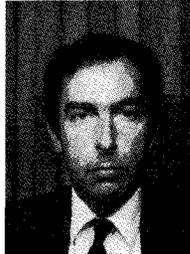


Équations intégrales pour les problèmes

à symétrie de révolution (*)

Integral equations for axisymmetric problems



André BERTHON

Société d'Études et Conseils AERO, 3, avenue de l'Opéra, 75001 PARIS.

Ancien Élève de l'ENS, Docteur ès Sciences, actuellement Directeur Scientifique à la Société AERO.

RÉSUMÉ

La diffusion des ondes par des obstacles conduit à des systèmes d'équations intégrales où les fonctions inconnues sont définies sur des surfaces. On montre que, lorsque le problème est à symétrie de révolution, il est possible et avantageux numériquement de se ramener à des équations intégrales dont les inconnues sont des fonctions d'une seule variable. On écrit l'expression explicite des noyaux singuliers correspondant aux opérateurs de l'acoustique et de l'électromagnétisme, on étudie leurs propriétés et on donne des méthodes de calcul efficaces. Comme exemple d'application on détermine, par calcul des courants de surface, les diagrammes de rayonnement et le rapport d'onde stationnaire d'un cornet conique corrugué.

MOTS CLÉS

Équations intégrales, corps de révolution, sources multimodes.

SUMMARY

Wave scattering by obstacles leads to systems of integral equations for unknown functions defined on a surface. We show that axisymmetric problems may be reduced to integral equations for unknown functions of a single variable, with a computational gain. The singular kernels relevant to the integral operators of acoustics and electromagnetism are written explicitly and their properties studied; methods are provided for their efficient computation. As an example we take a conical corrugated horn and determine, via a calculation of the superficial currents, its radiation patterns and standing wave ratio.

KEY WORDS

Integral equations, bodies of revolution, multimode feeds.

Introduction

Les problèmes de diffusion d'une onde par un obstacle se traduisent par des systèmes d'équations intégrales, parce que le champ diffusé dans le domaine extérieur peut être considéré (principe de Huyghens) comme rayonné par des sources portées par la surface de l'obstacle, qui se déduisent des champs superficiels : dérivée normale de la pression pour un obstacle mou en acoustique, pression pour un obstacle rigide, champ magnétique tangentiel pour un conducteur

(*) Cette étude a été financée par la DRET dans le cadre du marché n° 79/564.

parfait en électromagnétisme, champs électrique et magnétique tangentiels pour un diélectrique, champ des déplacements et de leurs dérivées pour un solide élastique, etc. Les équations intégrales ont pour inconnues ces distributions de sources. Elles expriment que le champ total à l'extérieur et, pour un obstacle pénétrable, à l'intérieur, vérifie les conditions aux limites appropriées sur la surface. Comme ces conditions portent sur le champ en tout point de la surface, lequel dépend en particulier des sources portées par ce même point, les opérateurs intégraux ont en général des noyaux singuliers, ce qui impose certaines précautions dans la résolution numérique.

Il existe de nombreuses variantes des expressions intégrales de Kirchhoff [1], d'où différentes méthodes d'équations intégrales [2]. Leur résolution numérique emploie en général la méthode des moments [3], qui passe par le choix d'une famille de fonctions de base pour développer les distributions inconnues, par la limitation du développement à un nombre fini de termes et par le choix d'un système fini d'équations pour approximer, par collocation ou projection, les équations initiales.

Les inconnues sont des fonctions de deux variables. Quand l'obstacle possède la symétrie de révolution il est naturel, et usuel, de choisir des fonctions de base factorisées, dépendant de la variable azimutale comme $\cos m\theta$ ou $\sin m\theta$.

Le problème se sépare suivant les différentes valeurs de m et devient, pour chaque m , unidimensionnel. Les auteurs (voir [4, 5, 6] pour des applications récentes en électromagnétisme) utilisent en général la forme intégral-différentielle des équations, où les noyaux des opérateurs ont des singularités faibles. C'est que le traitement numérique des singularités est délicat pour des fonctions définies sur une surface. Mais lorsqu'on dispose de la symétrie de révolution et qu'on se ramène à des fonctions d'une seule variable, l'abscisse curviligne, les singularités sont calculables analytiquement. C'est pourquoi dans l'approche présentée ici on part de l'écriture intégrale des équations dans laquelle toutes les dérivations portent sur la fonction de Green. Les noyaux des opérateurs intégraux à une dimension sont alors plus compliqués et plus singuliers, ce qui impose d'une part une étude approfondie de leurs propriétés analytiques, d'autre part la recherche d'algorithmes rapides pour les calculer; on ne gagnerait évidemment rien si l'on devait effectuer numériquement les intégrations azimutales qu'ils contiennent. Cet effort initial permet d'aboutir à un outil général et performant. Le choix des fonctions de base à une dimension pour la méthode des moments n'est pas limité, en particulier on peut employer une méthode de collocation avec des fonctions constantes par intervalles (ce choix s'impose, pour des raisons pratiques, lorsque la méridienne présente des arêtes nombreuses comme celle d'un cornet corrugué). D'autre part la singularité même des noyaux est une aide parce qu'elle augmente la stabilité des systèmes linéaires approximants.

La méthode exposée ici a été développée dans le cadre de travaux sur l'optimisation de sources microondes multimodes effectués pour le CETHEDC. Les résultats présentés constituent le premier exemple de calcul direct des courants sur un cornet corrugué partant de la formulation exacte du problème. Cette application montre de plus comment utiliser la méthode des équations intégrales dans un cas où l'excitation n'est pas entièrement donnée; elle permet en effet de calculer le(s) coefficient(s) de réflexion de la source pour le(s) mode(s) propagé(s) par le guide d'onde qui l'alimente.

Depuis lors cette méthode a été mise en œuvre, et vérifiée expérimentalement, pour un grand nombre de sources et d'ensembles source-rélecteur [7, 8]. On a voulu en donner ici un exposé général qui montre que

son intérêt ne se limite pas aux problèmes d'électromagnétisme.

La section 1 contient un bref rappel des opérateurs intégraux de l'acoustique et de l'électromagnétisme. La section 2 traite la réduction du problème à des opérateurs intégraux unidimensionnels et donne l'expression de leurs noyaux. La section 3 concerne la résolution numérique. Dans la section 4 on présente un exemple d'application de la méthode à un cornet conique corrugué.

1. Équations intégrales

1.1. PRINCIPE GÉNÉRAL

On considère des problèmes harmoniques à la fréquence $\omega/2\pi$, le milieu extérieur étant homogène et isotrope. Le moyen le plus simple d'établir les équations intégrales pour la diffusion d'un champ incident Φ_i par un obstacle de surface Σ consiste à partir des équations du champ libre et de leur fonction de Green, qui est un opérateur si le champ Φ est à plusieurs composantes. Soit Φ_d le champ diffusé, tel que $\Phi = \Phi_i + \Phi_d$ soit le champ total à l'extérieur de Σ . Son unicité est assurée par la condition d'onde sortante de Sommerfeld.

Appliqué à $(\chi_{\text{ext}} \Phi_d)$, où χ_{ext} est la fonction caractéristique du volume extérieur, l'opérateur de propagation \mathcal{P} ($\equiv \Delta + k^2$ pour un champ scalaire) donne, au sens des distributions [9] :

$$(1) \quad \mathcal{P}(\chi_{\text{ext}} \Phi_d) = \chi_{\text{ext}} \mathcal{P}(\Phi_d) + S(\Phi_d) = S(\Phi_d)$$

où S est une distribution de support Σ qui dépend linéairement des valeurs de Φ_d et de ses dérivées sur la surface; le premier terme est nul puisque Φ_d n'a pas de sources dans le volume extérieur. D'où, si G est la fonction de Green remplissant la condition d'onde sortante :

$$(2) \quad \chi_{\text{ext}} \Phi_d = G * S(\Phi_d)$$

où $*$ désigne une convolution, tous les indices tensoriels étant omis.

Le champ incident n'ayant pas de sources dans le volume intérieur on a, de manière analogue à (1), $\mathcal{P}(\chi_{\text{int}} \Phi_i) = -S(\Phi_i)$ où $\chi_{\text{int}} = 1 - \chi_{\text{ext}}$. Il en résulte, pour le champ total :

$$(3) \quad \chi_{\text{ext}} \Phi = G * S(\Phi) + \Phi_i$$

Les équations (2) et (3) sont des expressions intégrales de Kirchhoff exprimant le champ en un point du volume extérieur comme intégrale de surface. Les équations intégrales vérifiées par les termes de source s'obtiennent en écrivant les conditions aux limites sur la surface, qui sont de la forme $D\Phi = 0$ où D est aussi un opérateur linéaire aux dérivées partielles, ce qui donne symboliquement le système d'équations intégrales :

$$(4) \quad D(G * S(\Phi)) = -D(\Phi_i)$$

En général le produit de convolution devient singulier lorsqu'on l'évalue en un point de la surface et il faut

définir correctement le passage à la limite. D'autre part il peut y avoir plusieurs formulations possibles, ainsi en électromagnétisme pour les obstacles conducteurs, les conditions aux limites pour le champ magnétique \mathbf{E} et pour le champ électrique \mathbf{H} fournissent deux équations intégrales de types différents.

Dans les exemples qui suivent on se limitera aux cas de surfaces impénétrables. Pour des obstacles pénétrables il faut établir aussi les équations de Kirchhoff du domaine intérieur afin d'écrire les conditions de raccordement; elles sont identiques aux équations du domaine extérieur, mais la constante de propagation, dont dépend la fonction de Green, est différente (on la note $k = \omega/c$, c étant la vitesse de propagation) [11, 4].

On n'abordera pas non plus la question déjà abondamment traitée [12] de savoir comment lever l'indétermination du problème extérieur pour une surface fermée lorsqu'on est au voisinage d'une fréquence de résonance du volume intérieur. Dans le calcul du rayonnement d'une source, exemple présenté ci-après, la question ne se pose pas car l'opérateur intégral à inverser a pour support une surface ouverte (section 4).

1.2. EXEMPLES TRAITÉS

En acoustique Φ est un champ scalaire représentant la pression acoustique. L'équation de Helmholtz :

$$(5) \quad (\Delta + k^2) \Phi = 0$$

admet pour fonction de Green :

$$(6) \quad \varphi(x, x') = \varphi(\mathbf{r}) = e^{-ikr}/4\pi r$$

où $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$. Le champ total s'écrit à l'extérieur de Σ :

$$(7) \quad \Phi(x) = \int_{\Sigma} \left\{ \Phi(x') \frac{\partial \Phi}{\partial n}(\mathbf{r}) - \frac{\partial \Phi}{\partial n}(x') \varphi(\mathbf{r}) \right\} dx' + \Phi_i(x)$$

où $\partial f/\partial n$ est la projection du gradient de f sur la normale unitaire \hat{n} orientée vers l'extérieur de Σ .

Pour un corps mou la condition aux limites est $\Phi(x') = 0$ et la distribution inconnue

$$\mu(x') = (\partial \Phi / \partial n)(x')$$

obéit à l'équation :

$$(8) \quad \int_{\Sigma} \mu(x') \varphi(\mathbf{r}) dx' = \Phi_i(x)$$

Pour un corps rigide la condition aux limites est $(\partial \Phi / \partial n)(x') = 0$, d'où une équation où l'intégrale doit être définie comme limite lorsque x , extérieur à Σ , tend vers $x_0 \in \Sigma$; ce qui donne, en notant \int une intégrale prise en valeur principale :

$$(9) \quad \frac{1}{2} \Phi(x_0) - \int_{\Sigma} \Phi(x') \frac{\partial \varphi}{\partial n}(\mathbf{r}) dx' = \Phi_i(x_0)$$

Dans l'exemple de l'électromagnétisme Φ est le couple (\mathbf{E}, \mathbf{H}) , S se compose des densités de courant superficiel magnétique $\mathbf{K} = \hat{n} \wedge \mathbf{E}$ et électrique $\mathbf{J} = \hat{n} \wedge \mathbf{H}$, où \hat{n} est la normale unitaire extérieure à Σ . L'équation (1) prend la forme :

$$\begin{aligned} \text{rot}(\chi_{\text{ext}} \mathbf{E}) + i\omega\mu(\chi_{\text{ext}} \mathbf{H}) &= \hat{n} \wedge \mathbf{E} \delta_{\Sigma} \\ \text{rot}(\chi_{\text{ext}} \mathbf{H}) - i\omega\varepsilon(\chi_{\text{ext}} \mathbf{E}) &= \hat{n} \wedge \mathbf{H} \delta_{\Sigma} \end{aligned}$$

où ε et μ sont les constantes électrique et magnétique du milieu; δ_{Σ} est la distribution définie par la mesure de Dirac portée par la surface [10, 13]. En prenant le rotationnel de ces deux équations et en les combinant on obtient deux équations au double rotationnel pour $(\chi_{\text{ext}} \mathbf{E})$ et $(\chi_{\text{ext}} \mathbf{H})$, qui s'intègrent sous la forme (2), où l'opérateur G fait intervenir cette fois la fonction de Green de l'équation de Helmholtz et ses dérivées d'ordre un et deux. En explicitant les produits de convolution on obtient la version électromagnétique de l'équation (3) sous la forme :

$$(10) \quad \chi_{\text{ext}} \mathbf{E}(x) = -i\omega\mu \int_{\Sigma} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \mathbf{J}(x') dx' + \int_{\Sigma} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \wedge \mathbf{K}(x') dx' + \mathbf{E}^{\text{inc}}(x)$$

$$(11) \quad \chi_{\text{ext}} \mathbf{H}(x) = \int_{\Sigma} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \wedge \mathbf{J}(x') dx' + i\omega\varepsilon \int_{\Sigma} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \mathbf{K}(x') dx' + \mathbf{H}^{\text{inc}}(x)$$

où \mathbf{A} est la matrice 3×3 et \mathbf{B} le vecteur de composantes :

$$(12) \quad A_{ij} = \delta_{ij} \varphi + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$(13) \quad B_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

et où les champs incidents sont notés $\mathbf{E}^{\text{inc}}, \mathbf{H}^{\text{inc}}$.

Les conditions aux limites portent sur les composantes tangentielles des champs sur la surface. Lorsque dans les expressions (8) et (9) le point de calcul tend vers un point x_0 de la surface, de normale \hat{n}_0 , les projections $\hat{n}_0 \wedge \mathbf{E}$ et $\hat{n}_0 \wedge \mathbf{H}$ ont des limites, que l'on peut expliciter en isolant un élément de surface autour du point de calcul et en faisant tendre sa dimension vers zéro : ce qui équivaut à interpréter les intégrales divergentes en valeur principale, ou encore au sens des distributions sur Σ . Concrètement les deux noyaux singuliers \mathcal{E} et \mathcal{H} sur l'espace des champs de vecteurs tangents à Σ et de classe C^1 :

$$(14) \quad \hat{n}_0 \wedge \mathcal{E} \mathbf{J}(x_0) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \hat{n}_0 \wedge \left\{ \int_{\Sigma - \Sigma_{\eta}} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \mathbf{J}(x') dx' - \frac{1}{4k^2 \eta} \mathbf{J}(x_0) \right\}$$

$$(15) \quad \hat{n}_0 \wedge \mathcal{H} \mathbf{J}(x_0) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \hat{n}_0 \wedge \int_{\Sigma - \Sigma_{\eta}} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \wedge \mathbf{J}(x') dx'$$

Σ_η désignant l'intersection de Σ avec la boule de centre x_0 et de rayon η . Les limites des projections $\hat{n}_0 \wedge (\mathbf{E} - \mathbf{E}^{inc})$ et $\hat{n}_0 \wedge (\mathbf{H} - \mathbf{H}^{inc})$ lorsque x tend vers x_0 à l'extérieur de Σ sont respectivement :

$$\frac{1}{2} \mathbf{K}(x_0) + \hat{n}_0 \wedge [\mathcal{H} \mathbf{K}(x_0) - i\omega\mu \mathcal{E} \mathbf{J}(x_0)]$$

et

$$\frac{1}{2} \mathbf{J}(x_0) + \hat{n}_0 \wedge [\mathcal{H} \mathbf{J}(x_0) + i\omega\epsilon \mathcal{E} \mathbf{K}(x_0)]$$

2. Application aux surfaces de révolution

2.1. DESCRIPTION DES SURFACES (fig. 1)

L'axe de révolution étant Oz, $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ les vecteurs unitaires portés par les axes d'un trièdre orthonomé, on pose :

$$\begin{aligned} \hat{x}_\theta &= \cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y} \\ \hat{y}_\theta &= -\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{y} \end{aligned}$$

Toutes les surfaces que l'on considère sont engendrées par la rotation autour de Oz d'une méridienne que l'on suppose deux fois continûment différentiable par

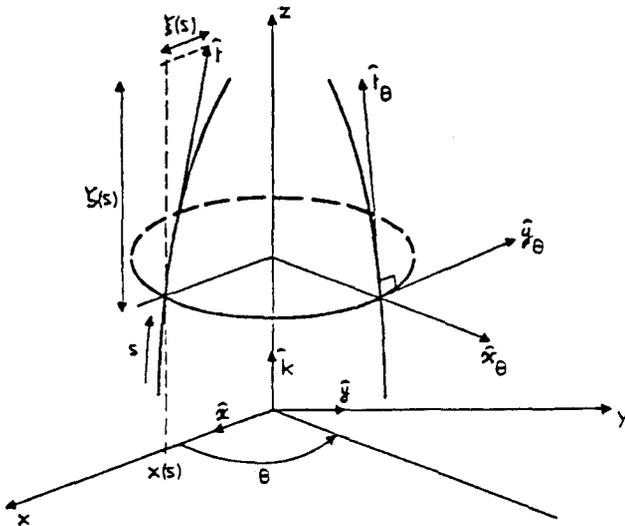


Fig. 1. — Géométrie de révolution.

morceaux. En coordonnées cylindriques z, ρ, θ les équations paramétriques de la surface sont $z = z(s), \rho = \rho(s), s$ étant une abscisse curviligne de la méridienne. Le point courant est repéré par s et par son angle azimutal θ . La tangente à la méridienne passant par ce point porte le vecteur :

$$\hat{t}_\theta(s) = \frac{d\rho}{ds} \hat{x}_\theta + \frac{dz}{ds} \hat{z}$$

qui est unitaire en raison du choix de l'abscisse curviligne comme paramètre. Le vecteur unitaire normal à la surface, dont l'orientation est déterminée par celle

de l'axe de méridienne, est alors :

$$\hat{n}_\theta(s) = \hat{y}_\theta \wedge \hat{t}_\theta = \frac{dz}{ds} \hat{x}_\theta - \frac{d\rho}{ds} \hat{z}$$

2.2. ÉQUATIONS INTÉGRALES DE L'ACOUSTIQUE

Pour un corps mou c'est l'équation (8). Développons μ et Φ_i en série de Fourier de l'angle azimutal θ , les coefficients μ_n et $\Phi_{i,n}$ sont fonction de l'abscisse curviligne s et l'équation s'écrit :

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_L \mu_n(s') e^{in\theta'} \varphi(r) \rho(s') ds' d\theta' \\ = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_{i,n}(s) e^{in\theta} \end{aligned}$$

Soit (z, ρ, θ) et (z', ρ', θ') les coordonnées cylindriques des points d'abscisse s et s' , soit $\alpha = \theta - \theta'$; la distance entre les points s'écrit :

$$(16) \quad r = [(\rho - \rho')^2 + (z - z')^2 + 2\rho\rho'(1 - \cos \alpha)]^{1/2}$$

En posant :

$$(17) \quad G_n(s, s') = \int_0^{2\pi} e^{-in\alpha} \varphi(r) d\alpha$$

on obtient, pour chaque mode, l'équation intégrale à une dimension :

$$(18) \quad \int_L \mu_n(s') G_n(s, s') \rho(s') ds' = \Phi_{i,n}(s)$$

Pour un corps rigide l'équation (9) a pour inconnue la fonction Φ elle-même sur la surface, que l'on développe de même en série de Fourier. Introduisons les fonctions :

$$\begin{aligned} \varphi_1(r) &= \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} \\ G_n^1(s, s') &= \int_0^{2\pi} e^{-in\alpha} \varphi_1(r) d\alpha \end{aligned}$$

En notant ξ et ζ (resp. ξ' et ζ') les valeurs de $d\rho/ds$ et dz/ds au point s (resp. s') on peut écrire :

$$\begin{aligned} \nabla \varphi &= \varphi_1 \mathbf{r} = \varphi_1(r) (\rho \hat{x}_\theta - \rho' \hat{x}'_\theta + Z \hat{z}) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} &= \varphi_1(r) (\rho \zeta - \rho' \zeta \cos \alpha - \zeta Z) \end{aligned}$$

Z désigne la différence $z - z'$. La projection de l'équation (9) sur les modes azimutaux donne alors pour chacun d'eux l'équation intégrale à une dimension :

$$(19) \quad \frac{1}{2} \Phi_n(s) - \int_L \left[\rho \zeta G_n^1 - \rho' \zeta \frac{G_{n+1}^1 + G_{n-1}^1 - \zeta Z G_n^1}{2} \right] \times \rho(s') \Phi_n(s') ds' = \Phi_{i,n}(s)$$

Comme les équations de l'électromagnétisme l'équation (9) doit être interprétée en valeur princi-

pale, ainsi que ses projections (19), dont les noyaux à une dimension présentent des singularités en $|s-s'|^{-1}$. Au contraire dans les équations (18) on a une intégration ordinaire, les noyaux ayant une singularité logarithmique en $s=s'$.

3.3. ÉQUATIONS INTÉGRALES DE L'ÉLECTROMAGNÉTISME

Ici les noyaux opèrent comme on l'a vu sur un champ de vecteurs tangents à la surface. On le décompose en une composante longitudinale et une composante transversale, d'où le développement de Fourier :

$$\mathbf{J}(s, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (J_{1n}(s)\hat{t}_\theta + J_{2n}(s)\hat{y}_\theta) e^{in\theta}$$

et un développement analogue pour l'image de \mathbf{J} par les opérateurs \mathcal{E} ou \mathcal{H} , ce qui définit pour chaque mode azimutal deux matrices 2×2 de noyaux scalaires $\mathcal{E}_{ij}^n(s, s')$ et $\mathcal{H}_{ij}^n(s, s')$ avec $i, j=1, 2$. Ainsi, pour un obstacle conducteur parfait [$\mathbf{K}=0$ dans les équations (10)-(11)] l'équation intégrale du champ magnétique, qui exprime l'égalité entre \mathbf{J} et $\hat{n} \wedge \mathbf{H}$ sur la surface, se projette suivant :

$$(20) \quad \frac{1}{2} J_{in}(s) - \sum_{j=1}^2 R_{ij} \sum_{k=1}^2 \int_L \mathcal{H}_{jk}^n(s, s') J_{kn}(s') \rho(s') ds' = \sum_{j=1}^2 R_{ij} H_n^{inc}(s)$$

Les R_{ij} sont les éléments de matrice de la rotation de $\pi/2$ autour de la normale, qui fait passer de \mathbf{H} à $\hat{n} \wedge \mathbf{H}$: $R_{11}=0, R_{12}=-1, R_{21}=1, R_{22}=0$.

L'équation intégrale du champ électrique exprime la nullité de $\hat{n} \wedge \mathbf{E}$, ou encore $\mathcal{E} \mathbf{J} = -\hat{n} \wedge \mathbf{E}^{inc}$. L'expression (14) de l'opérateur \mathcal{E} doit être modifiée pour les surfaces de révolution; on peut choisir en effet arbitrairement la surface Σ_η , pourvu qu'elle soit symétrique autour du point de calcul à la limite $\eta \rightarrow 0$, le coefficient du terme en $\mathbf{J}(x_0)/\eta$ dépendant évidemment de ce choix. Avec Σ_η de révolution, c'est-à-dire définie par $|s-s_0| < \eta$, l'équation intégrale du champ électrique admet les projections suivantes sur les modes azimutaux :

$$(21) \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} \left\{ \int_{|s-s_0| > \eta} -i\omega\mu \sum_{j=1}^2 \mathcal{E}_{ij}^n(s, s') J_{jn}(s') \rho(s') ds' - \frac{i\omega\mu}{\pi k^2 \eta} J_{1n}(s_0) \delta_{i1} \right\} = -E_{in}^{inc}(s)$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker. Seul le noyau \mathcal{E}_{11}^n présente une singularité en $|s-s'|^{-2}$, les autres singularités sont du premier ordre.

Les expressions complètes des noyaux \mathcal{E}_{ij}^n et \mathcal{H}_{ij}^n sont listées dans les tableaux I et II. Les notations sont les

suivantes :

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_k(r) &= \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^k \varphi(r), \quad k=0, 1, 2 \\ G_n^k(a^2, b^2) &= \int_0^{2\pi} \varphi_k(r) e^{-in\alpha} d\alpha \\ a^2 &= (\rho - \rho')^2 + Z^2 \\ b^2 &= \rho\rho' \end{aligned} \right.$$

On vérifie la symétrie des opérateurs, qui sont transposés lorsqu'on échange s et s' , et les propriétés de parité qui se traduisent, lorsqu'on change n en $-n$, par l'invariance des termes diagonaux et un changement de signe des termes non diagonaux pour \mathcal{E} , qui est de parité positive, et la situation opposée pour \mathcal{H} , qui est de parité négative.

TABLEAU I

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{11}^n &= \frac{1}{2} \xi \xi' \left(G_{n+1}^0 + G_{n-1}^0 + \frac{G_{n+1}^1 + G_{n-1}^1}{k^2} \right) \\ &\quad + \zeta \zeta' \left(G_n^0 + \frac{G_n^1}{k^2} \right) - \frac{b^2}{4} \xi \xi' (G_{n+2}^2 + G_{n-2}^2) / k^2 \\ &\quad + \left(Z^2 \zeta \zeta' - \frac{3}{2} b^2 \xi \xi' + Z \zeta' \rho \xi - Z \zeta \rho' \xi' \right) G_n^2 / k^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} (\rho \xi' Z \zeta - \rho' \xi Z \zeta') (G_{n+1}^2 + G_{n-1}^2) / k^2 \\ \mathcal{E}_{12}^n &= i \frac{\xi}{2} \left(G_{n+1}^0 - G_{n-1}^0 + \frac{2n G_n^0}{k^2 b^2} \right) \\ &\quad + i (\rho \xi + Z \zeta) \rho \frac{G_{n+1}^2 - G_{n-1}^2}{2k^2} \\ &\quad - i \rho \rho' \xi \frac{G_{n+2}^2 - 2G_n^2 + G_{n-2}^2}{2k^2} \\ \mathcal{E}_{21}^n &= -i \frac{\xi'}{2} \left(G_{n+1}^0 - G_{n-1}^0 + \frac{2n G_n^0}{k^2 b^2} \right) \\ &\quad - i (\rho' \xi' - Z \zeta) \rho' \frac{G_{n+1}^2 - G_{n-1}^2}{2k^2} \\ &\quad + i \rho \rho' \xi' \frac{G_{n+2}^2 - 2G_n^2 + G_{n-2}^2}{2k^2} \\ \mathcal{E}_{22}^n &= \frac{1}{2} \left(G_{n+1}^0 + G_{n-1}^0 + \frac{G_{n+1}^1 + G_{n-1}^1}{k^2} \right) \\ &\quad - \frac{1}{4} \rho \rho' \frac{G_{n+2}^2 + G_{n-2}^2 - 2G_n^2}{k^2} \end{aligned}$$

TABLEAU 2

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{11}^n &= i \frac{n}{b^2} (\rho' \zeta' \xi - \rho \xi' \zeta + Z \xi \xi') G_n^0 \\ \mathcal{H}_{12}^n &= \frac{1}{2} (\rho \zeta - Z \xi) (G_{n+1}^1 + G_{n-1}^1) - \rho' \zeta G_n^1 \\ \mathcal{H}_{21}^n &= \frac{1}{2} (\rho' \zeta' + Z \xi') (G_{n+1}^1 + G_{n-1}^1) - \rho \zeta' G_n^1 \\ \mathcal{H}_{22}^n &= i \frac{n}{b^2} Z G_n^0 \end{aligned}$$

3. Considérations de calcul numérique

La discrétisation des équations intégrales et la résolution posent trois problèmes : choix des fonctions de

base, traitement des singularités, temps de calcul. Le choix des fonctions de base doit être adapté à la géométrie du problème. Dans l'application présentée plus loin, qui concerne un cornet conique corrugué, la densité des cannelures impose pratiquement des fonctions de base constantes par intervalle. On trouvera une discussion plus générale dans un autre article [8].

En ce qui concerne le temps de calcul, tout repose sur la durée nécessaire au calcul des fonctions G_n^p pour un couple de points. Ces fonctions dépendent de deux variables, par exemple le carré de la distance entre les points a^2 et le produit des distances à l'axe de révolution b^2 . On montre tout d'abord qu'elles se déduisent toutes linéairement des fonctions d'ordre $p=0$ et des deux premières fonctions d'ordre 1, G_0^1 et G_1^1 . On distingue ensuite trois cas, auxquels correspondent trois méthodes de calcul.

— $a \ll \lambda$, où λ est la longueur d'onde. Les termes singuliers sont alors dominants. Ils s'écrivent :

$$(23) \left\{ \begin{array}{l} G_n^0(a^2, b^2) = -2 \frac{\text{Log}|ka|}{4\pi b} + o(1) \\ G_0^1(a^2, b^2) \\ \quad = -\frac{1}{2\pi a^2 b} + \left(k^2 + \frac{1}{4b^2}\right) \frac{\text{Log}|ka|}{4\pi b} + o(1) \\ G_1^1(a^2, b^2) \\ \quad = -\frac{1}{2\pi a^2 b} + \left(k^2 - \frac{3}{4b^2}\right) \frac{\text{Log}|ka|}{4\pi b} + o(1) \end{array} \right.$$

Ces formules sont établies dans l'annexe en utilisant des intégrales auxiliaires ayant mêmes singularités que celles de la formule (22) mais intégrables analytiquement. En calculant les différences entre les fonctions G_n^0 , G_0^1 , G_1^1 et leurs intégrales auxiliaires respectives par intégration numérique pour deux valeurs de a , typiquement $\lambda/10$ et $\lambda/100$, on obtient, pour b donné, des développements à l'ordre 2 dont la précision est largement suffisante.

— $a \gg b^2/\lambda$. Dans ce cas on peut utiliser l'approximation de Fraunhofer et se ramener au calcul de quelques fonctions de Bessel cylindriques suivant les formules données en annexe.

— Cas général. L'intégration numérique sur α est évidemment impraticable. Mais le développement en fonctions sphériques de la fonction de Green $\varphi(r)$ permet d'obtenir, pour les différentes intégrales G_n^p , des développements en série dont le calcul est suffisamment rapide [15]. Notons que, jusqu'à quelques centaines de points de discrétisation, le temps d'unité centrale requis par la résolution du système linéaire reste faible devant celui qui est nécessaire au calcul des éléments de matrice.

Tous ces résultats sont explicités et démontrés en annexe.

Quant aux singularités, leur présence est une aide plutôt qu'une gêne dès lors qu'on dispose des expressions analytiques des parties singulières. La contribution au point s de l'intervalle d'intégration $|s-s'| < \eta$ se calcule explicitement à l'aide des développements limités à l'ordre 2 des fonctions G_n^p et des fonctions $\rho(s)$, $z(s)$ qui définissent la méridienne, la formule finale dépendant de la méthode des moments choisie. Il en résulte que les éléments de matrice « diagonaux » qui font intervenir « l'action du point sur lui-même » se calculent plus vite que les autres.

4. Application à un cornet de révolution

4.1. PROBLÈME POSÉ

On prend comme exemple le problème suivant : étant donné une source microonde à symétrie de révolution, de méridienne donnée (fig. 2) déterminer le rapport d'onde stationnaire et le diagramme de rayonnement en fonction de la fréquence.

L'application présentée concerne un cornet corrugué. Ce type de source est fréquemment utilisé en particulier parce qu'il permet d'obtenir un diagramme de

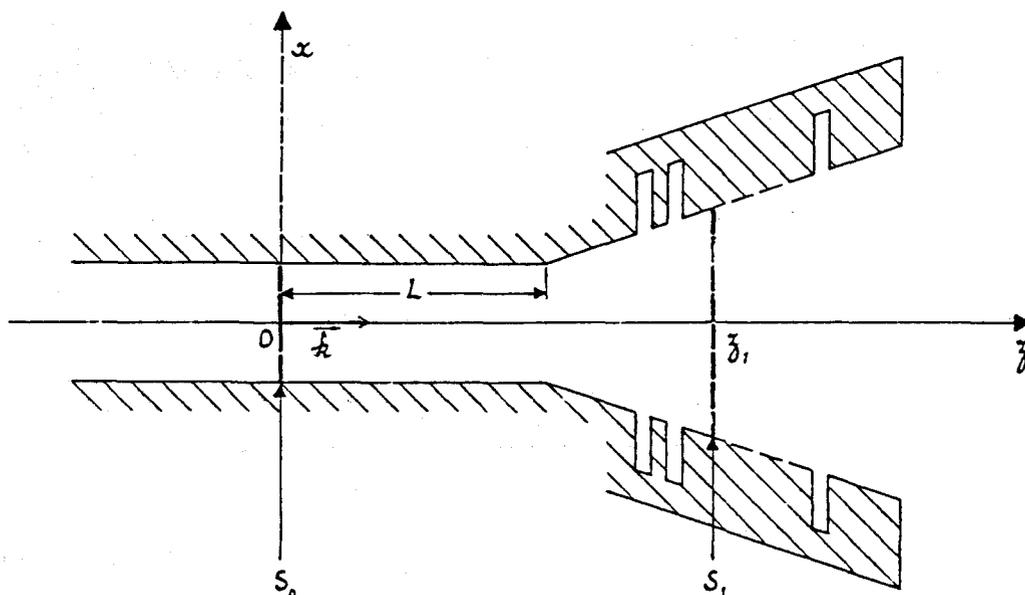


Fig. 2. — Géométrie du cornet.

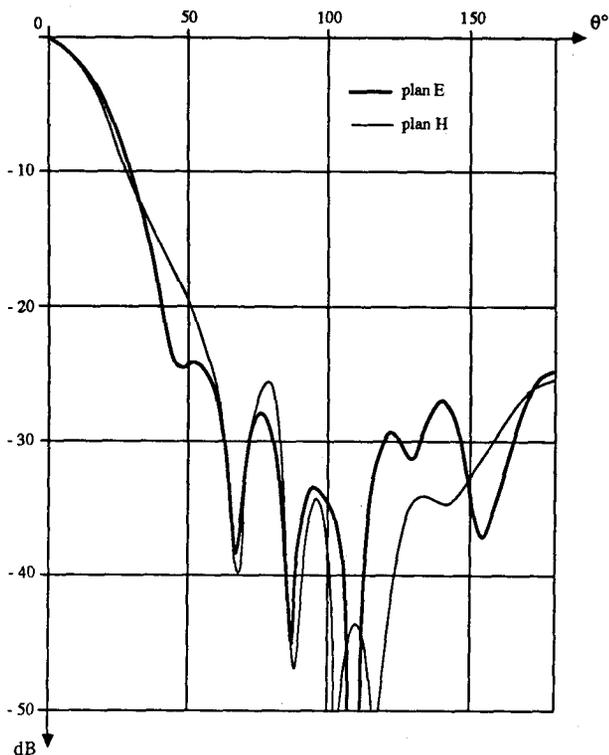


Fig. 3. - Diagrammes de rayonnement, fréquence f_1 .

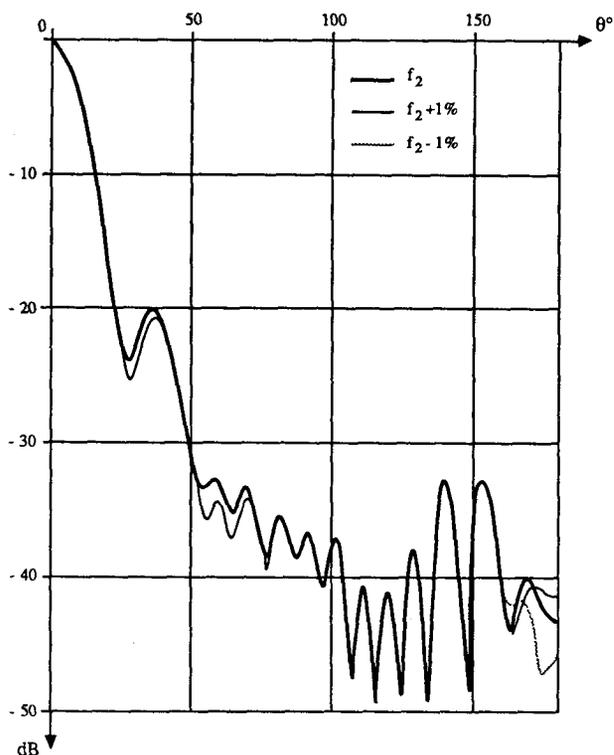


Fig. 4 a. - Diagrammes de rayonnement, fréquence f_2 , plan E.

rayonnement pratiquement symétrique avec une bonne largeur de bande (voir les figures 3 et 4 où le diagramme est représenté dans le plan E contenant le champ électrique d'excitation et dans le plan H perpendiculaire). Le cornet corrugué a été étudié jusqu'ici à l'aide de modèles approchés visant à déterminer ses modes de propagation moyennant certaines hypothèses sur la configuration du champ électromagnétique dans les rainures [14]. Par la présente méthode on obtient directement un champ électromagnétique vérifiant partout les équations de Maxwell et les conditions aux limites.

Pour cela on calcule la densité de courant \mathbf{J} sur la surface du cornet, ce qui permettra si on le désire d'étudier la répartition du champ à l'intérieur et dans la zone proche aussi bien qu'à l'infini. On appelle Σ la surface de révolution dont la méridienne est constituée par une certaine longueur L de la paroi interne du guide d'onde qui alimente le cornet et par la paroi métallique du cornet, y compris le bord de son ouverture et la surface externe. On appelle S la section du guide située à la distance L de l'entrée du cornet et on place l'origine des coordonnées en son centre.

La surface constituée par S et Σ sépare l'espace en deux régions : en amont, du côté des z négatifs, se trouve la source d'énergie qui excite le guide. De l'autre côté il n'y a pas de source libre et le champ peut s'écrire à l'aide des distributions de sources électriques $\mathbf{J} \delta_{\Sigma}$, $(\hat{z} \wedge \mathbf{H}) \delta_{\Sigma}$ et de sources magnétiques $(\hat{z} \wedge \mathbf{E}) \delta_S$. Les inconnues du problème sont non seulement \mathbf{J} mais encore les champs transversaux dans le guide sur le plan $z=0$. Mais ces derniers peuvent être remplacés par une famille de variables complexes en décomposant le champ à l'intérieur du guide suivant

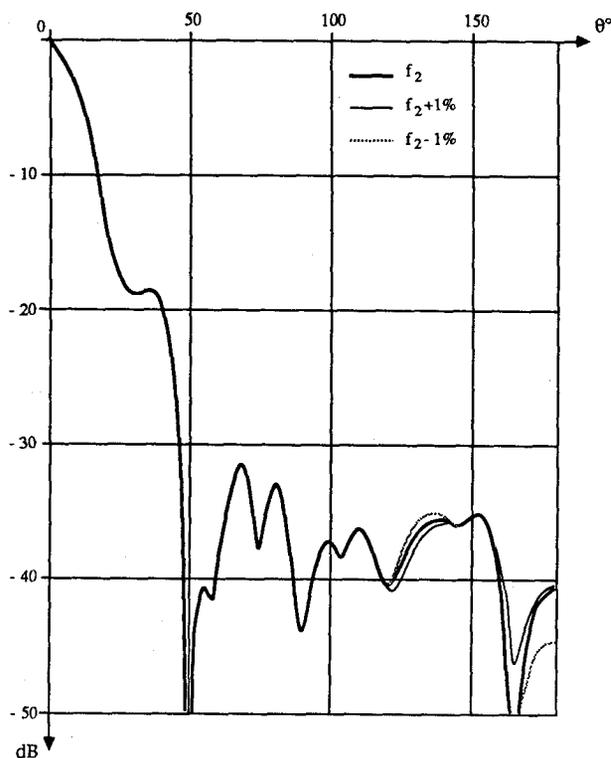


Fig. 4 b. - Diagrammes de rayonnement, fréquence f_2 , plan H.

la suite discrète de ses modes. Tout d'abord chaque mode correspond à un indice azimutal n , et on a vu que les problèmes se séparent pour les différentes valeurs de n . Celui-ci étant fixé, indexons par l'indice unique j la suite des modes TE_{nj} et TM_{nj} et soit κ_j le

nombre d'ondes du j -ième mode à la fréquence que l'on considère. On connaît pour chaque mode le champ électrique transversal \mathbf{e}_j et le champ magnétique transversal \mathbf{h}_j , normalisés par le flux du vecteur de Poynting :

$$\int_S (\mathbf{e}_j \wedge \mathbf{h}_j) \cdot \hat{z} dS = 1$$

(On suppose ici que la polarisation est rectiligne et la même pour tous les modes.)

Le développement général du champ dans un guide d'onde permet d'écrire les champs transversaux sur la section droite d'abscisse z sous la forme :

$$(24) \quad \begin{cases} \hat{z} \wedge \mathbf{E} = \sum_j (a_j e^{-i\alpha_j z} - b_j e^{i\alpha_j z}) \mathbf{Z}_j \hat{z} \wedge \mathbf{e}_j \\ \hat{z} \wedge \mathbf{H} = \sum_j (a_j e^{-i\alpha_j z} + b_j e^{i\alpha_j z}) \hat{z} \wedge \mathbf{h}_j \end{cases}$$

a_j est l'amplitude complexe de l'onde progressive correspondant au mode, le rapport $\gamma_j = b_j/a_j$ est le coefficient de réflexion pour ce mode. Un nombre fini de modes se propage; pour ceux dont la fréquence de coupure est supérieure à celle de l'excitation la constante κ_j est imaginaire, ce qui implique (en choisissant $\text{Im } \kappa_j > 0$) $\gamma_j = 0$. Les modes évanescents sont présents au voisinage de la discontinuité constituée par la jonction guide-cornet en $z=L$. Au niveau de la section S leur contribution aux développements (24) est donc atténuée d'un facteur $\exp(-\text{Im } \kappa_j L)$. Si on choisit la longueur de garde L assez grande pour que ce facteur soit négligeable dès le premier mode coupé, on peut donc considérer que les champs transversaux sur S dépendent d'un nombre fini de coefficients.

4.2. RÉOLUTION

Il convient de généraliser les notations pour distinguer les opérateurs attachés à des surfaces différentes. Pour les champs rayonnés dans tous l'espace par des sources superficielles [formules (10) et (11)] on posera :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\Sigma; \mathbf{J})(x) &= -i\omega\mu \int_{\Sigma} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \mathbf{J}(x') dx' \\ \mathbf{H}(\Sigma; \mathbf{J})(x) &= \int_{\Sigma} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \wedge \mathbf{J}(x') dx' \end{aligned}$$

De même les champs de vecteurs tangentiels définis par les formules (14) et (15) seront notés $\mathcal{E}(\Sigma; \mathbf{J})$ et $\mathcal{H}(\Sigma; \mathbf{J})$.

En un point quelconque du demi-espace $z > 0$ le champ électrique est donné par :

$$(25) \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}(\Sigma; \mathbf{J}) + \mathbf{H}(S; \hat{z} \wedge \mathbf{E}) + \mathbf{E}(S; \hat{z} \wedge \mathbf{H})$$

sur la surface métallique Σ le champ électrique tangentiel s'annule, d'où l'équation intégrale du champ électrique :

$$(26) \quad \hat{n} \wedge \mathcal{E}(\Sigma; \mathbf{J}) = -\hat{n} \wedge \mathbf{H}(S; \hat{z} \wedge \mathbf{E}) - \hat{n} \wedge \mathbf{E}(S; \hat{z} \wedge \mathbf{H})$$

qui détermine \mathbf{J} si le champ incident du second membre est connu; celui-ci dépend linéairement des coefficients inconnus a_j, b_j , et pour les déterminer on utilise la continuité du champ de part et d'autre de la surface S . En tout point de S le second membre de (25) multiplié vectoriellement par \hat{z} doit tendre vers $\hat{z} \wedge \mathbf{E}$ lorsque z tend vers zéro. Compte tenu de ce que $\mathcal{H} \equiv 0$ du fait que S est une surface plane, il vient :

$$(27) \quad \frac{1}{2} \hat{z} \wedge \mathbf{E} = \hat{z} \wedge \mathbf{E}(\Sigma; \mathbf{J}) + \mathcal{E}(S; \hat{z} \wedge \mathbf{H})$$

\mathbf{J} étant une fonction linéaire de (a_j, b_j) en vertu de l'équation (26), et $\hat{z} \wedge \mathbf{E}, \hat{z} \wedge \mathbf{H}$ également, l'équation vectorielle ci-dessus fournit, pour chaque point de S , deux relations linéaires homogènes entre ces paramètres. Comme ils sont à déterminer à un facteur près (on peut se fixer par exemple l'amplitude complexe du premier mode, ou bien la puissance totale traversant S et une phase) il suffit d'écrire l'équation (27) pour autant de points qu'il y a de modes pour obtenir un système linéaire dont la résolution achève la détermination du courant et du champ électromagnétique dans le guide d'onde.

En pratique on procède donc en quatre étapes. La première consiste à discrétiser l'opérateur \mathcal{E} et à établir la matrice correspondante comme indiqué dans la section précédente. On calcule ensuite pour chaque mode, les quantités $\hat{n} \wedge \mathbf{H}(S; \hat{z} \wedge \mathbf{e}_j)$ et $\hat{n} \wedge \mathbf{E}(S; \hat{n} \wedge \mathbf{h}_j)$ en tout point de discrétisation de Σ . La troisième étape consiste à résoudre les versions discrétisées des équations :

$$(28) \quad \begin{cases} \mathcal{E}(\Sigma; \mathbf{J}_j) = -\hat{n} \wedge \mathbf{H}(S; \hat{z} \wedge \mathbf{e}_j) \\ \mathcal{E}(\Sigma; \mathbf{J}'_j) = -\hat{n} \wedge \mathbf{E}(S; \hat{z} \wedge \mathbf{h}_j) \end{cases}$$

c'est-à-dire deux systèmes linéaires par mode, différant seulement par leurs seconds membres. Les fonctions $\mathbf{e}_j, \mathbf{h}_j$ sont fournies par la théorie du guide circulaire. Dans la dernière étape, ayant fait choix d'un ensemble de points sur le rayon du guide à l'abscisse $z=0$, on calcule en ces points les champs électriques transversaux rayonnés par Σ lorsque cette surface porte les densités de courant \mathbf{J}'_j et \mathbf{J}_j . Pour chaque point on obtient les équations :

$$(29) \quad \sum_j \left\{ \frac{1}{2} (a_j - b_j) \hat{z} \wedge \mathbf{e}_j - (a_j - b_j) \hat{z} \wedge \mathbf{E}(\Sigma; \mathbf{J}_j) - (a_j + b_j) \hat{z} \wedge \mathbf{E}(\Sigma; \mathbf{J}'_j) - (a_j + b_j) \mathcal{E}(S, \hat{z} \wedge \mathbf{h}_j) \right\} = 0$$

d'où l'on déduit les coefficients a_j et b_j à un facteur près.

Il faut remarquer qu'il y a de nombreuses façons d'obtenir ces coefficients puisque le choix des points est arbitraire. Si un seul mode se propage, un point suffit pour donner deux déterminations du rapport $\gamma_1 = b_1/a_1$. Ces deux déterminations doivent être non seulement égales mais indépendantes du point choisi. Dans le cas où il y a plusieurs modes on a une redondance analogue pour un ensemble de points donné. Chaque composante des équations (28) fournit

une détermination de $\{a_j, b_j\}$ à un facteur près, qui doit être la même et ne pas dépendre des points choisis. En pratique on observe toujours une légère dépendance due aux erreurs numériques, il y a avantage à utiliser des points éloignés de la paroi du guide, car la précision du calcul des opérateurs \mathcal{E} et \mathcal{H} diminue lorsqu'on s'en approche. Mais on dispose avec cette redondance d'un instrument de vérification de la cohérence de la méthode. L'échec de cette vérification indiquant que le nombre de modes pris en compte est insuffisant, soit qu'un mode guidé ait été oublié, soit qu'un mode évanescent soit proche de la coupure et que la longueur de garde L soit trop petite. Dans le premier cas, il faut augmenter le nombre de systèmes à résoudre, dans le second allonger L , donc augmenter la taille de la matrice de l'opérateur \mathcal{E} .

On a supposé dans ce qui précède une polarisation linéaire unique pour tous les modes. Si ce n'est pas le cas chaque mode doit être remplacé par une combinaison linéaire de deux modes ayant des polarisations orthogonales; la même procédure s'applique, le nombre de coefficients (a_j, b_j) étant doublé.

4. 3. EXEMPLE D'APPLICATION

La source étudiée est un cornet conique corrugué (fig. 2) comportant 12 rainures, de demi-angle au sommet 15° . La méridienne est subdivisée en une centaine d'intervalles, les arêtes coïncidant évidemment avec des limites d'intervalles. Sur la paroi externe du cornet les courants sont calculés jusqu'à environ $0,5\lambda$ de l'ouverture, distance à laquelle ils sont déjà négligeables. Pour un tel problème le temps de calcul consacré à la résolution des systèmes linéaires est faible par rapport à celui qu'il faut pour déterminer les éléments de la matrice et les seconds membres. De même, une fois obtenus les courants sur le cornet, le temps nécessaire pour calculer les diagrammes de rayonnement est négligeable. Lorsque le point de calcul s'éloigne indéfiniment les expressions des opérateurs \mathcal{E} et \mathcal{H} se simplifient considérablement, les seules fonctions qui interviennent sont du type G_n^0 , leurs expressions comme produits d'un terme angulaire par le facteur d'onde sphérique e^{-ikR}/R sont explicitées dans l'annexe.

Le calcul a été effectué aux fréquences f_1 et f_2 pour lesquelles la profondeur des rainures est respectivement de $0,27\lambda$ et $0,41\lambda$. La figure 3 présente les diagrammes de rayonnement dans le plan E et le plan H à la fréquence basse, pour laquelle le rapport d'onde stationnaire obtenu est 1,496. Les figures 4a et 4b montrent les diagrammes de rayonnement à la fréquence haute, ainsi que leurs sensibilités à une variation de $\pm 1\%$ de la fréquence. Les r. o. s. sont de 1,016, 1,017 et 1,019 aux fréquences $0,99 f_2$, f_2 et $1,01 f_2$ respectivement. Enfin, à cette fréquence, outre le mode fondamental TE_{11} de nombre azimutal $m=1$, un mode symétrique TM_{01} (de nombre azimutal $m=0$) se propage dans le guide, dont le diagramme a un zéro dans l'axe du cornet et peut être utilisé en poursuite. La figure 5 présente ce diagramme et sa sensibilité aux variations de fréquence. Les r. o. s. sont ici de 1,215, 1,217 et 1,218 aux trois mêmes fréquences que ci-dessus.

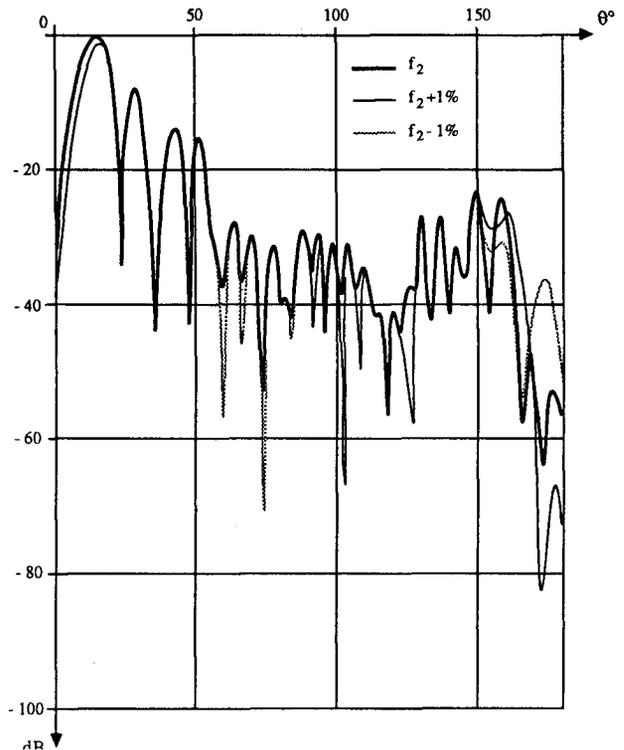


Fig. 5. — Diagramme de rayonnement, fréquence f_2 , mode TM_{01} .

4. Conclusion

On a décrit une méthode d'équations intégrales à une dimension pour les problèmes à géométrie de révolution. L'exemple d'application illustre l'intérêt de cette méthode pour l'étude du rayonnement de structures à symétrie de révolution. D'autres applications, notamment à des structures comportant source et réflecteur, ont été effectuées au CNET, et l'accord avec les résultats expérimentaux est excellent [8]. Un autre champ d'application possible est celui de la diffusion d'ondes planes. Dans ce cas la décomposition du champ incident fait intervenir tous les modes azimutaux, sauf si l'illumination est axiale (alors $m=1$). En pratique on peut se limiter à un nombre de modes de l'ordre de kR , R étant le plus grand rayon de la structure. La taille de celle-ci dans la direction axiale fixe donc, sachant qu'il faut quelques points de discrétisation par longueur d'onde, la taille du système linéaire à résoudre pour chaque mode : leur nombre N est fixé par la dimension transversale.

Les systèmes linéaires à résoudre pour chaque mode ont des matrices pleines, difficiles avec les moyens actuels à traiter lorsque leurs dimensions excèdent quelques centaines. Ceci limite en pratique le domaine d'utilisation de la méthode à des structures de révolution dont la longueur de méridienne ne dépasse pas quelques dizaines de λ . C'est le domaine usuel d'application des équations intégrales.

Enfin il faut remarquer que le formalisme qui utilise la symétrie de révolution pour découpler les différents modes azimutaux serait de peu d'utilité si l'on ne disposait pas des méthodes exposées en annexe pour

effectuer rapidement les intégrations azimutales qui fournissent les coefficients de Fourier de la fonction de Green et de ses dérivées.

Remerciements

Je remercie M. Bouix, qui a été à l'origine de cette étude, et dont les commentaires m'ont été très utiles pour améliorer la rédaction de cet article.

Annexe

Propriétés des fonctions G_n^i

On peut réécrire la définition (22) :

$$(A.1) \quad G_n^i(a^2, b^2) = \int_0^{2\pi} \varphi_i(r) \cos n\alpha \, d\alpha$$

où $i=0, 1$ ou 2 avec $\varphi_0 = \varphi$, et r est la distance entre les points de coordonnées cylindriques $(z, \rho, 0)$ et (z', ρ', α) donnée par la formule (16). La distance entre deux points dépend de trois paramètres seulement. On choisira, outre l'azimut α , la distance minimale a obtenue pour $\alpha=0$ et la moyenne géométrique $b = (\rho\rho')^{1/2}$. On a donc :

$$(A.2) \quad r^2 = a^2 + 4b^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

En explicitant φ_2 on obtient :

$$\varphi_2(r) = \left(\frac{3}{r^2} + \frac{3ik}{r} - k^2 \right) \frac{e^{-ikr}}{r^3} = (-k^2 \varphi - 3\varphi_1) / r^2$$

1. Relation de récurrence

Compte tenu de la relation entre φ_0, φ_1 et φ_2 il vient :

$$(A.3) \quad k^2 G_n^0 + 3G_n^1 = - \int_0^{2\pi} \left(a^2 + 4b^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) \varphi_2 \cos n\alpha \, d\alpha = -(a^2 + 2b^2) G_n^2 + b^2 (G_{n-1}^2 + G_{n+1}^2)$$

en notant que la définition de G_n^i s'étend aux valeurs négatives de n . Par ailleurs, pour a^2 et b^2 fixés, la dérivée de φ_i par rapport à α n'est autre que $b^2 \sin \alpha \varphi_{i+1}$ d'où, en intégrant par parties la formule (A.1) pour $n \neq 0$:

$$(A.4) \quad G_{n+1}^{i+1} - G_{n-1}^{i+1} = \frac{2n}{b^2} G_n^i$$

En appliquant (A.3) pour $n=0$ et $n=1$, et (A.4) pour $n=i=1$ on obtient trois relations qui permettent

d'écrire :

$$(A.5) \quad \begin{cases} G_0^2 = - \frac{a^2 + 2b^2}{a^2(a^2 + 4b^2)} (3G_0^1 + k^2 G_0^0) \\ \quad \quad \quad - \frac{2b^2}{a^2(a^2 + 4b^2)} (G_1^1 + k^2 G_1^0) \\ G_1^2 = - \frac{2b^2}{a^2(a^2 + 4b^2)} (3G_0^1 + k^2 G_0^0) \\ \quad \quad \quad - \frac{a^2 + 2b^2}{a^2(a^2 + 4b^2)} (G_1^1 + k^2 G_1^0) \\ G_2^2 = G_0^2 + \frac{2}{b^2} G_1^1 \end{cases}$$

Par application répétée de (A.4) toutes les fonctions G_n^1 s'expriment analytiquement à partir des deux premières G_0^1, G_1^1 , et des fonctions G_n^0 . Compte tenu des formules ci-dessus et de la récurrence (A.4) il en est donc de même des fonctions G_n^2 . On est donc ramené au calcul des fonctions G_0^0, G_1^0 et G_n^0 de $n=0$ à la valeur maximale exigée par le problème.

2. Développements en série

Si on pose :

$$(A.6) \quad r_{\pm} = \frac{1}{2} (\sqrt{a^2 + 4b^2} \pm a)$$

le développement classique de la fonction de Green s'écrit [15] :

$$(A.7) \quad \frac{e^{-ikr}}{r} = \frac{-ik}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \times j_l(kr_-) h_l(kr_+) P_l(\cos \alpha)$$

j_l, h_l, P_l étant respectivement la fonction de Bessel sphérique, la fonction de Hankel de deuxième espèce sphérique et le polynôme de Legendre d'ordre l . Or les intégrales des polynômes de Legendre sont connues analytiquement [15] :

$$(A.8) \quad \begin{cases} \int_0^{2\pi} P_{2l}(\cos \alpha) \, d\alpha = 2\pi g_l^2 \\ g_l^2 = \frac{1.3 \dots (2l-1)}{2.4 \dots (2l)} \end{cases}$$

D'où une série (ne contenant que des termes pairs) dont la somme est G_0^0 :

$$(A.9) \quad G_0^0(a^2, b^2) = \frac{-ik}{2} \sum_{l=0}^{\infty} (4l+1) \times g_l^2 j_{2l}(kr_-) h_{2l}(kr_+)$$

De même l'égalité :

$$(A.10) \quad \int_0^{2\pi} P_{2l+1}(\cos \alpha) \cos \alpha \, d\alpha = 2\pi g_l g_{l+1}$$

fournit une série dont la somme est G_1^0 . A partir de la relation de récurrence des polynômes de Legendre et des relations (A.8) et (A.10) on trouve facilement leurs intégrales pondérées par les puissances successives de $\cos \alpha$, d'où l'on déduit :

$$(A.11) \quad \int_0^{2\pi} P_{2l}(\cos \alpha) \cos 2\alpha \, d\alpha = 2\pi \frac{l(2l+1)}{(2l-1)(l+1)} g_l^2$$

et ainsi de suite, ce qui fournit les développements en série des fonctions G_n^0 . Pour trouver ceux de G_0^1 et G_1^1 on dérive d'abord l'égalité (A.7) par rapport à $\cos \alpha$; comme $r \, dr = -2b^2 \, d \cos \alpha$, il vient :

$$(A.12) \quad \varphi_1(r) = \frac{ik}{4\pi b^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \times j_l(kr_-) h_l(kr_+) P_l'(\cos \alpha).$$

L'équation différentielle vérifiée par les polynômes de Legendre implique :

$$(A.13) \quad \frac{d^2}{d\alpha^2} P_n(\cos \alpha) = \cos \alpha P_n'(\cos \alpha) - n(n+1) P_n(\cos \alpha)$$

d'où, en intégrant par rapport à α :

$$(A.14) \quad \int_0^{2\pi} P_{2l}(\cos \alpha) \cos \alpha \, d\alpha = 2\pi \times 2l(2l+1) g_l^2.$$

Les développements cherchés sont donc :

$$(A.15) \quad \left\{ \begin{aligned} G_0^1 &= \frac{ik}{2b^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)^2 (4l+3) \times g_l^2 j_{2l+1}(kr_-) h_{2l+1}(kr_+) \\ G_1^1 &= \frac{ik}{2b^2} \sum_{l=0}^{\infty} 2l(2l+1) \times (4l+1) j_{2l}(kr_-) h_{2l}(kr_+). \end{aligned} \right.$$

Les séries obtenues pour G_n^0 se comportent asymptotiquement, à un facteur près, comme la série géométrique de raison r_-/r_+ , et les séries (A.15) comme des dérivées de celle-ci. Elles convergent donc d'autant plus lentement que le rapport r_-/r_+ est plus proche de 1, c'est-à-dire que a est plus petit. Le nombre de termes à retenir pour avoir une précision donnée est proportionnel à b/a . Une fois calculées les fonctions sphériques $j_l(kr_-)$ et $h_l(kr_+)$ jusqu'à l'ordre voulu toutes les fonctions G_n^i nécessaires s'obtiennent rapidement à l'aide des formules qui précèdent.

3. Parties principales

Lorsque a s'annule la fonction de Green $\varphi_0(r)$ présente un pôle simple pour $\alpha=0$ ($r \sim \alpha/2$) et la fonction $\varphi_1(r)$ un pôle triple. Les intégrales (A.1) ne sont

pas définies. Plutôt que d'étudier directement leur comportement sur la formule de définition il est commode de les comparer à des fonctions exprimables analytiquement, en remarquant que remplacer $\cos n\alpha$ par $\cos \alpha/2$ dans l'intégrale ne change pas la nature des singularités mais conduit à une intégration explicite. Plus précisément on définit :

$$(A.16) \quad \left\{ \begin{aligned} \tilde{G}_0(a^2, b^2) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \cos \frac{\alpha}{2} \, d\alpha \\ \tilde{G}_0^1(a^2, b^2) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos \alpha/2}{r^3} \times \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) + \frac{k^2 \cos \alpha/2}{2r} \right) \, d\alpha \\ \tilde{G}_1^1(a^2, b^2) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos \alpha/2}{r^3} \times \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(k^2 - \frac{1}{b^2} \right) \frac{\cos \alpha/2}{r} \right) \, d\alpha \end{aligned} \right.$$

où les intégrales sont tels que leurs différences avec ceux de G_n^0 , G_0^1 , G_1^1 respectivement soient régulières pour $\alpha=0$ lorsque a s'annule. Il s'ensuit que les différences $G_n^0 - \tilde{G}_0$, etc. sont continues en $a=0$. Or les fonctions (A.16) sont des combinaisons de termes qui, en faisant le changement de variables $t=2 \sin \alpha/2$, s'écrivent :

$$\int_0^1 \frac{t^p \, dt}{\sqrt{a^2 + b^2 t^2}}$$

et se calculent analytiquement pour $a \neq 0$. D'où les développements des fonctions G_n^i au voisinage de $a=0$:

$$G_n^0(a^2, b^2) = -\frac{1}{2\pi b} \text{Log} |ka| + O(1)$$

$$G_0^1(a^2, b^2) = -\frac{1}{2\pi a^2 b} + \left(k^2 + \frac{1}{4b^2} \right) \frac{\text{Log} |ka|}{4\pi b} + O(1)$$

$$G_1^1(a^2, b^2) = -\frac{1}{2\pi a^2 b} + \left(k^2 - \frac{3}{4b^2} \right) \frac{\text{Log} |ka|}{4\pi b} + O(1).$$

4. Expression approchée aux grandes distances

Lorsque la distance a entre les deux points est grande par rapport à b la variation de r lorsque l'angle azimutal α varie entre 0 et 2π devient inférieure à

λ , la phase de e^{-ikr} varie peu et l'on peut utiliser l'approximation de Fraunhofer :

$$(A.17) \quad \left\{ \begin{aligned} r &= r_+ \left(1 - \frac{r_-}{r_+} \cos \alpha \right) + O(r_-^2/r_+) \\ \frac{r_-}{r_+} &= \frac{b^2}{a^2} + O\left(\frac{b^4}{a^4}\right). \end{aligned} \right.$$

En écrivant également les puissances négatives de r au premier ordre en r_-/r_+ on obtient des fonctions linéaires de $\cos \alpha$; l'intégrale du produit d'un polynôme en $\cos \alpha$ par la phase $\exp(-ikr_- \cos \alpha)$ s'exprime à l'aide des fonctions de Bessel cylindriques de (kr_-) . On obtient :

$$(A.18) \quad \left\{ \begin{aligned} G_0^0 &= \frac{e^{-ikr_+}}{2r_+} \left[J_0(kr_-) + i \frac{r_-}{r_+} J_1(kr_-) \right] \\ G_1^0 &= \frac{e^{-ikr_+}}{2r_+} \left[i J_1(kr_-) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{r_-}{r_+} (J_0(kr_-) - J_2(kr_-)) \right] \\ G_2^0 &= \frac{e^{-ikr_+}}{2r_+} \left[-J_2(kr_-) \right. \\ &\quad \left. + i \frac{r_-}{2r_+} (J_1(kr_-) - J_3(kr_-)) \right] \\ G_0^1 &= \frac{e^{-ikr_+}}{2r_+^2} \left[-ik \left(J_0(kr_-) + 2i \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{r_-}{r_+} J_1(kr_-) \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{r_+} \left(J_0(kr_+) + 3i \frac{r_-}{r_+} J_1(kr_-) \right) \right] \\ G_1^1 &= \frac{e^{-ikr_+}}{2r_+^2} \left[k J_1(kr_-) - ik \right. \\ &\quad \left. \frac{r_-}{r_+} (J_0(kr_-) - J_2(kr_-)) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{r_+} \left(i J_1(kr_-) + \frac{3}{2} \frac{r_-}{r_+} (J_0(kr_-) - J_2(kr_-)) \right) \right]. \end{aligned} \right.$$

Manuscrit reçu le 28 octobre 1986.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. STRATTON, *Electromagnetic Theory*, McGraw Hill, 1941.
- [2] R. MITTRA éd., *Computer Techniques for Electromagnetics*, Pergamon Press, 1973.
- [3] R. F. HARRINGTON, *Field Computation by Moment Methods*, The MacMillan Company, 1968, 223 p.
- [4] L. N. MEDGYESI-MITSCHANG et J.M. PUTNAM, *Electromagnetic Scattering from Axially Inhomogeneous Bodies of Revolution*, *IEEE Trans. AP*, 32, n° 8, 1984, p. 797-806.
- [5] L. N. MEDGYESI-MITSCHANG et J.M. PUTNAM, *Integral Equation Formulations for Imperfectly Conducting Scatterers*, *IEEE Trans. AP*, 33, n° 2, p. 206-214.
- [6] J.R. MAUTZ et R.F. HARRINGTON, *H-Field, E-Field and Combined-Field Solutions for Conducting Bodies of Revolution*, *AEUe*, 32, 1978, p. 157-164.
- [7] R. BILLS, *Problème extérieur pour les équations de Maxwell; application aux antennes de révolution*, *Thèse de doctorat de 3° cycle*, Nice, 1982.
- [8] A. BERTHON et R. BILLS, *Integral Equations Analysis of Radiating Structures of Revolution*, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* (à paraître).
- [9] M. BOUX, *Les discontinuités du rayonnement électromagnétique*, Dunod, 1966, 246 p.
- [10] M. BOUX, *Réponse impulsionnelle d'une antenne électromagnétique et applications possibles*, *Revue du CETHEDC*, n° 75, 2° trimestre 1983.
- [11] C. MUELLER, *Foundations of the Mathematical Theory of Electromagnetic Waves*, Springer Verlag, New York, 1969.
- [12] C.M. PIASZCZYK et J.M. KLOSNER, *Acoustic Radiation from Vibrating Surfaces at Characteristic Frequencies*, *JASA*, 75, n° 2, 1984, p. 363-375.
- [13] I.M. GUELFAND et G.E. CHILOV, *Les distributions*, 1, Dunod, 1962.
- [14] A.W. LOVE éd., *Electromagnetic Horn Antennas*, IEEE Press, 1976.
- [15] A. ERDELYI et al., *Higher Transcendental Functions*, 2, 1953, p. 102 et 178-183, McGraw Hill, New York.