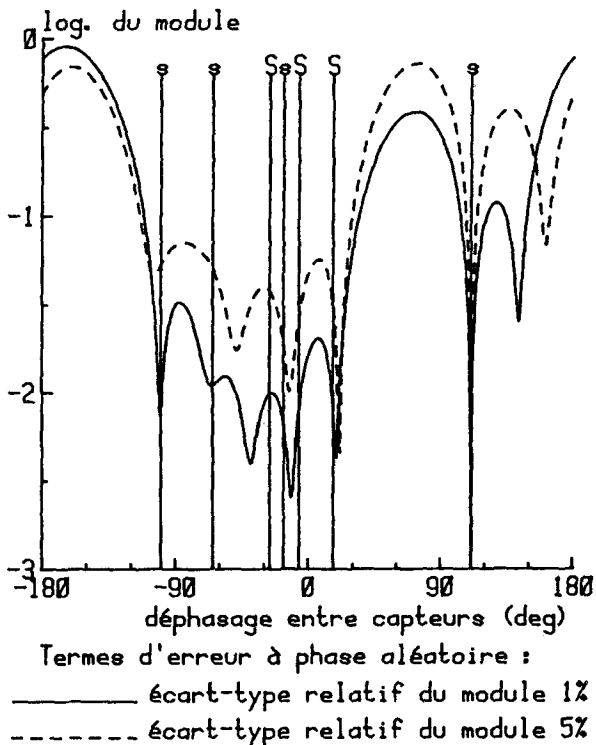


Fig. 8. — Module du produit scalaire : dernier vecteur propre * vecteur d'analyse, 8 capteurs espacés d'une demi-longueur d'onde, 7 sources dont 3 principales corrélées à 98% avec distorsion des fronts d'ondes.

6. Algorithme pour les fronts d'ondes distordus

Les vecteurs-sources, définis à un facteur scalaire complexe près, comportent $2(N-1)$ paramètres inconnus (à savoir $N-1$ modules et autant de phases); or, comme on l'a vu à la section 2, on ne dispose que de $2(N-n)$ paramètres libres par source, ce qui permet de traiter seulement le cas d'une source unique, dont le vecteur-source se confond alors avec le premier vecteur propre.

Par contre, si l'on admet que les modules sont égaux, il ne reste que les $N-1$ phases à identifier, ce qui conduit à prendre un nombre de capteurs égal à

$$(44) \quad N = 2n - 1,$$

valeur pour laquelle le nombre de paramètres libres par source est précisément égal à $N-1$. Le modèle de vecteur-source est, dans ce cas, de la forme suivante (à un facteur scalaire près)

$$(45) \quad \mathbf{u} = [e^{j\varphi_1}, e^{j\varphi_2}, \dots, e^{j\varphi_N}]^T;$$

on prendra, pour la commodité, $\varphi_1 = 0$.

Ce type de modèle est celui qu'a utilisé Vezzosi [14, 18], qui préconise l'emploi d'un nombre de capteurs N nettement supérieur à $2n-1$, ce qui conduit à résoudre un système surdéterminé.

A l'inverse, « l'algorithme $\mathbf{Q}\mathbf{u}$ » que nous proposons ci-après, également basé sur l'utilisation du modèle [45] à modules égaux, ne fait pas appel à la surdétermination. Le but de cet algorithme est de trouver les solutions de l'équation matricielle (28b); ce système linéaire homogène possède n solutions linéairement indépendantes, mais toute combinaison linéaire de ces solutions est également solution; toutefois, le fait qu'elles doivent être conformes au modèle (45) limite drastiquement leur nombre. Il faut donc s'attendre à trouver, outre les n fronts d'ondes vrais, des fronts d'ondes correspondant à des « sources fantômes »; ce problème sera examiné plus loin.

Par définition, un front d'onde est une surface équiphasé dans l'espace; par commodité de langage, nous emploierons le même terme pour désigner la distribution de phase $\varphi(k)$ que l'onde considérée engendre à la sortie du réseau de capteurs. Cette distribution est caractérisée par le vecteur à valeurs réelles

$$(46) \quad \boldsymbol{\varphi} = [0, \varphi_2, \dots, \varphi_N]^T.$$

L'algorithme proposé consiste à choisir une valeur de départ \mathbf{u}_0 pour le vecteur-source, correspondant à un vecteur $\boldsymbol{\varphi}_0$ des phases, et à calculer le vecteur de dimension $n-1$

$$(47) \quad \mathbf{w}_0 = \mathbf{Q}\mathbf{u}_0.$$

On cherche ensuite l'accroissement $\Delta\mathbf{u}$ à appliquer à \mathbf{u}_0 qui annule \mathbf{w}_0 , ce qui donne

$$(48) \quad \mathbf{Q}\Delta\mathbf{u} = -\mathbf{w}_0.$$

En assimilant $\Delta\mathbf{u}$ à un accroissement différentiel très petit $d\mathbf{u}$, on peut l'exprimer simplement en fonction de l'accroissement différentiel du vecteur des phases, ce qui revient à linéariser le problème, soit

$$(49) \quad d\mathbf{u} = j \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{0}{\Delta d\boldsymbol{\varphi}} \end{bmatrix},$$

avec

$$(50) \quad \Delta = \begin{bmatrix} e^{j\varphi_2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{j\varphi_N} \end{bmatrix}, \quad d\boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} d\varphi_2 \\ \vdots \\ d\varphi_N \end{bmatrix},$$

la matrice carrée Δ et le vecteur $d\varphi$ étant de dimension $N-1$.

En posant

$$(51) \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix}_{(1) \quad (N-1)}^{(n-1)},$$

on obtient, en utilisant (48)

$$(52) \quad j[\mathbf{q} \mid \mathbf{Q}_1] \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta d\varphi \end{bmatrix} = -\mathbf{w}_0,$$

ce qui donne

$$(53) \quad \mathbf{T} d\varphi = -\mathbf{w}_0 \quad \text{avec} \quad \mathbf{T} = j\mathbf{Q}_1 \Delta,$$

la matrice \mathbf{T} étant de dimension $(n-1, N-1)$. Le vecteur $d\varphi$ étant réel, il convient maintenant de séparer les parties réelles et imaginaire de \mathbf{T} et \mathbf{w}_0 , soit

$$(54) \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}_1 + j\mathbf{T}_2 \quad \text{et} \quad \mathbf{w}_0 = \mathbf{w}_1 + j\mathbf{w}_2.$$

La relation (53) s'écrit alors

$$(55) \quad \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \end{bmatrix} d\varphi = - \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \end{bmatrix},$$

d'où l'on tire

$$(56) \quad d\varphi = - \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \end{bmatrix}.$$

Finalement, la solution est

$$(57) \quad \varphi = \varphi_0 + \begin{bmatrix} 0 \\ d\varphi \end{bmatrix}.$$

Pour initialiser le processus, on peut prendre comme vecteur φ_0 celui correspondant à une onde plane reçue par un réseau rectiligne de capteurs équidistants, avec un déphasage incrémental φ . En faisant varier φ de -180° à $+180^\circ$, par exemple de 2 en 2° , on obtient une variété de fronts d'ondes. Étant donnée la dépendance non linéaire entre les vecteurs \mathbf{u} et φ , il est généralement nécessaire de procéder à plusieurs itérations pour aboutir à une solution et, de plus, le vecteur \mathbf{u}_0 de départ doit être relativement proche de cette solution. Le processus est arrêté lorsque la norme de $\mathbf{w} = \mathbf{Q}\mathbf{u}$ est devenue suffisamment faible.

Parmi les solutions trouvées, il faut choisir les plus vraisemblables. Les phases étant connues modulo 2π , il convient d'abord de « dérouler la phase » de manière à reconstituer les fronts d'ondes estimés, en faisant l'hypothèse qu'ils sont approximativement plans (ceci étant valable même s'ils sont quelque peu incurvés). La méthode suivante donne des résultats satisfaisants : $\hat{\varphi}_k$ étant la phase estimée pour le capteur k ($k \in [1, N]$), on compare, à partir du troisième capteur, $\hat{\varphi}_k$ à $[(k-1)/(k-2)]\hat{\varphi}_{k-1}$, l'écart étant

$$(58) \quad \delta\varphi = \hat{\varphi}_k - \frac{k-1}{k-2} \hat{\varphi}_{k-1}.$$

La correction à apporter s'exprime par

$$(59) \quad (\varphi_k)_{\text{corrigé}} = \hat{\varphi}_k - 360 \times \text{PE} \left[\frac{\delta\varphi}{360} + 0,5 \text{Sgn}(\delta\varphi) \right],$$

PE signifiant « partie entière ».

L'étape suivante consiste à chercher, au sein de la variété de fronts d'ondes obtenus, ceux qui correspondent le mieux au modèle théorique retenu. Par exemple, si l'on cherche des fronts d'ondes approximativement rectilignes, on effectuera une régression linéaire sur les phases φ_k corrigées, qui donnera le déphasage incrémental moyen, soit

$$(60) \quad \Delta\varphi = \frac{6}{N(N-1)} \left[\frac{2}{N+1} \sum_k k \varphi_k - \sum_k \varphi_k \right],$$

et l'écart de phase du capteur k par rapport au plan d'onde moyen

$$(61) \quad \Delta\varphi_k = \varphi_k - \frac{1}{N} \sum_k \varphi_k - \left[k - \frac{N+1}{2} \right] \Delta\varphi.$$

On retiendra finalement ceux des fronts d'ondes qui présentent un écart quadratique moyen minimal par rapport à l'onde plane, ceci constituant un premier critère d'élimination des sources fantômes.

Les figures 9 à 12 illustrent l'application de la méthode à un cas idéal, celui de quatre sources en l'absence de bruit, les signaux étant reçus sur sept capteurs, ce qui satisfait la condition (44), et la matrice interspectrale étant calculée sans erreur appréciable. Les capteurs sont identiques, alignés et espacés d'une demi-longueur d'onde; les sources sont aux azimuts 15° , 7° , -5° et -42° et leurs fronts d'ondes, approximativement plans, présentent des distorsions de phase dont les écarts quadratiques moyens par rapport à l'onde plane s'échelonnent de 5 à 12° . Ces sources, notées S1 à S4, sont repérées sur les figures 9, 11 et 12 par le déphasage incrémental de leur plan d'onde moyen. Une première approche pour les localiser peut consister à tracer le carré de la norme du vecteur $\mathbf{Q}\mathbf{u}(\varphi)$ en fonction du déphasage incrémental φ , le vecteur $\mathbf{u}(\varphi)$ caractérisant une onde plane selon le modèle (1). Cette fonction est représentée sur la figure 9 pour deux épreuves (a) et (b) correspondant à des distorsions différents des fronts d'ondes. Sur la même figure est représentée la réponse du goniomètre, soit $\mathbf{u}^+(\varphi) \mathbf{R} \mathbf{u}(\varphi)$, \mathbf{R} étant le projecteur dans le sous-espace-bruit défini par (17). Ces courbes indiquent les zones où existent vraisemblablement des solutions correspondant à des fronts d'ondes approximativement plans et où, par conséquent, pourra être appliqué avec quelque chance de succès l'algorithme $\mathbf{Q}\mathbf{u}$. Les deux méthodes d'approche apparaissent comme étant à peu près équivalentes. Rappelons que, si le nombre de sources était pris égal à $N-1$, le vecteur $\mathbf{Q}\mathbf{u}$ se réduirait à un scalaire qui n'est autre que le produit scalaire du vecteur d'analyse par le dernier vecteur propre de la matrice interspectrale; on obtiendrait alors des courbes semblables à celles des figures 3, 6 et 8.

La figure 10 représente les fronts d'ondes estimés au cours d'itérations successives de l'algorithme $\mathbf{Q}\mathbf{u}$, à partir d'une onde plane, dans un cas où se produit une convergence vers une solution (en l'occurrence, le front d'onde de la source S3); dans de bonnes conditions, en particulier à bruit nul et pour des sources de directions pas trop voisines, deux ou trois itérations suffisent.

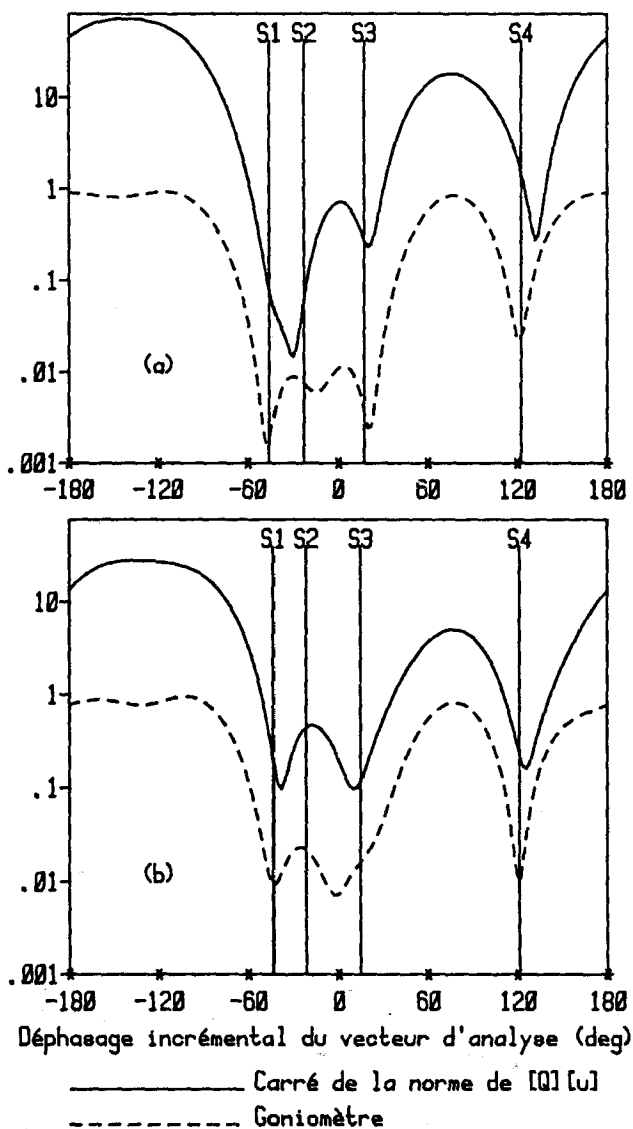


Fig. 9. — Analyse avec vecteur onde plane : 7 capteurs, 4 fronts d'ondes distordus. 2 épreuves (a) et (b) avec distorsions différentes.

Avec les mêmes données qu'à la figure 9 (a), la figure 11 indique les résultats de l'analyse réalisée en opérant trois, puis six itérations, à partir d'un vecteur « onde plane » dont on a fait varier le déphasage incrémental de $-\pi$ à $+\pi$. On constate que les quatre sources sont détectées sur des plages relativement larges du déphasage incrémental initial. Toutefois, lorsqu'on augmente le nombre d'itérations, des solutions fantômes apparaissent.

Les figures 12 (a) et 12 (b) indiquent, pour les épreuves (a) et (b) de la figure 9, la localisation des solutions trouvées au voisinage des sources S1, S2 et S3, après trois et six itérations, l'analyse étant opérée en faisant varier de 2 en 2° le déphasage incrémental du vecteur u_0 initial. La localisation d'un front d'onde estimé est caractérisée par le déphasage incrémental de son plan d'onde moyen, porté en ordonnée. Les sources S1, S2 et S3 sont localisées sans erreur dans ces essais non bruités, mais on constate la présence d'une source fantôme dans chacune des deux épreuves. Les fantômes se distinguent par une grande instabilité de position d'une épreuve à l'autre, ce qui constitue un

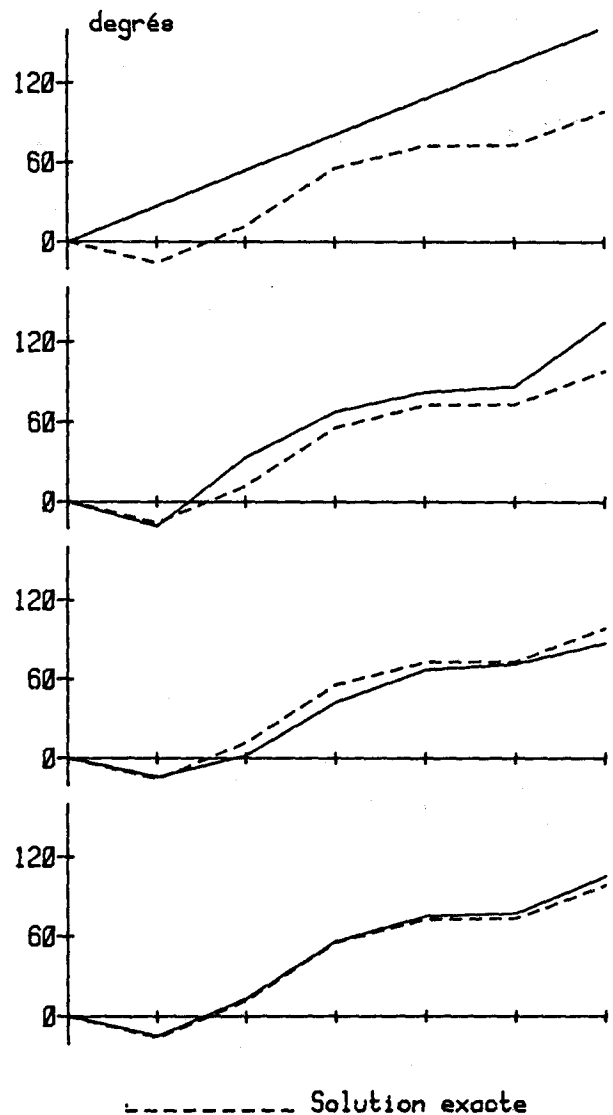


Fig. 10. — Front d'onde distordu : convergence vers une solution par itérations successives à partir d'une onde plane (7 capteurs).

second critère permettant de les éliminer, dès lors qu'on dispose d'au moins deux épreuves dans lesquelles les distorsions sont différentes. On remarque aussi que la source S2, convenablement détectée dans l'épreuve (a), est à la limite de détection dans l'épreuve (b); ce phénomène, dû à une difficulté d'accrochage de l'algorithme de recherche, a tendance à se produire lorsqu'une source se trouve prise en sandwich entre deux autres assez proches et ceci d'autant plus que les distorsions des fronts d'ondes sont plus fortes. Il est à noter que le pouvoir séparateur est néanmoins très supérieur à celui de méthodes plus classiques, du moins en l'absence de bruit, comme on peut le voir par comparaison avec la figure 9.

Les résultats d'analyse tels ceux qui sont présentés dans les figures 9 à 12 sont strictement indépendants de la matrice de covariance S des amplitudes complexes des sources, comme le montre la théorie, pour autant que cette matrice ne soit pas singulière ou mal conditionnée, ce qui implique qu'il n'y ait pas deux sources totalement corrélées ou une source d'intensité exagérément faible.

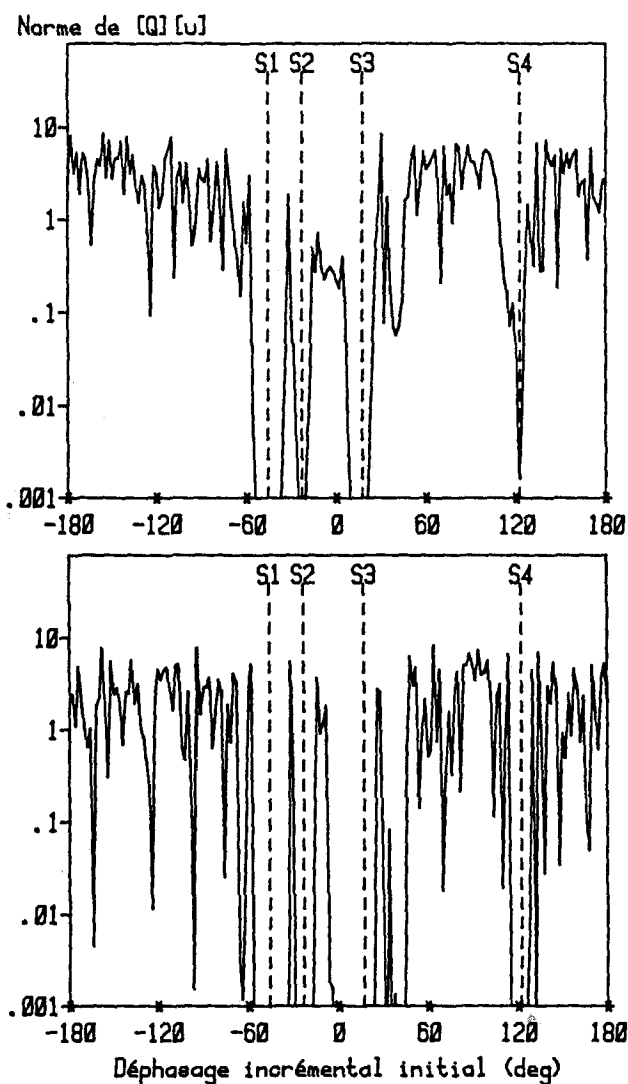


Fig. 11. — Analyse à partir d'un vecteur onde plane : données de la figure 9 (a). En haut : 3 itérations; en bas : 6 itérations.

7. Influence du bruit parasite

Trois phénomènes interviennent, contribuant à l'existence d'une matrice de bruit additive : les erreurs d'estimation de la matrice interspectrale, la présence de sources surnuméraires de faible puissance et le bruit propre des capteurs (dû, en particulier, à l'écoulement des fluides dans leur voisinage immédiat). Cette question nécessiterait une étude approfondie qui ne sera pas abordée ici; nous présentons seulement un résultat typique de simulation numérique obtenu en ajoutant à la matrice interspectrale utilisée pour la figure 9 (a) une matrice de bruit générée selon la formule (43). Contrairement à ce qui se passait dans les conditions idéales de la section 6, les intensités des sources et leurs corrélations jouent maintenant un rôle important; en particulier, plus l'intensité d'une source est faible, plus son front d'onde apparent est perturbé par le bruit et plus sa détection devient problématique.

Les figures 13 et 14 présentent un exemple où le rapport signal à bruit, défini comme étant le rapport

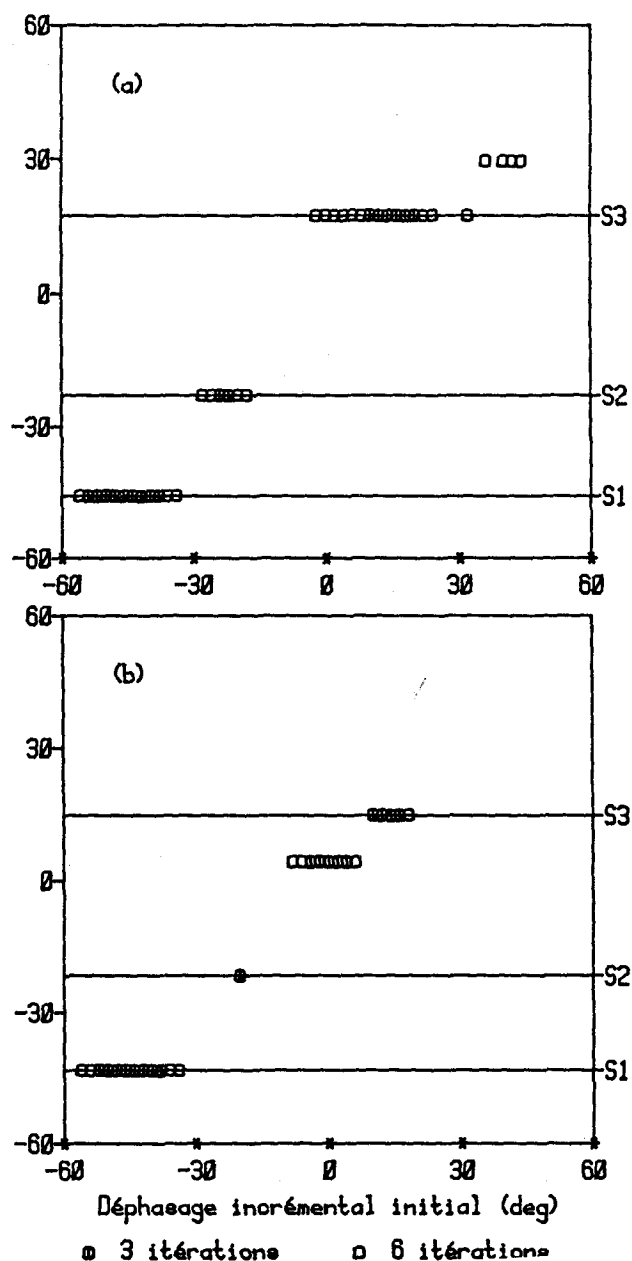


Fig. 12. — Déphasage incrémental moyen des fronts d'ondes estimés (de -60 à $+60^\circ$). 2 épreuves, données des figures 9 (a) et 9 (b).

de la trace de la matrice interspectrale des sources seules à la trace de la matrice de bruit, vaut 100 (soit 20 dB); les sources S1 à S4, non corrélées, ont des intensités valant respectivement, en unités arbitraires, 54, 63, 92 et 5. On constate tout d'abord que la source S4, qui est de faible intensité, est à la limite de détection par l'algorithme Q_u ; le rapport signal à bruit pour cette source est de 3,7 dB relativement au bruit seul et de $-16,3$ dB relativement à l'ensemble des autres sources et du bruit. On constate ensuite, à la figure 14, que les positions estimées des sources sont entachées d'erreurs appréciables, la source S3, qui est la plus intense, étant la moins perturbée. On remarque en outre sur cette figure, qui présente les résultats relatifs à deux épreuves de bruit (a) et (b) différentes (les distorsions des fronts d'ondes étant inchangées), que les sources fantômes ne se reproduisent pas deux fois à la même place.

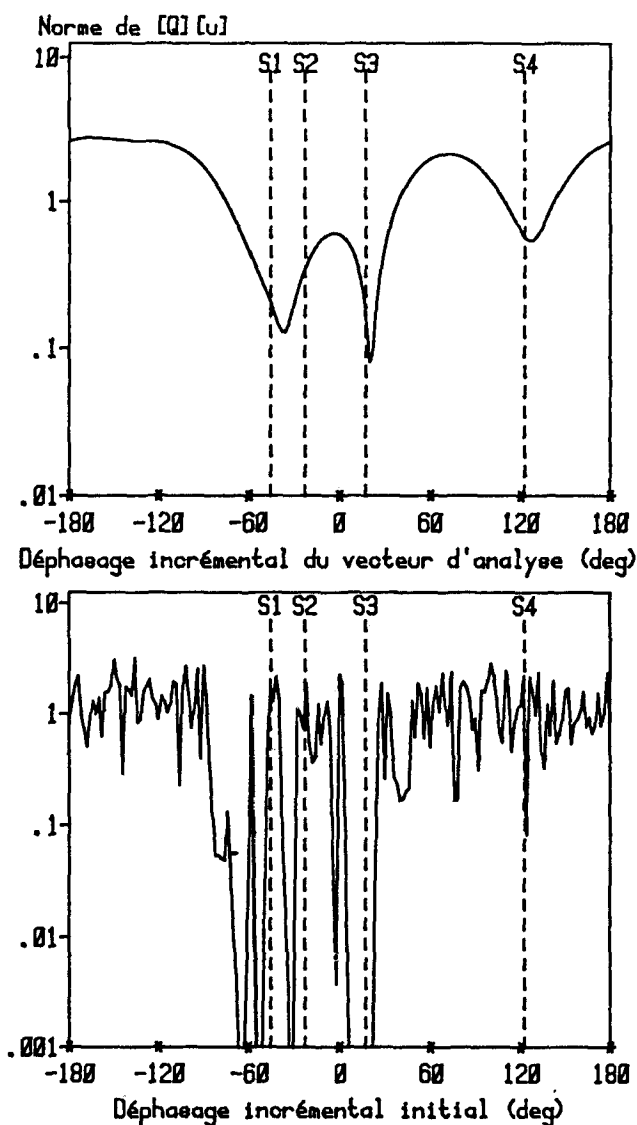


Fig. 13. — Données des figures 9 (a), 11 et 12 (a) en présence de bruit. En haut : analyse avec vecteur onde plane. En bas : après trois itérations de l'algorithme Q_u .

Pour l'épreuve (b), la figure 15 donne la forme des fronts d'ondes estimés au voisinage des sources S1, S2 et S3; seul le front d'onde de la source S3 est assez correctement estimé. Deux fantômes apparaissent au voisinage de S1 et S2, reconnaissables par leurs écarts quadratiques moyens importants par rapport à l'onde plane.

Au vu de cet exemple, on peut conclure qu'un front d'onde n'est correctement identifiable que dans la mesure où la puissance moyenne qu'il véhicule est très supérieure à celle du bruit (d'au moins 15 dB, si l'on réfère à la source S3). Il importe donc de réduire le bruit au maximum, 1° en estimant avec précision la matrice interspectrale, 2° en prenant un nombre de capteurs suffisant, de manière à réduire le plus possible le nombre de sources surnuméraires de faible intensité.

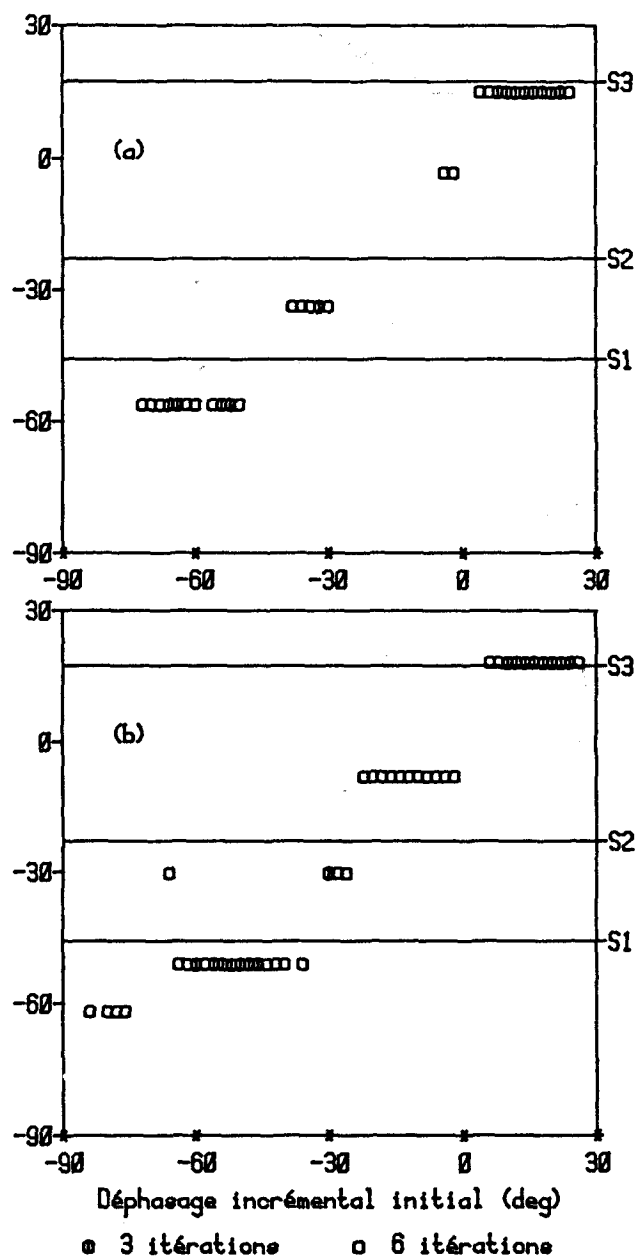


Fig. 14. — Déphasage incrémental moyen des fronts d'ondes estimés (de -90 à $+30^\circ$). Fronts d'ondes distordus des figures 9 (a), 11 et 12 (a). Deux épreuves avec bruits différents.

8. Gains complexes des capteurs inégaux

En ce qui concerne tout d'abord les inégalités de phase, celles-ci produisent des distorsions supplémentaires des fronts d'ondes apparents, sans que soit remis en cause, le bon fonctionnement de l'algorithme Q_u ; on peut espérer les identifier et, par suite, les compenser si l'on dispose d'un grand nombre d'épreuves, en raison de leur invariance dans le temps, car elles perturbent identiquement tous les fronts d'ondes estimés. Si les distorsions de phase sont trop importantes, elles compromettent le bon accrochage de l'algorithme.

Les inégalités de modules sont beaucoup plus nuisibles; en effet, les vecteurs-sources apparents, c'est-à-

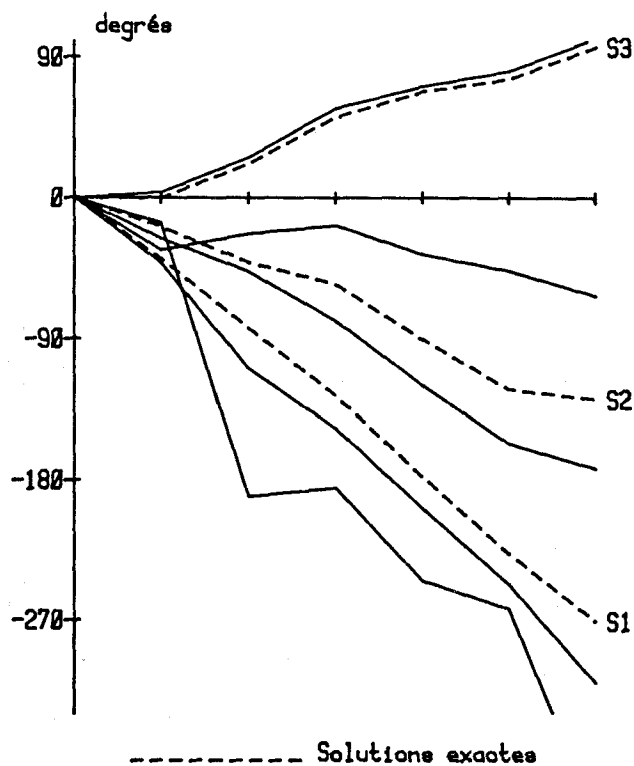


Fig. 15. — Fronts d'ondes estimés en présence de bruit (déphasage incrémental moyen compris entre -90 et 30°). Données de la figure 14 (b).

dire tels qu'ils peuvent être reconnus à la sortie des capteurs, ne sont alors plus conformes au modèle (45); il en résulte que l'algorithme Q_u ne donne de solutions conformes à ce modèle que dans la mesure où il en existe qui soient des combinaisons linéaires des vecteurs-sources apparents à modules inégaux. On conçoit que l'existence de telles solutions puisse être très peu probable et, de fait, pour autant que les modules soient très différents, on n'en trouve aucune, ce qui rend l'algorithme inutilisable. Il existe une solution radicale à ce problème, consistant à **exploiter la matrice des cohérences complexes à la place de la matrice interspectrale**, les éléments C_{ij} de cette matrice étant définis par

$$(62) \quad C_{ij} = \frac{\Gamma_{ij}}{\sqrt{\Gamma_{ii}\Gamma_{jj}}}$$

Il est facile de voir que les éléments C_{ij} dépendent des phases des gains complexes des capteurs, mais pas de leurs modules. Toutefois, ce procédé n'est applicable qu'à des sources non corrélées ou, à la rigueur, faiblement corrélées.

Si les sources sont corrélées, il faut utiliser la matrice interspectrale. La figure 16 met en évidence la dégradation notable des résultats de l'analyse faite à partir de cette matrice, avec les données des figures 9 (a) et 11, lorsqu'on introduit des disparités de modules présentant un écart quadratique moyen de seulement 5,3%. En outre, ainsi que le montre la figure 17, les fronts d'ondes des sources S1 et S2 sont estimés avec des erreurs importantes, tandis que la source S3 n'est plus détectée. Il est donc impératif, lorsqu'il n'est pas possible d'exploiter la matrice des cohérences complexes, d'identifier les gains complexes des capteurs, au moins en module, afin d'en compenser les inégalités.

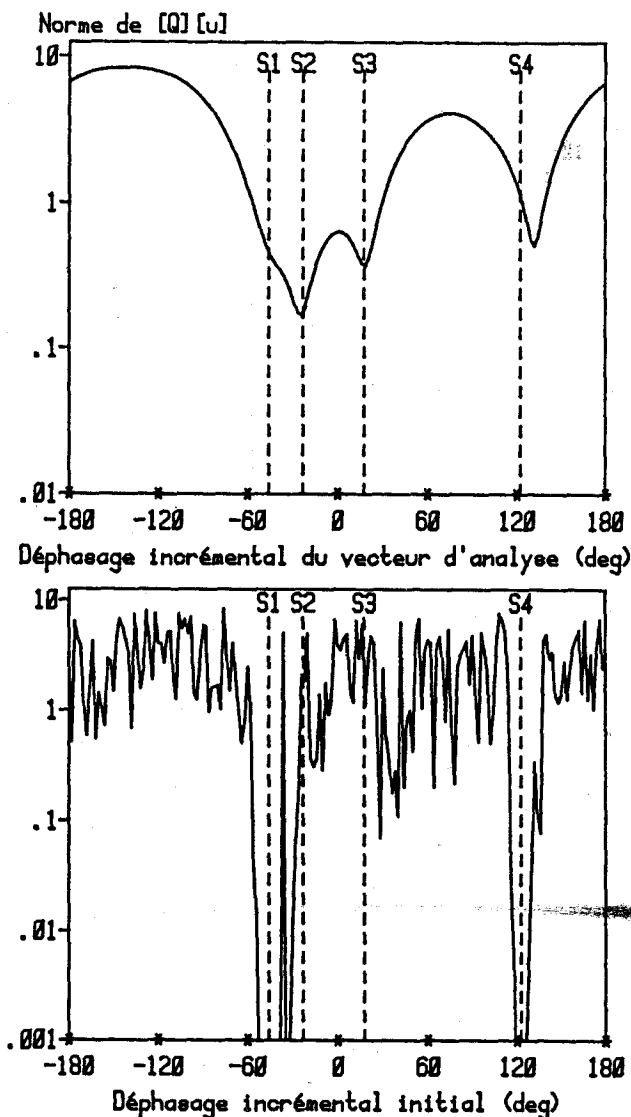


Fig. 16. — Données des figures 9 (a), 11 et 12 (a) (sans bruit). Gains des capteurs inégaux en module (dispersion 5%). En haut : analyse avec vecteur onde plane. En bas : après trois itérations de l'algorithme Q_u .

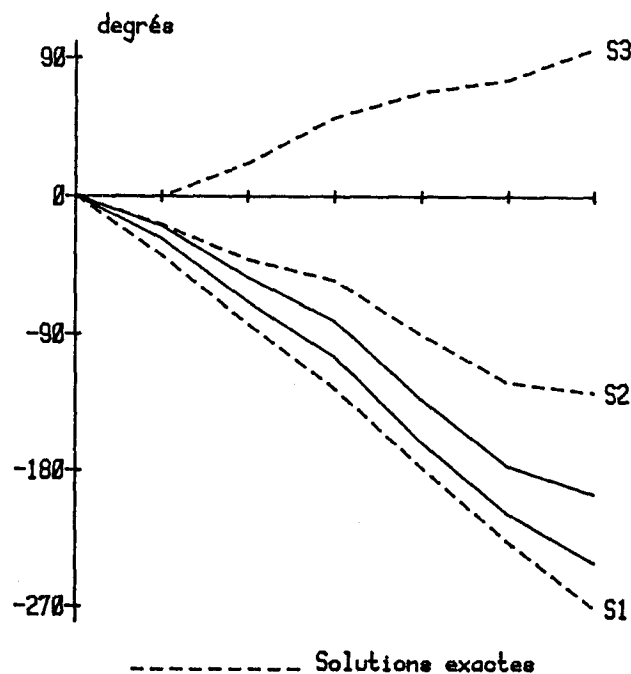


Fig. 17. — Fronts d'ondes estimés au voisinage des sources 1, 2 et 3. Données de la figure 16 (gains des capteurs inégaux en module).

Il peut être plus avantageux de réduire les corrélations entre sources en appliquant la technique de diversité mentionnée à la section 4; l'application de cette technique, outre qu'elle peut permettre d'utiliser la matrice de cohérence, améliore, comme on l'a vu, le contraste entre sources et bruit.

Conclusion

Parmi les idées quelque peu nouvelles que nous avons exprimées dans cet article, la première est que, plutôt que d'exploiter l'information contenue dans les éléments propres de la matrice interspectrale, on peut, de manière équivalente, utiliser la relation de dépendance linéaire entre les lignes de la matrice-sources (dont les colonnes sont formées par les vecteurs-sources), ce qui économise le calcul des éléments propres. En effet, les vecteurs-sources \mathbf{u}_p apparaissent comme étant solutions d'un système linéaire homogène s'écrivant sous forme matricielle $\mathbf{Q}\mathbf{u}=\mathbf{0}$, où la matrice \mathbf{Q} se calcule à partir de sous-matrices extraites de la matrice interspectrale des signaux captés.

En second lieu, ce que nous proposons consiste à rechercher des vecteurs-sources \mathbf{u} contenant le plus grand nombre possible de paramètres par source, méthode qui permet de serrer au plus près la réalité physique et, par suite, de réduire au maximum les hypothèses. Comme il est impossible d'identifier complètement les fronts d'ondes distordus en estimant simultanément tous les paramètres des vecteurs-sources (modules et phases), nous avons choisi d'estimer uniquement les phases, en admettant que les modules sont égaux. « L'algorithme itératif $\mathbf{Q}\mathbf{u}$ » que nous décrivons dans cet article permet de résoudre ce problème avec le strict minimum de capteurs nécessaire, soit $2n-1$ capteurs pour n sources, partiellement corrélées ou non. En l'absence de bruit, de deux à quatre itérations suffisent pour converger vers une solution, en partant d'une onde plane dont la pente est voisine de la pente moyenne du front d'onde distordu concerné.

La présence de bruit et le fait que les gains complexes des capteurs soient inégaux en module sont deux phénomènes qui compromettent le bon fonctionnement de l'algorithme, car ils s'opposent à l'existence de vecteurs-solutions dont les éléments aient même module. La question des inégalités de modules peut être entièrement résolue par l'utilisation de la matrice des cohérences complexes, du moins si les sources ne sont pas corrélées.

Finalement, pour réaliser l'identification de fronts d'ondes distordus, opération qui fournit une information riche en enseignements de toutes sortes, le prix à payer est qu'il faut, d'une part décorréler le plus possible les sources par une technique appropriée, d'autre part réduire le bruit à un niveau très bas; plus précisément, il est souhaitable que le contraste entre les valeurs propres de la matrice interspectrale liées aux sources et celles liées au bruit soit d'au moins 10 à 15 dB. Cette dernière condition implique qu'on ait pris un nombre de capteurs suffisants, que le coefficient de corrélation entre sources soit modéré (disons

au plus 50%), et que la matrice interspectrale soit estimée avec précision.

Il est à noter que l'algorithme $\mathbf{Q}\mathbf{u}$ pourrait être appliqué en utilisant le projecteur dans l'espace-bruit \mathbf{R} à la place de \mathbf{Q} . Il est à signaler en outre que Spitz [15], considérant que le bruit affecte surtout les éléments diagonaux de la matrice interspectrale, propose une méthode permettant de calculer l'opérateur \mathbf{P} servant à calculer \mathbf{Q} sans faire intervenir ces éléments diagonaux. Le préfiltrage spatial par sous-réseaux directs est également une technique qui permet d'améliorer le contraste entre valeurs propres-sources et valeurs propres-bruit.

Quant à l'existence de sources fantômes, dont les vecteurs-sources sont des combinaisons linéaires de ceux des vraies sources, il ne semble pas que ce soit un problème majeur. Tout d'abord, le nombre d'itérations nécessaires pour les trouver est généralement supérieur à celui que demandent les vraies sources; ensuite, l'écart quadratique moyen de leurs fronts d'ondes par rapport à l'onde plane est le plus souvent excessif; enfin, ces fantômes sont extrêmement instables en position d'une épreuve à l'autre, soit que la distorsion des fronts d'ondes réels ait varié, soit que la matrice de bruit ne soit pas la même.

Manuscrit reçu le 24 octobre 1986.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] W. F. GABRIEL, Spectral analysis and adaptive array superresolution techniques, *Proc. IEEE*, 68, June 1980, p. 654-666.
- [2] S. M. KAY et S. L. MARPLE, Spectrum analysis. A modern perspective, *Proc. IEEE*, 69, Nov. 1981, p. 1380-1419.
- [3] G. V. BORGIOTTI et L. J. KAPLAN, Superresolution of uncorrelated interference sources by using adaptive array technique, *IEEE Trans., Antennas Propag.*, AP-27, Nov. 1979, p. 842-845.
- [4] M. A. LAGUNAS et A. GASULL, An improved maximum likelihood method for power spectral density estimation, *IEEE Trans., Acoust. Speech, Signal Process.*, ASSP-32, Feb. 1984, p. 170-173.
- [5] G. BIENVENU et L. KOPP, Principe de la goniométrie passive adaptative, 7^e Coll. GRETSI, Nice, 1979, p. 106.1-106.10.
- [6] J. MUNIER et G. Y. DELISLE, De l'analyse spatiale continue à l'analyse paramétrique, 10^e Coll. GRETSI, Nice, 1985, p. 307-312.
- [7] W. S. LIGGETT, Passive Sonar: fitting models to multiple time series, *Proc. NATO ASI Signal Process.*, Loughborough, England, 1972, p. 327-345.
- [8] H. MERMOZ, Imagerie, corrélation et modèles, *Ann. Télécomm.*, 31, janv.-fév. 1976, p. 17-36.
- [9] S. S. REDDI, Multiple source location. A digital approach, *IEEE Trans., Aer. Electr. Syst.*, AES-15, Jan. 1979, p. 95-105.
- [10] G. BIENVENU et L. KOPP, Optimality of high resolution array processing using the eigensystem approach, *IEEE Trans., Acoust. Speech, Signal Process.*, ASSP-31, Oct. 1983, p. 1235-1248.

- [11] R. SCHMIDT, Multiple emitter location and signal parameter estimation, *Proc. RADC Spectral Estimation Workshop*, Rome, NY, 1979, p. 243-258, reproduit dans *IEEE Trans., Antennas Propag.*, AP-34, March 1986, p. 276-280.
- [12] G. BIENVENU et L. KOPP, Méthodes haute-résolution pour la localisation de sources rayonnantes, *Onde Electr.*, 64, août 1984, p. 28-37.
- [13] V. F. PISARENKO, The retrieval of harmonics from a covariance function, *Geophys. J.R. Astr. Soc.*, 33, 1973, p. 347-366.
- [14] G. VEZZOSI, Séparation de fronts d'ondes par redressement du facteur de Choleski de leur matrice interspectrale, *Ann. Télécomm.*, 37, sept.-oct. 1982, p. 425-439.
- [15] S. SPITZ, article soumis à *IEEE Trans., ASSP*.
- [16] M. WAX, T. J. SHAN et T. KAILATH, Spatio-temporal spectral analysis by eigenstructure methods, *IEEE Trans., Acoust. Speech, Signal Process.*, ASSP-32, Aug. 1984, p. 817-827.
- [17] T. J. SHAN, M. WAX et T. KAILATH, On spatial smoothing for direction-of-arrival estimation of coherent signals, *IEEE Trans., Acoust. Speech, Signal Process.*, ASSP-33, Aug. 1985, p. 806-811.
- [18] G. VEZZOSI, Estimation of phase angles from the cross-spectral matrix, *IEEE Trans., Acoust. Speech, Signal Process.*, ASSP-34, June 1986, p. 405-422.
- [19] J. MUNIER et G. Y. DELISLE, Spatial analysis in passive listening using adaptive techniques, *Proc. IEEE* (à paraître).