

# Bornes de Cramer-Rao

## en traitement d'antenne.

### Deuxième partie : applications

Cramer-Rao bounds and array processing. Part two: applications



#### Laurent KOPP

THOMSON-SINTRA (ASM), BP n° 153, 06801 CAGNES-SUR-MER CEDEX.

X (71), Ingénieur ENST. A THOMSON depuis 1980 en tant qu'Ingénieur d'études en traitement du signal. Thèmes de recherche : méthodes adaptatives et Haute-Résolution dans le domaine du sonar passif, Évaluation des performances des systèmes sonars.



#### Dominique THUBERT

THOMSON-SINTRA, Activités Sous-Marines, 1, avenue Aristide-Briand, 94117 ARCUEIL CEDEX.

ESPCI (76), spécialisation Automatique ESE, Ingénieur d'études Travaux de recherche sur l'évaluation des performances en traitement d'antenne pour des applications sonar.

### RÉSUMÉ

Cet article constitue la seconde partie d'un essai de synthèse sur le calcul des bornes de Cramer-Rao en traitement d'antenne. Le formalisme introduit dans la première partie est appliqué ici à quelques problèmes d'intérêt en acoustique sous-marine. L'objectif est surtout de montrer l'utilité et l'efficacité de la méthode plus qu'une discussion approfondie des exemples choisis.

#### MOTS CLÉS

Traitement d'antenne, bornes de Cramer-Rao.

### SUMMARY

*This paper is the second part of a tutorial on the Cramer-Rao bound in array processing. The first one aimed to introduce the formalism, here a few examples are studied in details in order to illustrate the usefulness of the formalism and the type of conclusions which may be drawn from the computation.*

#### KEY WORDS

*Array processing, Cramer-Rao bounds.*

### 1. Introduction

Dans la première partie de cet essai de synthèse [1], un formalisme a été décrit permettant d'unifier le calcul des bornes de Cramer-Rao dans des problèmes de traitement d'antenne.

Les calculs ont été présentés pour toute une chaîne de situations de généralité décroissante :

- hypothèses gaussiennes;
- sonar passif dans le « cas général »;
- cas d'un seul bruiteur;
- modèle retard pur;
- antenne rectiligne périodique.

Ces situations ont été résumées sous forme de quatre tableaux rappelés ci-dessous.

Cette seconde partie supposera du lecteur la connaissance de la première partie, elle est constituée de la discussion de six exemples choisis de manière à compléter le formalisme sur certains points et également pour leur intérêt propre.

L'objectif recherché a surtout été de montrer la généralité et l'efficacité du formalisme sur des situations assez variées, de ce fait les exemples traités n'ont pas toujours pu être approfondis autant qu'il aurait été souhaitable (en particulier l'exemple du chapitre 7).

### 2. Rappels

Pour la commodité de lecture, les différentes étapes de la première partie sont rapidement résumées ici :

#### 2.1. THÉORÈME DE CRAMER-RAO

Si  $\hat{\beta}(X)$  est un estimateur, *sans biais*, d'un vecteur  $\beta$  sur la base d'une observation  $X$ , sa matrice de covariance  $V$  vérifie :

$$(1) \quad V - F^{-1} \geq 0$$

où  $F$  est la matrice de Fisher de terme général

$$(2) \quad F_{kl} = F(\beta_k, \beta_l) = -E \{ \partial_{kl}^2 \mathcal{L} \}$$

où  $\mathcal{L}$  désigne la log-vraisemblance de  $\beta$  et avec la notation :

$$\partial_{kl}^2 \mathcal{L} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \beta_k \partial \beta_l}$$

#### 2.2. MATRICE DE FISHER : CAS GAUSSIEN RÉEL

$$(3) \quad F_{kl} = F_{kl}^{(A)} + F_{kl}^{(P)}$$

où on distingue les termes dénommés.

*Actif pur :*

$$(4) \quad F_{kl}^{(A)} = \partial_k \mathbf{m}^T C^{-1} \partial_l \mathbf{m}$$

*Passif pur :*

$$(5) \quad F_{kl}^{(P)} = -\frac{1}{2} \text{Tr} \{ (\partial_k C^{-1}) (\partial_l C) \}$$

Ce dernier s'écrivant aussi :

$$(6) \quad F_{kl}^{(P)} = \frac{1}{2} \text{Tr} \{ C^{-1} (\partial_k C) C^{-1} (\partial_l C) \}$$

#### 2.3. MATRICE DE FISHER : cas complexe-gaussien (circulaire)

L'observation est un vecteur  $X$  complexe distribué suivant une loi complexe-gaussienne de moyenne  $\mu$  et de matrice de covariance  $\Gamma$  : le terme général de la matrice  $F$  s'écrit toujours suivant (3) mais les expressions des deux termes deviennent :

*Actif pur :*

$$(7) \quad F_{kl}^{(A)} = 2 \text{Re} \{ \partial_k \mu^+ \Gamma^{-1} \partial_l \mu \}$$

*Passif pur :*

$$(8) \quad F_{kl}^{(P)} = \text{Tr} [\Gamma^{-1} (\partial_k \Gamma) \Gamma^{-1} (\partial_l \Gamma)]$$

#### 2.4. SONAR PASSIF

L'observation est définie par l'ensemble des vecteurs complexes :

$$\{ \mathbf{X}(f) \}_{f \in J}$$

obtenus par TFD des signaux d'entrée sur une tranche temporelle de longueur  $T$ .

Si  $T$  est « assez grand » les divers vecteurs sont indépendants, centrés et distribués suivant une loi complexe-gaussienne de matrice de covariance égale à la matrice interspectrale  $\Gamma$  à la fréquence correspondante. Par «  $T$  assez grand » on entend ici des valeurs de  $T$  grandes devant le temps de transit des ondes le long de l'antenne (en pratique un facteur 10 suffira) ainsi que devant la durée de corrélation des signaux.

Dans une situation où il y a  $p$  bruiteurs rayonnant des signaux non corrélés et où le milieu agit comme un filtre linéaire invariant la matrice  $\Gamma$  se décompose suivant :

$$(9) \quad \Gamma = \sum_{i=1, p} \gamma_i \mathbf{d}_i \mathbf{d}_i^+ + \sigma J$$

où  $\mathbf{d}_i$  est le « vecteur position » du  $i$ -ième bruiteur et  $J$  la matrice de cohérence spatiale du bruit de fond (on prendra  $J=I$ , la matrice identité)  $\sigma$  est la densité spectrale du bruit de fond et  $\gamma_i$  celle du signal rayonné par le  $i$ -ième bruiteur.

Dans le cas où il y a un seul bruiteur, on aura :

$$(10) \quad \Gamma = \gamma \mathbf{d} \mathbf{d}^+ + \sigma \mathbf{I}$$

La matrice de Fisher s'écrira alors suivant les cas ci-dessous. La première partie [1] fournit les détails nécessaires.

#### 2.4.1. Cas général

Cette situation correspond au modèle donné par la formule (9). Elle est résumée dans le tableau I.

**TABEAU I**  
*Matrice de Fisher, cas général*  
Sonar passif bande étroite  
pour des bruiteurs non corrélés  
[modèle de la formule (9)]

$$\begin{aligned} F(\sigma, \sigma) &= \text{Tr}(\Gamma^{-2}) \\ F(\sigma, \gamma_k) &= \|\Gamma^{-1} \mathbf{d}_k\|^2 \\ F(\sigma, (\theta)_j) &= 2\gamma_j \text{Re}\{\mathbf{d}_j^+ \Gamma^{-1} \mathbf{U}_{i,j}\} \\ F(\gamma_k, \gamma_l) &= |\mathbf{d}_k^+ \Gamma^{-1} \mathbf{d}_l|^2 \\ F(\gamma_k, (\theta)_j) &= 2\gamma_j \text{Re}\{(\mathbf{d}_k^+ \Gamma^{-1} \mathbf{d}_j)(\mathbf{U}_{i,j}^+ \Gamma^{-1} \mathbf{d}_k)\} \\ F((\theta)_j, (\theta)_k) &= 2\gamma_j \gamma_k \text{Re}\{(\mathbf{U}_{i,j}^+ \Gamma^{-1} \mathbf{d}_k)(\mathbf{U}_{k,i}^+ \Gamma^{-1} \mathbf{d}_j) \\ &\quad + (\mathbf{d}_i^+ \Gamma^{-1} \mathbf{d}_k)(\mathbf{U}_{k,i}^+ \Gamma^{-1} \mathbf{U}_{i,j})\} \end{aligned}$$

Notations :

$$\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x}^+ \mathbf{x})^{1/2} \text{ norme de } \mathbf{x}$$

Re {z}, partie réelle de z ∈ C

$$\mathbf{d}_k = \mathbf{d}(\theta_k)$$

$$\mathbf{U}_{i,j} = \left( \frac{\partial \mathbf{d}(\theta)}{\partial (\theta)_j} \right)_{\theta = \theta_i}$$

(θ)<sub>j</sub> = j-ième composante de θ<sub>i</sub>, vecteur paramétrant la position du i-ième bruiteur.

#### 2.4.2. Un seul bruiteur : général

Cette situation correspond au modèle donné par la formule (10). Elle est résumée dans le tableau II.

**TABEAU II**  
*Éléments de la matrice de Fisher*  
dans le problème à un bruiteur

$$\begin{aligned} F(\sigma, \sigma) &= (\mathbf{K} - 1) \sigma^{-2} + \lambda^{-2} \\ \lambda &= (\sigma + \gamma \mathbf{d}^+ \mathbf{d}) \\ F(\sigma, \gamma) &= (\mathbf{d}^+ \mathbf{d}) \lambda^{-2} \\ F(\sigma, (\theta)_j) &= 2\gamma \lambda^{-2} \text{Re}\{\mathbf{U}_j^+ \mathbf{d}\} \\ F(\gamma, \gamma) &= (\mathbf{d}^+ \mathbf{d})^2 \lambda^{-2} \\ F(\gamma, (\theta)_j) &= 2\gamma \lambda^{-2} (\mathbf{d}^+ \mathbf{d}) \text{Re}\{\mathbf{U}_j^+ \mathbf{d}\} \\ F((\theta)_k, (\theta)_l) &= 2\gamma^{-2} \lambda^{-2} \text{Re}\left\{(\mathbf{U}_k^+ \mathbf{d})(\mathbf{U}_l^+ \mathbf{d}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda}{\sigma} (\mathbf{d}^+ \mathbf{d})(\mathbf{U}_l^+ \mathbf{U}_k) - \frac{\gamma}{\sigma} (\mathbf{d}^+ \mathbf{d})(\mathbf{U}_l^+ \mathbf{d})(\mathbf{d}^+ \mathbf{U}_k)\right\} \end{aligned}$$

Remarque :

Comparée au tableau I, U<sub>j</sub> est une forme contractée de U<sub>i,j</sub> puisque l'indice i réfère nécessairement au seul bruiteur présent.

#### 2.4.3. Un seul bruiteur : modèle « retard pur »

Cette situation correspond à un vecteur **d** particulier, correspondant à une propagation isocélère et pour un bruiteur assez lointain pour pouvoir négliger les atténuations différentielles entre capteurs (zone de Fresnel ou de Fraunhofer mais pas champ proche), elle est résumée dans le tableau III.

**TABEAU III**

*Éléments de la matrice de Fisher pour le problème à un bruiteur pour des capteurs omnidirectionnels et un bruiteur « lointain »*

$$\begin{aligned} F(\sigma, \sigma) &= \frac{\mathbf{K} - 1}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^2 (1 + \mathbf{K} \mathbf{S})^2} \\ \mathbf{S} &= \frac{\gamma}{\sigma} \mathbf{d}^+ \mathbf{d} = \mathbf{K} \\ F(\sigma, \gamma) &= \frac{\mathbf{K}/\sigma^2}{(1 + \mathbf{K} \mathbf{S})^2} \\ F(\sigma, \theta) &= F(\gamma, \theta) = 0 \\ F(\gamma, \gamma) &= \frac{\mathbf{K}^2/\sigma^2}{(1 + \mathbf{K} \mathbf{S})^2} \\ F(\theta_k, \theta_l) &= \frac{2\mathbf{S}^2}{1 + \mathbf{K} \mathbf{S}} \text{Re}\{\mathbf{K} \mathbf{U}_l^+ \mathbf{U}_k - (\mathbf{U}_l^+ \mathbf{d})(\mathbf{d}^+ \mathbf{U}_k)\} \end{aligned}$$

#### 2.4.4. Un seul bruiteur : antenne rectiligne périodique

C'est la dernière étape : le modèle n'a plus aucun degré de liberté puisque l'antenne est de géométrie fixée, cette situation est résumée dans le tableau IV.

**TABEAU IV**

*Éléments de la matrice de Fisher pour l'antenne rectiligne périodique de pas d à K capteurs omnidirectionnels pour le problème à un bruiteur lointain dans un milieu isocélère.*

$$\begin{aligned} F(\sigma, \sigma) &= \frac{1}{\sigma^2} \{(\mathbf{K} - 1) + (1 + \mathbf{K} \mathbf{S})^{-2}\} \\ F(\sigma, \gamma) &= \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{K} (1 + \mathbf{K} \mathbf{S})^{-2} \\ F(\sigma, \theta) &= F(\gamma, \theta) = 0 \\ F(\gamma, \gamma) &= [\mathbf{K} \sigma^{-1} (1 + \mathbf{K} \mathbf{S})^{-1}]^2 \\ F(\theta, \theta) &= \frac{2\mathbf{S}^2 \omega^2}{1 + \mathbf{K} \mathbf{S}} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2 \mathbf{K}^2 (\mathbf{K}^2 - 1)}{12} & 0 \\ 0 & \frac{\beta^2 \mathbf{K}^2 (\mathbf{K}^2 - 1) (\mathbf{K}^2 - 4)}{180} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\omega = 2\pi f, \mathbf{S} = \gamma/\sigma, \alpha = d/C.$$

$$\beta = d^2 \text{Cos}^2 \theta / 2C, \mathbf{K} \text{ capteurs.}$$

Paramètres géométriques Sin θ, R<sup>-1</sup>.

### 3. Précision de mesure des temps de retard

Dans cette section on s'intéresse à la précision de mesure des retards entre signaux reçus par les différents hydrophones d'une antenne en provenance d'un bruiteur : c'est un problème de sonar « passif » dans

une situation correspondant à un seul bruiteur dans du bruit incohérent.

La matrice interspectrale des signaux reçus par les capteurs s'écrit :

$$\Gamma = \gamma \mathbf{d} \mathbf{d}^+ + \sigma \mathbf{I}$$

et on se place dans le cas où la propagation est définie par un vecteur  $\mathbf{d}$  de composantes :

$$(11) \quad (\mathbf{d})_k = \alpha_k \exp(i \omega \tau_k), \quad k = 1, K$$

avec  $\omega = 2\pi f$ .

A la différence du modèle « retard-pur », on admet donc des gains  $\alpha_k$  distincts d'un capteur à l'autre. Le premier capteur sera pris comme référence et on aura donc  $\tau_1 = 0$ .

Il s'agit d'estimer  $(\tau_k)_{k=2, K}$ .

On s'intéresse à la matrice de Fisher de ces paramètres sans tenir compte du fait que les retards différentiels sont normalement liés par la propagation [c'est-à-dire que  $\tau_k = \tau_k(\theta)$ ].

On est ici dans la situation correspondant à celle du tableau II pour lequel les paramètres  $\theta$  sont les retards  $(\tau_k)_{k=2, K}$ .

Les vecteurs  $\mathbf{U}_k$  sont particulièrement simples :

$$\mathbf{U}_k = \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \tau_k} = i \omega \alpha_k e^{i \omega \tau_k} \mathbf{e}_k, \quad k = 2, K$$

où  $\mathbf{e}_k$  est le  $k$ -ième vecteur de base (toutes ses composantes sont nulles sauf la  $k$ -ième qui vaut 1).

On en déduit :

$$(11a) \quad \mathbf{U}_k^+ \mathbf{d} = -i \omega \alpha_k^2$$

$$(11b) \quad \mathbf{U}_k^+ \mathbf{U}_l = \omega^2 \alpha_k \alpha_l \delta_{kl}$$

où  $\delta_{kl} = 0$  pour  $k \neq l$  et 1 pour  $k = l$  (symbole de Kronecker).

En particulier  $\text{Re}(\mathbf{U}_k^+ \mathbf{d}) = 0$ .

On conclut qu'il y a un découplage entre les termes de puissance ( $\sigma$ ,  $\gamma$ ) et géométriques  $(\tau_k)_{k=2, K}$ .

Comme on se restreint ici à la précision de mesure des retards, on se contentera d'étudier la sous-matrice de Fisher correspondant aux seuls retards :

$$(14) \quad \begin{aligned} F(\tau_k, \tau_l) &= \frac{2\gamma^2}{\lambda\sigma} \text{Re}\{(\mathbf{U}_k^+ \mathbf{d})(\mathbf{U}_l^+ \mathbf{d}) + (\mathbf{d}^+ \mathbf{d})(\mathbf{U}_k^+ \mathbf{U}_l)\} \\ &= \frac{2\gamma^2 \omega^2}{\lambda\sigma} ((\mathbf{d}^+ \mathbf{d}) \alpha_k \alpha_l \delta_{kl} - \alpha_k^2 \alpha_l^2) \end{aligned}$$

Définissons les matrices :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \text{diag}(\alpha_k^2)_{k=2, K} \\ \mathbf{a} &= \text{col}(\alpha_k^2)_{k=2, K} \end{aligned}$$

La sous-matrice de Fisher d'intérêt, qu'on notera  $\mathbf{F}(\tau, \tau)$ , s'écrit

$$(15) \quad \mathbf{F}(\tau, \tau) = \frac{2\gamma^2 \omega^2}{\lambda\sigma} \{(\mathbf{d}^+ \mathbf{d}) \mathbf{A} - \mathbf{a} \mathbf{a}^T\}$$

dont l'inverse est :

$$(16) \quad \mathbf{F}^{-1}(\tau, \tau) = \frac{\lambda\sigma}{2\gamma^2 \omega^2} (\mathbf{d}^+ \mathbf{d})^{-1} \left[ \mathbf{A}^{-1} + \frac{\mathbf{1}\mathbf{1}^T}{\alpha_1^2} \right]$$

où  $\mathbf{1}$  est un vecteur dont toutes les composantes sont égales à 1.

On en déduit la variance limite d'estimation d'un retard  $\tau_k$  :

$$(17) \quad (\sigma_{\tau_k}^{\text{C.R.}})^2 = \frac{\lambda\sigma}{2\gamma^2 \omega^2} (\mathbf{d}^+ \mathbf{d})^{-1} \left( \frac{1}{\alpha_k^2} + \frac{1}{\alpha_1^2} \right).$$

Ce résultat peut s'interpréter sur un exemple précis (fig. 1) : il s'agit d'estimer le retard entre les signaux reçus par deux capteurs de position connue en supposant qu'on dispose d'un troisième capteur de position mal connue mais de gain  $\alpha_3 = \alpha > 1$ .

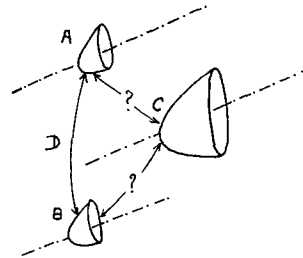


Fig. 1. — Les antennes A et B sont parfaitement localisées mais ont des gains faibles. L'antenne C, à grand gain, est de position mal connue.

Ce problème peut se poser lorsqu'on cherche à localiser un bruiteur avec deux antennes et qu'on se demande si l'utilisation d'une antenne supplémentaire est intéressante pour améliorer la localisation même si cette antenne n'est pas suffisamment bien positionnée pour être utilisée dans un traitement d'antenne cohérent (les trois antennes formant alors les capteurs d'une antenne plus importante).

On cherche ici à chiffrer le gain apporté par l'utilisation du capteur supplémentaire sur la précision de mesure du retard  $\tau_2$  entre les deux premiers capteurs [on suppose  $(\alpha_1 = \alpha_2 = 1)$ ].

D'après (17), on a donc la variance limite  $V(\alpha)$  de la mesure de  $\tau_2 = \tau$

$$\begin{aligned} V(\alpha) &= \frac{\lambda\sigma}{2\gamma^2 \omega^2} \left( \frac{2}{2 + \alpha^2} \right) \\ &= \frac{1 + S(2 + \alpha^2)}{S^2 \omega^2 (2 + \alpha^2)} \quad \text{avec} \quad S = \frac{\gamma}{\sigma} \end{aligned}$$

On en déduit :

(1)  $\alpha=0$  c'est le cas où le dernier capteur n'est pas utilisé.

$$V(0) = \frac{2S+1}{2\omega^2 S^2}$$

(2)  $\alpha \neq 0$  on peut mesurer le gain en précision apporté par l'utilisation de ce capteur supplémentaire :

$$G(\alpha) = \frac{V(0)}{V(\alpha)} = \frac{1+2S}{1+(2+\alpha^2)S} \cdot \left( \frac{2+\alpha^2}{2} \right)$$

On remarquera que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} G(\alpha) = 1$$

et que

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} G(\alpha) = 1 + \frac{1}{2S} > 1.$$

Ce gain est particulièrement intéressant quand S est faible

$$\lim_{S \rightarrow 0} G(\alpha) = 1 + \frac{\alpha^2}{2}$$

(3)  $\alpha \rightarrow \infty$  on est alors dans une situation dans laquelle on dispose d'une référence du signal et on a

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} V(\alpha) = \frac{1}{\omega^2 S}$$

L'existence d'une référence supplémentaire contenant le signal utile permet toujours d'améliorer la mesure des retards : la borne de Cramer-Rao permet de prévoir le gain qu'on peut en espérer sans indiquer la façon de procéder (il ne serait d'ailleurs pas difficile de le préciser à l'aide du formalisme introduit dans la première partie [1] en particulier la formule (A. 18) (voir référence [18]).

La figure 2 représente pour diverses valeurs du rapport signal à bruit S le gain en précision de mesure  $G(\alpha)$  en fonction de  $\alpha$  [plus précisément : tracé de  $10 \log G(\alpha)$  en fonction de  $20 \log(\alpha)$ ].

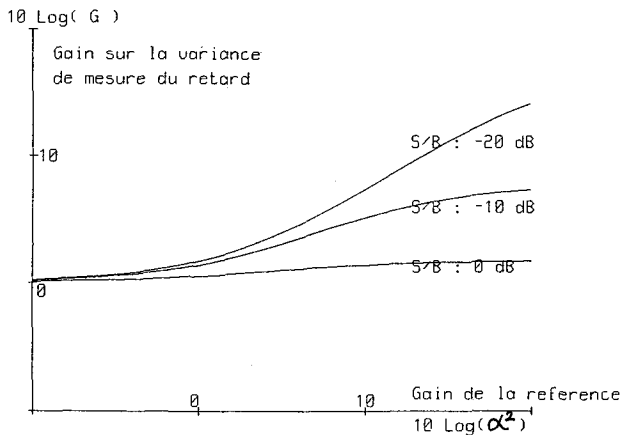


Fig. 2. — Gain sur la variance de mesure du temps de retard entre deux signaux en utilisant une référence supplémentaire.

### 4. Mesure de la distance sur trajets multiples

Dans le contexte du sonar passif, il existe plusieurs méthodes pour mesurer la distance d'un bruiteur à l'aide d'une antenne.

Une première méthode, dans le cas d'un milieu isocélère, consiste à mesurer la courbure de la surface d'onde : c'est la méthode sous-jacente dans le calcul fait dans la première partie (discussion de la section 3. 3) de la première partie [1]).

Une seconde méthode consiste à exploiter la structure d'arrivée des trajets multiples (sites d'arrivée des trajets et instants d'arrivée).

D'autres méthodes sont envisageables mais ne seront pas considérées ici, par exemple :

- Utilisation des amplitudes des signaux reçus (champ proche).
- Utilisation de l'effet doppler et de l'effet doppler différentiel [13, 14].
- Trajectographie par mesures angulaires [15].

Nous allons discuter ici de l'utilisation des trajets multiples (conjointement avec la courbure des fronts d'ondes).

L'antenne est rectiligne, périodique, horizontale. Le signal issu du bruiteur parvient à l'antenne par deux trajets : un trajet « direct » et un trajet « réfléchi » sur la surface. Cette situation correspond en fait à deux bruiteurs (le bruiteur de départ et un bruiteur « image »). Rappelons qu'une antenne rectiligne possède une ambiguïté « conique » et permet seulement la mesure des « pseudo-gisements » (angles entre l'axe de l'antenne et les vecteurs d'ondes) et non pas des gisements (angles entre l'axe et les plans verticaux contenant les vecteurs d'ondes). Ceci donne à l'antenne un certain pouvoir de résolution en site bien que son ouverture verticale soit nulle.

Deux cas limites peuvent être étudiés :

- Trajets totalement corrélés;
- Trajets totalement décorrélés.

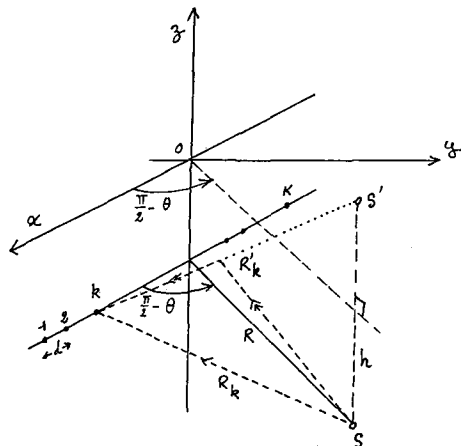


Fig. 3. — Localisation d'un bruiteur S en présence d'un trajet réfléchi : géométrie du problème. L'antenne est rectiligne, horizontale (dans un plan parallèle à  $x, y$ ), périodique de pas  $d$ , l'immersion  $h$  du bruiteur S est identique à celle de l'antenne.  $S'$ , symétrique de S par rapport au plan  $(x, y)$  est la source « image ».

Si  $\mathbf{d}_1$  et  $\mathbf{d}_2$  désignent les vecteurs positions des deux bruiteurs (source et image) la première situation correspond au cas où on peut écrire la matrice interspectrale :

$$\Gamma = \gamma \mathbf{d} \mathbf{d}^+ + \sigma \mathbf{I}$$

avec

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_1 + \alpha \mathbf{d}_2$$

La seconde situation correspond au cas où la matrice s'écrit :

$$\Gamma = \gamma (\mathbf{d}_1 \mathbf{d}_1^+ + \alpha^2 \mathbf{d}_2 \mathbf{d}_2^+) + \sigma \mathbf{I}$$

Pour être tout à fait général, il serait aussi possible de considérer les situations intermédiaires où les trajets sont partiellement corrélés pour lesquelles la matrice s'écrirait plutôt :

$$\Gamma = \sum_{i, j=1, 2} \alpha_{ij} \mathbf{d}_i \mathbf{d}_j^+ + \sigma \mathbf{I}$$

Cette situation intéressante qui généralise le problème ne sera pas considérée ici.

4. 1. TRAJETS PARFAITEMENT CORRÉLÉS

Les vecteurs  $\mathbf{d}_1$ ,  $\mathbf{d}_2$  sont de la forme :

$$(18 a) \quad \mathbf{d}_1 = \text{col} \left\{ \exp \left( i \omega \frac{R_k - R}{C} \right) \right\}_{k=1, K}$$

$$(18 b) \quad \mathbf{d}_2 = \text{col} \left\{ \exp \left( i \omega \frac{R'_k - R}{C} \right) \right\}_{k=1, K}$$

avec

$$R'_k = (R_k^2 + 4h^2)^{1/2}$$

où  $h$  désigne l'immersion du bruiteur (fig. 3). Pour simplifier on a supposé que l'immersion du bruiteur et de l'antenne sont identiques.

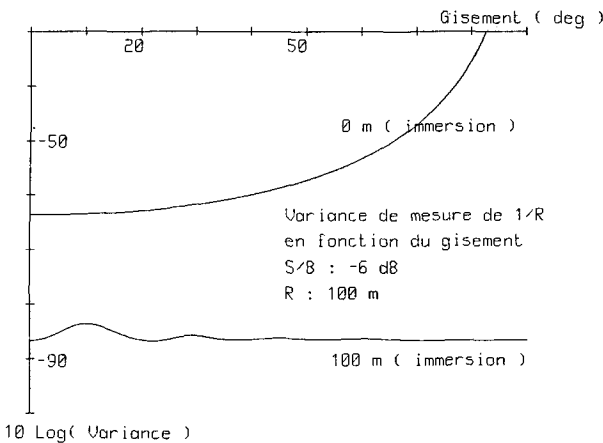


Fig. 4. — Variance de mesure de  $1/R$  en fonction du gisement pour deux immersions distinctes (0 et 100 m) dans le cas de deux trajets parfaitement corrélés.

Les paramètres de localisation du problème seront  $\sin \Theta$  et  $R^{-1}$  où  $\Theta$  est le gisement du bruiteur (trajet direct) et  $R$  sa distance. On utilise le même paramétrage que dans la section 3.3 de la première partie.

On est ici dans la situation correspondant au tableau II.

La matrice de Fisher s'en déduit en calculant les vecteurs :

$$\mathbf{U}_\Theta = \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \sin \Theta} = \frac{\partial \mathbf{d}_1}{\partial \sin \Theta} + \alpha \frac{\partial \mathbf{d}_2}{\partial \sin \Theta}$$

$$\mathbf{U}_R = \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial R^{-1}} = \frac{\partial \mathbf{d}_1}{\partial R^{-1}} + \alpha \frac{\partial \mathbf{d}_2}{\partial R^{-1}}$$

A partir de ces vecteurs, il est possible de définir un programme de calcul permettant de chiffrer les précisions limites de mesure de la distance (plus exactement de son inverse  $R^{-1}$ ).

Les résultats de l'analyse sont présentés sur les figures 4 à 6.

Toutes ces figures représentent un tracé de la quantité (dB)

$$\sigma_{R^{-1}}^{CR} = (F^{-1}(R^{-1}, R^{-1}))^{1/2}$$

en fonction de divers paramètres (respectivement  $\Theta$ ,  $R$  et  $h$  pour les figures 4 à 6).

Commentaires

Les résultats présentés concernent une antenne à  $K=32$  capteurs équidistant de 2 m. Il s'agit d'une estimation à « bande-étroite » à la fréquence  $f=325$  Hz. La distance de Fresnel est donc de :

$$D_F = \frac{(K-1)^2 d^2}{\lambda} \sim 833 \text{ m}$$

Figure 4 : en fonction du gisement

Les deux courbes correspondent à deux immersions distinctes, le bruiteur est à 100 m.

L'immersion « 0 m » correspond au cas où le bruiteur est confondu avec son image : le seul phénomène exploité est la courbure de la surface d'onde. Pour le gisement  $\Theta=0^\circ$  on a (voir section 3.3 de la première partie [1])

$$\sigma_{R^{-1}}^{CR} \simeq \frac{1 \alpha_3}{KS} \sqrt{(1+KS)}$$

avec

$$S = \frac{\gamma}{\sigma} = 1 \quad (\text{puisque } \mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_2)$$

et

$$2 \alpha_3 \sim 5,7 \frac{\lambda}{L^2} = 6,8 \cdot 10^{-3}$$

On trouve donc  $\sigma_{R^{-1}}^{CR} = -64$  dB.

La précision se dégrade lorsque le gisement augmente : ceci correspond à la réduction de la distance de Fresnel avec le dépointage :

$$D_F = \frac{L^2 \cos^2 \Theta}{\lambda}$$

La seconde immersion « 100 m » correspond à une situation où les trajets multiples peuvent être exploités (la borne de Cramer-Rao ne dit pas exactement comment) conjointement d'ailleurs avec la courbure de la surface d'onde.

On remarque une amélioration significative de la précision (20 dB!) qui de plus ne se dégrade plus avec le dépointage (ce qui est naturel dans le cas où la structure d'arrivée des trajets est exploitée).

Pour le gisement  $\Theta = 0^\circ$ , l'antenne n'est pas capable de résoudre les trajets spatialement (ceux-ci parviennent à l'antenne sous le même gisement apparent), le phénomène exploité ne peut être que la différence des instants d'arrivée des deux trajets (conjointement avec la courbure)

Figure 5 : en fonction de la distance

Là aussi, deux valeurs de l'immersion  $h$  sont considérées.

L'immersion « 0 m » correspond à la télémétrie de courbure. La courbe montre qu'en dehors du champ proche la précision de mesure de  $R^{-1}$  est essentiellement constante (conformément à la formule (43) approchée de la section 3.3 de [1] développée justement dans l'hypothèse « champ lointain » en ce qui concerne la forme du diagramme d'ambiguïté).

L'immersion « 50 m » donne une courbe beaucoup plus compliquée avec des zones où la précision de mesure de  $R^{-1}$  est meilleure qu'en immersion « 0 m » mais aussi des zones où elle est moins bonne.

Ceci s'explique par le phénomène d'interférence :

— en champ proche (distance inférieure à 300 m sur la figure), les deux bruiteurs sont à des distances apparentes différentes si bien que les interférences ne peuvent être totalement destructives sur toute la longueur de l'antenne;

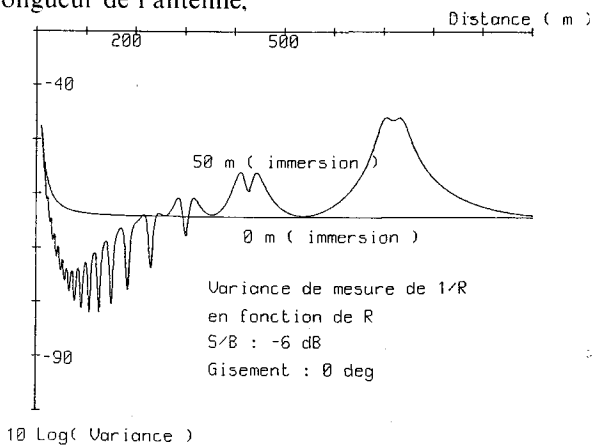


Fig. 5. — Variance de mesure de  $1/R$  en fonction de la distance R pour deux immersions différentes (0 et 50 m) dans le cas de deux trajets parfaitement corrélés

— en champ lointain, la courbure de la surface d'onde devient faible et les deux bruiteurs interfèrent quelques fois de façon presque totalement destructive.

Figure 6 : en fonction de l'immersion

Les deux courbes correspondent à deux distances du bruiteur : 100 et 1000 m.

A grande distance, il est facile de calculer approximativement la position des pics d'interférence destructive par un petit modèle (fig. 7). On trouve la position des pics aux immersions données par :

$$h = \left( (2k+1) \frac{R\lambda}{4} \right)^{1/2}$$

avec les paramètres du calcul, on aura

$$h \sim 34 \sqrt{2k+1} \quad \text{pour } R = 1000 \text{ m}$$

et

$$h \sim 11 \sqrt{2k+1} \quad \text{pour } R = 100 \text{ m}$$

(mais l'analyse est plus douteuse pour  $R = 100$  m). Ce qui correspond bien aux pics observés.

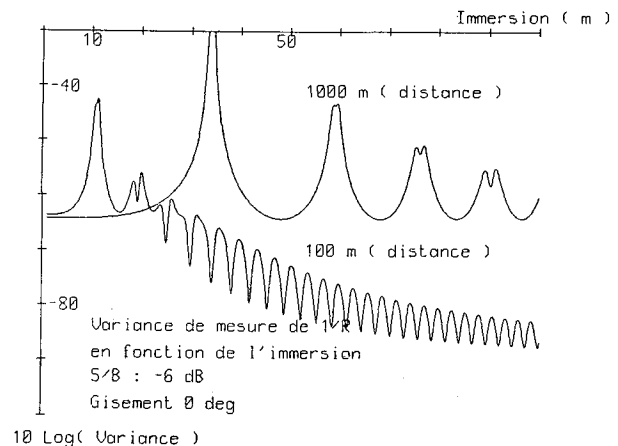


Fig. 6. — Variance de mesure de  $1/R$  en fonction de l'immersion pour deux distances différentes (100 et 1000 m) dans le cas de deux trajets parfaitement corrélés.

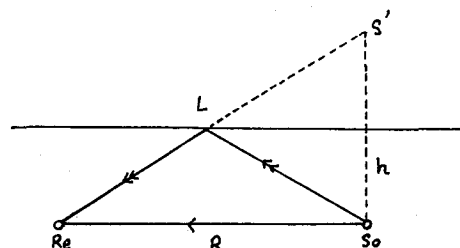


Fig. 7 :

$$L = (R^2 + 4h^2)^{1/2} \sim \left( 1 + \frac{2h^2}{R^2} \right)$$

Interférence destructive si :

$$L - R = (2k+1) \frac{\lambda}{2} = \frac{2h^2}{R}$$

$$h = \frac{1}{2} \sqrt{(2k+1) R \lambda}$$

4. 2. TRAJETS TOTALEMENT DÉCORRÉLÉS

On est alors dans le cas où la matrice  $\Gamma$  s'écrit :

$$\Gamma = \gamma(\mathbf{d}_1 \mathbf{d}_1^+ + \alpha^2 \mathbf{d}_2 \mathbf{d}_2^+) + \sigma \mathbf{I}$$

Les vecteurs  $\mathbf{d}_1$  et  $\mathbf{d}_2$  sont les mêmes que ceux définis dans le paragraphe précédent (18 a-b).

Bien qu'il n'y ait qu'un seul bruiteur, les formules du tableau II ne s'appliquent pas et il faut reprendre le calcul à partir des formules générales du tableau I. Ceci provient du fait que les formules du tableau II correspondent à un bruiteur parfaitement cohérent spatialement, ce qui n'est pas le cas ici puisque la matrice de cohérence spatiale des signaux issus du bruiteur s'écrit :

$$C_s = \mathbf{d}_1 \mathbf{d}_1^+ + \alpha^2 \mathbf{d}_2 \mathbf{d}_2^+,$$

matrice qu'on ne peut mettre sous la forme  $\mathbf{d} \mathbf{d}^+$ .

Sur les figures 8 à 10, on représente les résultats d'une étude par programmation avec la même antenne et les mêmes configurations que dans la section précédente.

Commentaires

Figure 8 : en fonction du gisement

Cette figure est à comparer directement avec la figure 4.

Pour l'immersion « 0 m », on est en fait dans la même situation sur les deux figures puisque les deux bruiteurs sont confondus dans les deux cas. La différence provient du niveau du bruiteur équivalent dont l'énergie est deux fois plus élevée dans le cas cohérent. Dans les deux cas la matrice interspectrale correspondant à la source seule s'écrit :

$$\Gamma = \gamma_i \mathbf{d} \mathbf{d}^+$$

Sur la figure 4 on a  $\gamma_1 = \gamma (1 + \alpha)^2$ .

Sur la figure 8 on a  $\gamma_2 = \gamma (1 + \alpha^2)$ .

Ici  $\alpha = 1$  et  $\gamma_1 = 2 \gamma_2$ .

Pour l'immersion « 100 m », on remarque une différence très nette entre les figures 4 et 8. En particulier pour le gisement  $0^\circ$  la variance de mesure est plus grande que pour l'immersion « 0 m » et beaucoup plus grande que dans le cas des trajets corrélés. Ceci peut s'interpréter en disant que maintenant le processeur ne dispose plus de la possibilité de séparer temporellement les trajets si bien que les deux sources fictives se gênent l'une l'autre et que la mesure est donc moins bonne (de plus en pratique elle risque d'être biaisée).

Lorsque le gisement augmente, la mesure de la distance s'améliore, car d'une part les trajets peuvent être séparés spatialement, d'autre part la mesure du site fournit la distance. Cependant, le résultat est moins bon que si les trajets sont corrélés (on perd la possibilité de séparer les trajets temporellement : la mesure du temps de retard entre les deux trajets est une information qui vient se rajouter à la mesure des angles d'arrivée pour améliorer la précision de localisation).

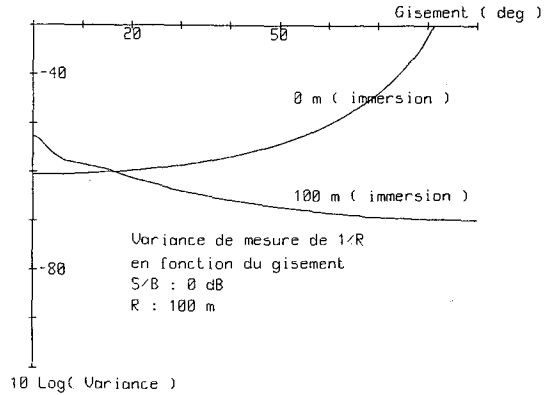


Fig. 8. — Variance de mesure de  $1/R$  en fonction du gisement pour deux immersions différentes (0 et 100 m) dans le cas de deux trajets non corrélés.

Figure 9 : en fonction de la distance

Cette figure est à comparer directement avec la figure 5.

Pour l'immersion « 0 m », on peut faire la même remarque que sur la figure précédente : la différence entre les figures 5 et 9 provient de la sommation des signaux, cohérente sur la figure 5 et incohérente sur la figure 9.

Pour l'immersion « 50 m », l'aspect de la courbe est radicalement différent de celui de la figure 5 en particulier le réseau d'interférence a pratiquement disparu et on trouve des résultats moins bons pour cette immersion que dans le cas « 0 m ». Ceci provient du fait, comme précédemment, que les deux bruiteurs se gênent (le gisement est fixé à  $0^\circ$  sur cette figure).

On peut remarquer un pic de variance pour cette immersion à une distance d'environ 90 m. On peut l'expliquer de la manière suivante :

Pour des distances inférieures à 90 m, la résolution en distance est suffisante pour séparer le bruiteur de son image. Pour des distances supérieures le bruiteur est confondu avec son image du fait de la résolution limitée en distance (ceci est confirmé par le fait que les courbes à immersion 50 et 0 m se rejoignent). Entre ces deux cas limites l'antenne n'est capable ni de résoudre le bruiteur de son image ni de les confondre et la précision se dégrade. Si le gisement du bruiteur avait été non nul, il y aurait un effet de site.

On peut quantifier la position du pic de variance de la façon suivante :

La différence des distances entre les deux bruiteurs est donnée (fig. 7) par :

$$\Delta R \approx \frac{2h^2}{R} = \frac{5000}{R}$$

soit

$$\Delta \left( \frac{1}{R} \right) \sim \frac{5000}{R^3}$$



et la résolution en  $R^{-1}$  est donnée par :

$$2\alpha_3 \sim \frac{6}{D_F} = \frac{6}{800}$$

la précision est dégradée si  $\Delta(1/R) \sim \alpha_3$ , soit (grossièrement)

$$\Delta R^{-1} \sim \frac{5000}{R^3} = \frac{3}{800}$$

$$R = \left( \frac{4 \cdot 10^6}{3} \right)^{1/3} \sim 100 \text{ m}$$

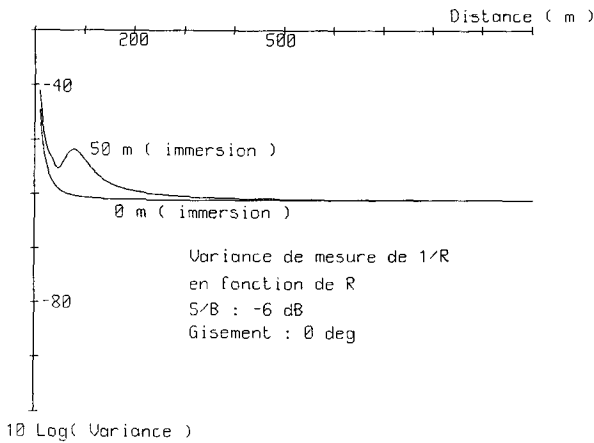


Fig. 9. — Variance de mesure de  $1/R$  en fonction de la distance pour deux immersions différentes (0 et 50 m) dans le cas de deux trajets non corrélés.

Figure 10 : en fonction de l'immersion

Cette figure est à comparer à la figure 6.

Là encore, le réseau d'interférence disparaît. A grande distance, l'immersion n'a pratiquement aucun effet (tant qu'elle reste inférieure à la distance).

A faible distance, on a le même effet que dans la figure précédente : il existe un pic de variance.

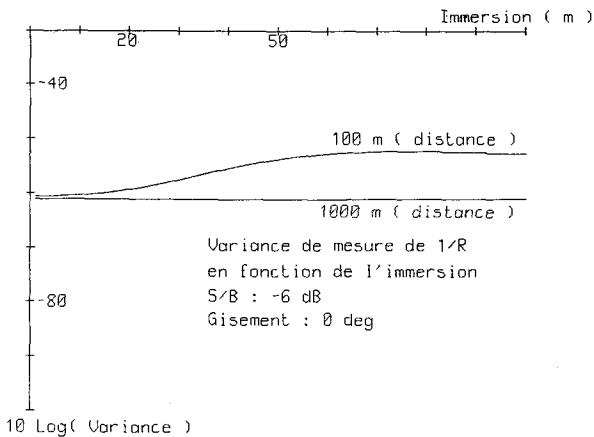


Fig. 10. — Variance de mesure de  $1/R$  en fonction de l'immersion pour deux distances distinctes (100 et 1000 m) dans le cas de deux trajets non corrélés.

## 5. Comparaison actif/passif

Comme mentionné plus haut, la matrice de Fisher comporte en général deux termes dénommés « Actif Pur » et « Passif Pur » [formules (7) et (8)].

Le calcul du terme « Actif Pur » est souvent utilisé pour spécifier les performances d'un problème de sonar passif : ce paragraphe a pour but d'éclaircir la raison de ce choix et d'examiner sa validité.

On commencera par étudier un exemple dans le contexte du sonar actif.

### 5.1. SONAR ACTIF

Un sonar actif fonctionne en émettant un signal acoustique (ici on se limitera au cas d'une sinusoïde de fréquence  $f_0$ , de durée  $T$ ), qui se réfléchit sur les obstacles et est perçu sous forme d'écho par les hydrophones de l'antenne après une certaine durée de propagation qui permet idéalement de mesurer la distance de l'obstacle. Au cours de cette opération, la phase de la sinusoïde est modifiée de manière imprévisible (constatation expérimentale).

L'observation est définie comme dans le cas du sonar passif par TFD des signaux d'entrée (mais de plus on suppose l'instant d'arrivée parfaitement connu si bien que la TFD sera exactement de longueur  $T$ ), de plus la fréquence  $f_0$  de réception est connue (doppler connu). On reçoit de plus un bruit de fond qu'on supposera incohérent, de matrice de densité spectrale (à la fréquence  $f_0$ ).

$$\Gamma = \sigma I$$

Si  $A$  est l'amplitude de la sinusoïde reçue par le capteur de référence et si  $T$  est « assez grand » (voir la remarque à ce sujet dans la section 2.4), l'observation est distribuée suivant une loi complexe-gaussienne de moyenne :

$$(19) \quad \mu = \frac{A \sqrt{T}}{2} e^{i\varphi} \mathbf{d}(\theta) = g e^{i\varphi} \mathbf{d}(\theta)$$

Le facteur en  $\sqrt{T}$  provient de la normalisation retenue pour  $\Gamma$ , le facteur  $1/2$  provient du fait que le signal est réel.

Avec la statistique ci-dessus, le terme général de la matrice de Fisher s'écrit :

$$F_{kl} = -\text{Tr}(\partial_k \Gamma^{-1} \partial_l \Gamma) + 2 \text{Re}(\partial_k \mu^+ \Gamma^{-1} \partial_l \mu)$$

les paramètres à estimer étant  $\sigma$ ,  $g$ ,  $\theta$  et  $\varphi$ . Le calcul de  $F_{kl}$  n'offre pas de difficultés particulières. On observe un découplage entre les termes  $\sigma$ ,  $g$  d'une part et  $\theta$ ,  $\varphi$  d'autre part. On se restreint à ces deux derniers termes et on obtient :

$$(20a) \quad F(\varphi, (\theta)_k) = -\frac{2g^2}{\sigma} \text{Re}\{i \mathbf{d}^+ \mathbf{U}_k\}$$

$$(20b) \quad F((\theta)_k, (\theta)_l) = \frac{2g^2}{\sigma} \text{Re}\{\mathbf{U}_k^+ \mathbf{U}_l\}$$

les vecteurs  $\mathbf{U}_k$  sont les mêmes que ceux qui apparaissent dans le tableau II.

Dans le cas particulier des capteurs omnidirectionnels avec référence au centre de phase de l'antenne, on se trouve dans les conditions de l'annexe B de la première partie [1] et on peut introduire dans (20 a-b) les vecteurs  $\mathbf{t}_k$  définis en (B. 3) [1].

On trouve alors :

$$(21 a) \quad F(\varphi, (\boldsymbol{\theta})_k) = 2 \frac{g^2}{\sigma} \omega \mathbf{t}_k^T$$

$$(21 b) \quad F((\boldsymbol{\theta})_k, (\boldsymbol{\theta})_l) = 2 \frac{g^2}{\sigma} \omega^2 \mathbf{t}_k^T \mathbf{t}_l$$

La matrice de Fisher associée aux paramètres  $\boldsymbol{\theta}$ ,  $\varphi$  peut s'écrire en blocs

$$(22) \quad \begin{pmatrix} F(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}) & F(\boldsymbol{\theta}, \varphi) \\ F(\varphi, \boldsymbol{\theta}) & F(\varphi, \varphi) \end{pmatrix}$$

$F(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta})$  est donné, d'après (20 b), par

$$(23) \quad F(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}) = 2 \frac{g^2}{\sigma} \omega^2 \mathcal{F}^T \mathcal{F}$$

où  $\mathcal{F}$  est définie en Annexe B de la première partie

$$(24 a) \quad F(\varphi, \varphi) = 2 \mathbf{K} \frac{g^2}{\sigma}$$

$$(24 b) \quad F(\boldsymbol{\theta}, \varphi) = 2 \frac{g^2}{\sigma} \omega \mathcal{F}^T$$

L'inverse de la matrice (22) est une matrice partitionnée de même forme :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{y} \\ \mathbf{y}^+ & z \end{pmatrix}$$

et on a les deux relations :

$$F(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}) \mathbf{X} + F(\boldsymbol{\theta}, \varphi) \mathbf{y}^+ = \mathbf{I}$$

$$F(\varphi, \boldsymbol{\theta}) \mathbf{X} + F(\varphi, \varphi) \mathbf{y}^+ = 0$$

d'où

$$\mathbf{y}^+ = -(F(\varphi, \varphi))^{-1} F(\varphi, \boldsymbol{\theta}) \mathbf{X}$$

et

$$\mathbf{X} = \left( F(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}) - \frac{F(\boldsymbol{\theta}, \varphi) F(\varphi, \boldsymbol{\theta})}{F(\varphi, \varphi)} \right)^{-1}$$

le terme  $z$  ne sera pas explicité ici car on ne s'intéressera pas à la mesure de  $\varphi$ , reportant dans  $\mathbf{X}$  les expressions (23) et (24), on trouve :

$$\mathbf{X} = \frac{\mathbf{K} \sigma}{2 g^2 \omega^2} \mathcal{G}^{-1}$$

où  $\mathcal{G}$  est la matrice déjà rencontrée dans la première partie [Annexe B formule (B. 7)].

On en déduira alors (Cramer-Rao) :

$$(25) \quad V(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}) - \frac{\mathbf{K} \sigma}{2 g^2 \omega^2} \mathcal{G}^{-1} \geq 0$$

Ce résultat est très similaire à celui qu'on obtient en passif (voir [1], formule (27)).

$$(26) \quad V(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}) - \frac{1 + \mathbf{K} \mathbf{S}}{2 \omega^2 \mathbf{S}^2} \mathcal{G}^{-1} \geq 0 \quad \left( \mathbf{S} = \frac{\gamma}{\sigma} \right)$$

On peut identifier dans (26) le rapport  $\mathbf{S}$  à la quantité :

$$(27) \quad \frac{g^2}{\sigma} = \frac{\mathbf{A}^2 \mathbf{T}}{4 \sigma} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{N}_0}$$

où  $\mathbf{E}$  est l'énergie de la sinusoïde et  $\mathbf{N}_0 = 2 \sigma$  celle du bruit (filtre de 1 Hz de bande autour de  $f_0$ ).

En résumé, on a :

en Actif

$$(28 a) \quad V^A(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}) \geq \frac{\mathbf{K}}{2 \mathbf{S} \omega^2} \mathcal{G}^{-1}$$

en Passif

$$(28 b) \quad V^P(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}) \geq \frac{1 + \mathbf{K} \mathbf{S}}{2 \mathbf{S}^2 \omega^2} \mathcal{G}^{-1}$$

## 5. 2. COMPARAISON

L'exemple précédent concernait un problème de sonar actif mais on peut remarquer qu'on obtient une statistique analogue dans un problème de sonar passif où le signal émis par le bruiteur est une sinusoïde de fréquence  $f_0$ . Par conséquent, la formule (28 a) est également applicable à ce problème « passif ».

Dans ce cas la quantité  $\mathbf{S}$  a la même signification dans les deux formules (28 a) et (28 b).

Si, plus généralement, on a affaire à un problème du type passif où l'observation est un vecteur qui s'écrit :

$$\mathbf{X} = \mathbf{S} + \mathbf{N}$$

$\mathbf{S}$  désignant la partie « signal » et  $\mathbf{N}$  le « bruit », on peut considérer que  $\mathbf{X}$  est un vecteur gaussien de moyenne nulle et de matrice de covariance  $\Gamma_S + \Gamma_N$ , comme cela a été exposé jusqu'ici. Mais on trouve aussi une deuxième approche dans laquelle  $\mathbf{X}$  est de moyenne  $\mathbf{S}$  et de matrice de covariance  $\Gamma_N$ .

Cette seconde approche conduit à la formule (28 a) ci-dessus, tandis que la première conduit à (28 b). Dans ces deux formules, lorsque le rapport signal sur bruit  $\mathbf{S}$  est fort les deux termes de droite sont équivalents.

Par contre, à faible rapport signal sur bruit, l'utilisation de (28 a) au lieu de (28 b) conduit à des résultats optimistes.

Par exemple, pour  $S=0,02$  ( $-17$  dB) et  $K=3$  (téléométrie à trois capteurs), le rapport des deux quantités précédentes donne :

$$\frac{1+KS}{KS} = \frac{1+0,06}{0,06} \sim 18.$$

On remarquera également que la formule permet de déduire la formule de Woodward :

$$\sigma_{\theta}^{(A)} = \frac{\theta_3}{\sqrt{KS}}$$

(section 3.2 de la première partie [1]).

### 6. Goniométrie fine

Contrairement à la description rapide d'un sonar « classique » faite dans l'introduction de la première partie [1], un sonar réel ne dispose pas d'un nombre infini de voies préformées. Par conséquent, la méthode qui consiste à estimer la position d'un bruiteur par la direction de pointage de la voie dont l'énergie de sortie est maximale aura des performances plutôt limitées par le pas d'échantillonnage spatial des voies que par les bornes de Cramer-Rao.

Dans la pratique, pour mesurer finement le gisement des bruiteurs, il faut utiliser un traitement complémentaire (de goniométrie fine). Divers procédés sont applicables [3] :

- Monopulse de phase (split-beam).
- Monopulse d'amplitude ( $\Delta/\Sigma$ ).
- Interpolations.

La méthode du « monopulse de phase » consiste à utiliser deux demi-antennes pour fabriquer une antenne à deux capteurs directs (centre de phases distincts). La directivité propre des demi-antennes permettant d'isoler le bruiteur d'intérêt et d'en mesurer finement le gisement (par exemple par corrélation).

La méthode du « monopulse d'amplitude » consiste à utiliser deux voies préformées (même centre de phase) à partir desquelles sont fabriquées une voie « somme » ( $\Sigma$ ) et une voie « différence » ( $\Delta$ ) lorsque les deux voies sont disposées symétriquement par rapport au gisement du bruiteur le signal de la voie  $\Delta$  est minimal (localement).

La méthode (ou plutôt les méthodes) d'interpolation utilisent les énergies de sortie des voies préformées (de trois à huit sont couramment envisagées) et cherchent à estimer (généralement par combinaison linéaire des voies existantes) l'énergie des voies fictives correspondant à des directions de pointage intermédiaires. Ceci permet d'en déduire la direction du bruiteur par combinaison linéaire des directions de pointage des voies préformées.

On cherche ici à évaluer les limitations théoriques de la précision de mesure du gisement par les procédés

qui utilisent les signaux de sortie de deux voies préformées adjacentes supposées entourer la direction approximative du bruiteur (monopulse d'amplitude).

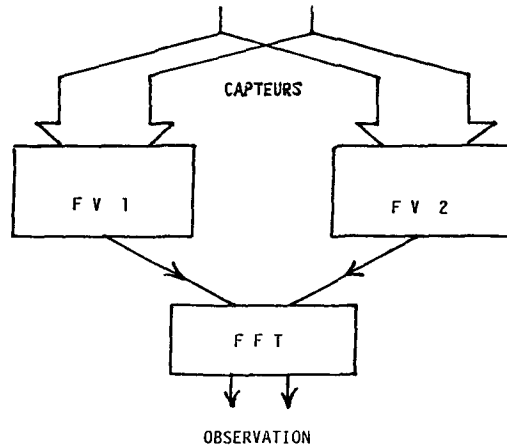


Fig. 11. - FV1 et FV2 désignent deux formations de voies pointées dans des directions de pointage  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  voisines de la direction  $\varphi$  du bruiteur à localiser finement.

On se propose d'évaluer la borne de Cramer-Rao de l'estimation du gisement d'un bruiteur à partir de la sortie des voies.

Le formalisme introduit précédemment s'adapte parfaitement à ce problème.

Si  $\mathbf{d}_1$  et  $\mathbf{d}_2$  sont les vecteurs positions (à la fréquence  $f$ ) correspondant aux deux voies préformées, la matrice de densité spectrale des deux signaux de sortie des deux voies s'écrit :

$$\Gamma_H = \mathcal{H}^+ \Gamma \mathcal{H}$$

avec :

$$\mathcal{H} = [\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2]$$

On utilise toujours la même représentation (dans le domaine des fréquences) des observations si la matrice  $\Gamma$  se décompose suivant :

$$\Gamma = \gamma \mathbf{d} \mathbf{d}^+ + \sigma \mathbf{I}$$

On obtient :

$$\Gamma_H = \sigma J_H + \gamma \mathbf{d}_H \mathbf{d}_H^+$$

où on a posé :

$$J_H = \mathcal{H}^+ \mathcal{H}$$

$$\mathbf{d}_H = \mathcal{H}^+ \mathbf{d}$$

D'après la forme de  $\Gamma_H$ , on est ramené à un problème déjà rencontré avec la différence que le bruit de fond n'est pas incohérent ( $J_H \neq \mathbf{I}$ ).

Cependant comme  $\mathcal{H}$  est connu et que le bruit de fond sur les capteurs a été supposé incohérent, la matrice  $J_H$  est connue.

Les formules du tableau I se généralisent sans difficultés lorsque le bruit de fond n'est pas incohérent. On montre d'abord que si on pose :

$$J_H = C_H C_H^+$$

où  $C_H$  est une matrice inversible (ce qui est toujours possible puisque  $J_H > 0$ ). Alors la matrice de Fisher associée à l'observation :

$$Y(f) = C_H^{-1} X(f)$$

où  $X(f)$  est l'observation initiale (TFD des sorties des voies) est donnée par les formules du tableau II en remplaçant le vecteur  $d$  par  $C_H^{-1} d$  : ceci est évident puisque

$$\Gamma_Y = C_H^{-1} \Gamma_H (C_H^{-1})^+ = \sigma I + \gamma (C_H^{-1} d_H) (C_H^{-1} d_H)^+$$

De plus,  $X(f)$  et  $Y(f)$  sont statistiquement équivalents (l'un étant relié à l'autre par une transformation déterministe linéaire inversible). On peut le vérifier directement sur la matrice de Fisher

$$\begin{aligned} F_Y(\beta_k, \beta_l) &= -\text{Tr} \{ \partial_k \Gamma_Y^{-1} \partial_l \Gamma_Y \} \\ &= -\text{Tr} \{ C_H^+ (\partial_k \Gamma_H^{-1}) C_H C_H^{-1} (\partial_l \Gamma_H) (C_H^{-1})^{-1} \} \\ &= -\text{Tr} \{ \partial_k \Gamma_H^{-1} \partial_l \Gamma_H \} \end{aligned}$$

Il suffira donc, pour calculer la borne de Cramer-Rao de l'estimation du gisement d'un bruiteur à partir des signaux de sortie des deux voies, d'utiliser les formules du tableau II en utilisant comme vecteur position le vecteur :

$$d_C = C_H^{-1} \mathcal{H}^+ d$$

Le calcul ne sera pas fait explicitement. Sur la figure 12 est représenté le résultat d'une étude par programmation.

On désigne par  $\sigma_C^2$  la variance limite de mesure du gisement d'un bruiteur en utilisant les signaux reçus par les hydrophones. Cette quantité a été calculée dans la première partie [1] et est donnée approximativement par

$$\sigma_C^2 \sim \frac{(2\theta_3)^2 (1 + KS)}{4(KS)^2}$$

où  $2\theta_3$  désigne la largeur à mi-hauteur de la fonction de directivité de l'antenne, et  $s$  le rapport signal à bruit.

On désigne ici par  $\sigma_V^2$  la variance limite de mesure du gisement d'un bruiteur à partir des signaux de sortie des deux voies.

Les deux voies sont pointées dans deux directions écartées de  $\Delta$  symétriquement autour de la direction de référence.

Sur la figure 12, trois cas sont considérés ( $\Delta = 2\theta_3$ ,  $\Delta = \theta_3$ ,  $\Delta = \theta_3/2$ ).

La figure 12 représente le rapport  $\sigma_V/\sigma_C$  en fonction de la direction du bruiteur.

L'antenne considérée est rectiligne et possède neuf capteurs équidistants de 1 m, la fréquence d'analyse est  $f = 750$  Hz et le rapport signal à bruit est fixé à  $s = 0$  dB.

On a bien sûr  $\sigma_V > \sigma_C$  (on perd en précision à utiliser les voies préformées) mais la perte est assez faible si le gisement du bruiteur est proche de la direction de référence : on a intérêt à « serrer » les voies utilisées.

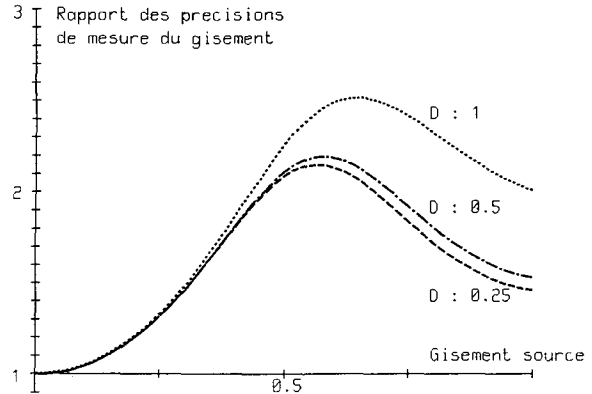


Fig. 12. — Précision de mesure du gisement par la méthode du monopulse d'amplitude pour trois valeurs de l'écart de pointage des voies. L'écart D est normalisé par rapport à la largeur du lobe classique. En abscisse est donné le gisement de la source par rapport à la direction moyenne des deux voies, il est normalisé par rapport à la largeur du lobe classique. En ordonnée est donné l'écart-type de mesure normalisé par rapport à l'écart-type de mesure qu'on aurait obtenu par la méthode optimale (en utilisant les capteurs et non les voies).

### 7. Problème à deux bruiteurs

Dans cette section le formalisme général de calcul (tableau I) est appliqué au cas particulier de l'estimation des paramètres de deux bruiteurs. Cette étude s'effectue par programmation.

L'exemple considéré concerne une antenne rectiligne périodique à neuf capteurs équidistants de  $d = \lambda/2$ , le champ de bruit est constitué de deux bruiteurs ponctuels de même niveau et de gisements symétriques par rapport au gisement  $\theta : 0^\circ$ . Le fait que les gisements soient symétriques n'est pas utilisé comme une contrainte dans le calcul de la matrice de Fisher.

La figure 13 représente le tracé de la variance limite de l'estimation de l'écart  $\epsilon$  entre les deux bruiteurs en fonction du rapport S/B des deux bruiteurs. Les trois courbes correspondent à trois valeurs de l'écart réel  $\epsilon$  entre les bruiteurs. On remarque d'abord qu'à fort et à faible rapports signal sur bruit la variance d'estimation de l'écart croît comme l'inverse de l'écart  $\epsilon$  (ce qui est conforme à l'intuition).

En particulier pour un écart  $\epsilon$  supérieur à  $2\theta_3$  (ici  $12,5^\circ$ ) les deux bruiteurs ne se gênent pas et la variance de l'écart estimé est le double de la variance d'estimation de la position de chaque bruiteur indépendamment (donnée par la formule de Woodward en passif).

Par contre, lorsque les deux bruiteurs sont dans le même lobe de directivité de l'antenne ( $\varepsilon < 2\theta_3$ ) ils se gênent mutuellement et l'estimation de l'écart est dégradée (couplages).

On remarque cependant un phénomène curieux pour un rapport S/B de l'ordre de 20 dB : lorsqu'on augmente l'écart, la précision *décroit* quelquefois.

Ce résultat est également confirmé sur la figure 11 où on a représenté la précision de mesure de l'écart en fonction de l'écart : on observe une zone de valeurs de  $\varepsilon$  où la courbe passe par un minimum.

Ce résultat est tout à fait contraire à l'intuition.

On pourrait se dire qu'après tout la borne de Cramer-Rao n'est qu'une borne et qu'un estimateur réel ne se comporterait pas de cette manière. Ce n'est pas le cas, ce phénomène a été observé dans une étude récente [4] sur l'estimateur optimal qui atteint la borne de Cramer-Rao (vérifications sur signaux synthétiques). On pourrait aussi se dire que ce phénomène a lieu en dehors de la zone de détection des deux bruiteurs (c'est-à-dire qu'il serait en pratique inobservable), ce n'est pas le cas non plus [4].

Enfin, on pourrait également se dire que ce phénomène est masqué en pratique par le biais mais ce n'est pas le cas [4] : dans cette zone le biais apparaît comme négligeable.

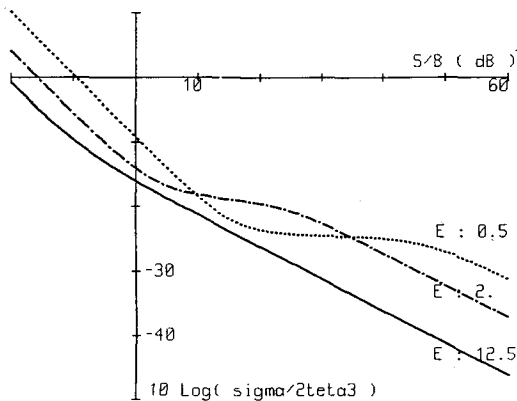


Fig. 13. — Variance limite de mesure de l'écart angulaire  $\Sigma$  entre deux bruiteurs de même niveau en fonction du rapport signal sur bruit (sur un capteur).

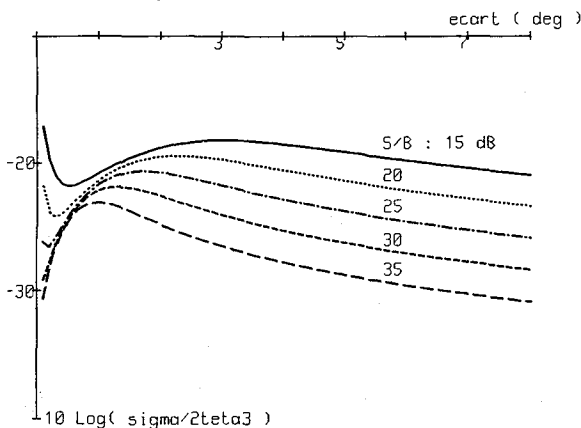


Fig. 14. — Variance limite de mesure de l'écart angulaire  $\Sigma$  entre deux bruiteurs de même niveau en fonction de l'écart.

Ce curieux phénomène ne semble pas à ce jour avoir reçu d'explication raisonnable, il nous a cependant semblé intéressant de le signaler, d'autant plus que c'est un phénomène effectivement observé (sur signaux synthétiques) dans le comportement du traitement adapté.

## 8. Effets des imprécisions d'antenne

Dans cette section on s'intéresse d'une façon générale aux bornes de Cramer-Rao concernant des estimateurs de paramètres non plus inconnus mais aléatoires de distribution connue : le problème particulier des imprécisions d'antenne fait partie de cette catégorie.

Dans la pratique les antennes ne sont jamais parfaites, il existe des erreurs sur la position des hydrophones, des dispersions dans leurs propriétés acoustiques...

Ces phénomènes vont dégrader les précisions de mesure des paramètres des bruiteurs.

On suivra la démarche présentée dans la référence [5] et fondée sur les deux remarques suivantes :

- puisque les positions des capteurs ne sont pas connues il faut les estimer avec les autres paramètres du problème;

- cependant ces paramètres sont particuliers, ils ne sont pas totalement inconnus (positions nominales des capteurs avec une dispersion connue).

On modélise cette situation en considérant que les paramètres à estimer sont aléatoires et distribués suivant une loi de densité de probabilité connue.

Finalement l'ensemble des paramètres du problème (le vecteur  $\beta$  de l'introduction [1]) sera un vecteur aléatoire (même si une partie des composantes est déterministe).

Le théorème de Cramer-Rao pour des paramètres aléatoires s'énonce de la même manière [6] :

$$V - F^{-1} \geq 0$$

(avec les mêmes notations que dans l'introduction), l'expression de la matrice de Fisher devient :

$$F = F_D + F_A$$

où  $F_D$  (D, pour « déterministe ») a pour terme général :

$$F_D(\beta_k, \beta_l) = E \{ \partial_k \mathcal{L}_D \partial_l \mathcal{L}_D \}$$

$$\mathcal{L}_D = \text{Ln } p_X(\mathbf{x}/\mathbf{B})$$

c'est le même terme que précédemment et  $F_A$  (A pour « aléatoire ») a pour terme général :

$$F_A(\beta_k, \beta_l) = E \{ \partial_k \mathcal{L}_A \partial_l \mathcal{L}_A \}$$

$$\mathcal{L}_A = \text{Ln}(p_B(\beta))$$

terme qui fait intervenir la distribution *a priori* des

paramètres : ce terme est nul pour les paramètres déterministes.

En décomposant symboliquement le vecteur  $\beta$  de paramètres sous la forme

$$\beta = \{\alpha, \gamma\}$$

où  $\alpha$  désigne la partie déterministe et  $\gamma$  la partie aléatoire (positions des capteurs) et si on suppose  $\gamma$  gaussien de moyenne  $g$  et de matrice de covariance  $\Phi$ , on peut décomposer la matrice de Fisher en blocs

$$F(\beta, \beta) = \begin{pmatrix} F(\alpha, \alpha) & F(\alpha, \gamma) \\ F(\gamma, \alpha) & F(\gamma, \gamma) \end{pmatrix}$$

et on a

$$\begin{aligned} F(\alpha, \alpha) &= F_D(\alpha, \alpha) \\ F(\gamma, \gamma) &= F_D(\gamma, \gamma) + F_A(\gamma, \gamma) \end{aligned}$$

où

$$F_A(\gamma, \gamma) = \Phi^{-1}$$

En effet,  $\gamma$  étant gaussien de dimension  $L$

$$L_A = -\frac{L}{2} \ln(2\pi)$$

$$-\frac{1}{2} \ln |\Phi| - \frac{1}{2} (\gamma - g)^T \Phi^{-1} (\gamma - g)$$

$$\nabla_{\gamma} L_A = -\Phi^{-1} (\gamma - g)$$

$$\nabla_{\gamma}^2 L_A = -\Phi^{-1}$$

Finalement

$$\begin{aligned} F(\alpha, \gamma) &= F_D(\alpha, \gamma) + F_A(\alpha, \gamma) \\ F_A(\alpha, \gamma) &= 0 \end{aligned}$$

L'expression finale de la matrice de Fisher sera

$$F(\beta, \beta) = \begin{pmatrix} F_D(\alpha, \alpha) & F_D(\alpha, \gamma) \\ F_D(\gamma, \alpha) & F_D(\gamma, \gamma) + \Phi^{-1} \end{pmatrix}$$

et les calculs se poursuivent de manière analogue à ceux effectués dans le cas déterministe pur.

La partie de la matrice de Fisher qui concerne les positions des capteurs peut être utile pour évaluer les performances des algorithmes d'estimation de la position des capteurs [7].

Dans le cas général, il faudra utiliser un ordinateur pour exploiter les résultats précédents.

Pour l'antenne linéaire périodique à capteurs omnidirectionnels, il est possible d'obtenir des formules explicites lorsque les erreurs de positionnement des capteurs sont équidistribuées et indépendantes.

Le calcul est un peu long, mais n'offre pas de difficultés. On trouve, par rapport au cas d'une antenne non perturbée, que la variance limite d'observation des

paramètres  $\sin \theta$  et  $R^{-1}$  doit être augmentée des valeurs indiquées ci-dessous :

$$\Delta \{ \sigma_{\sin \theta} \}^2 = \left( 2 \theta_3 \frac{2 \pi \sigma_r}{\sqrt{2 K} \lambda} \right)^2$$

$$\Delta \{ \sigma_{R^{-1}} \}^2 = \left( 2 \alpha_3 \frac{2 \pi \sigma_r}{\sqrt{2 K} \lambda} \right)^2$$

avec

$$\sigma_r^2 = \sigma_x^2 \sin^2 \theta + \sigma_y^2 \cos^2 \theta$$

$\sigma_x^2$  est la variance de l'erreur de positionnement axiale,  $\sigma_y^2$  la variance de l'erreur de positionnement transverse (plan horizontal).

Même avec un bruiteur de puissance infinie, la variance sera limitée : ceci est illustré sur la figure 15.

Pour avoir une idée de la précision de positionnement nécessaire, on donne la valeur de  $\sigma_r$  pour laquelle la variance, en l'absence d'erreur, est égale à la variance due à l'erreur :

$$\frac{\sigma_r}{\lambda} = \frac{1}{4 \pi} \sqrt{\frac{2(1+KS)}{KS^2}}$$

Par exemple, pour  $K=32$  capteurs et  $S=1$  (0 dB), on trouvera

$$\sigma_r \sim \lambda/8$$

soit 4 cm à 4 500 Hz, ce qui est raisonnable si il suffit de l'assurer sur 5 m d'ouverture.

Par contre, avec un télémètre à trois panneaux de 60 m d'ouverture, un rapport signal à bruit de -15 dB et des panneaux de 20 dB de gain, le même calcul donne :

$$\sigma_r \sim \lambda/15$$

soit 2 cm à 4 500 Hz, très difficile à assurer sur 60 m.

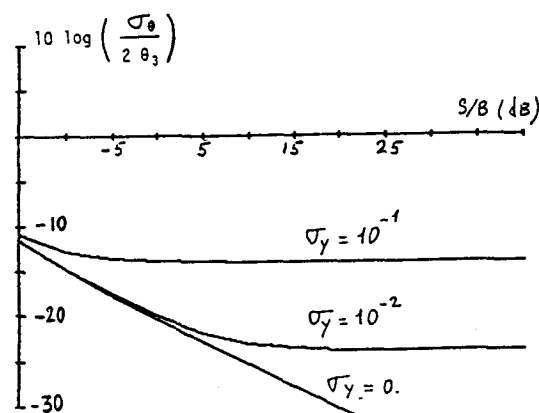


Fig. 15. — Effet des erreurs de positionnement des hydrophones sur la précision limite de mesure du gisement pour une antenne rectiligne périodique de neuf capteurs de pas  $\lambda/2$ .  $\sigma_y$  désigne l'écart-type (normalisé à la longueur d'onde  $\lambda$ ) de l'erreur transverse (dominante pour  $\theta=0$ ).

## 9. Commentaires et conclusions

La borne de Cramer-Rao est un outil d'investigation intéressant dans de nombreux domaines (voir l'introduction de la première partie [1]). Nous espérons que cet essai de synthèse pourra contribuer à montrer que la petite difficulté technique liée au fait que l'observation est vectorielle dans le cas du traitement d'antenne peut être résolue sans trop de peine (dans le cas gaussien) par un formalisme approprié. L'étude présentée ne prétend pas en avoir épuisé tous les aspects, il aurait par exemple été intéressant de s'intéresser de plus près aux conditions d'applicabilité de la borne (problème du biais, existence de l'estimateur efficace,...). On peut aussi mentionner le lien entre les conditions d'observabilité (cas où  $\beta$  ne peut être estimé sans ambiguïtés) et le conditionnement de la matrice de Fisher [16] ou bien l'intérêt de connaître la matrice de Fisher pour définir un estimateur [17]. Par ailleurs, il existe d'autres bornes (Battacharya, Barankin, [6]) qu'il aurait été intéressant d'examiner et de comparer à celle de Cramer-Rao. Les exemples proposés dans cet article sont loin d'épuiser la liste des applications possibles, non seulement en traitement sonar (par exemple : le problème du champ proche, l'exploitation de l'effet Doppler, la trajectographie,...), mais d'en d'autres domaines où un formalisme similaire peut s'appliquer (en particulier l'analyse spectrale paramétrique sur laquelle on trouve des publications récentes, par exemple [8-10]).

Les résultats obtenus sur les exemples traités ne doivent pas être considérés comme présentant de façon réaliste les performances des estimateurs (lorsqu'ils sont connus) en raison de phénomènes négligés dans le calcul (en particulier la méconnaissance pratique du bruit de fond). Les exemples ont surtout un intérêt didactique pour montrer le formalisme à l'œuvre.

En traitement d'antenne, l'intérêt du formalisme apparaît particulièrement lorsqu'on s'intéresse à l'étude de problèmes multi-bruiteurs qui font l'objet de nouvelles méthodes de traitement (en particulier les méthodes dites « Haute Résolution ») qui sont aujourd'hui suffisamment mûres pour qu'on puisse s'interroger sur leur optimalité [11-12].

Dans les problèmes multi-bruiteurs il est en effet difficile de développer tous les calculs « à la main » et il est plus efficace de disposer d'une méthode générale de calcul dont la programmation sur calculateur peut se faire simplement.

## 10. Remerciements

Cet article utilise les résultats d'études financées en partie par la DRET (Direction des Recherches et Études Techniques, Paris).

Nous remercions les experts anonymes pour les remarques constructives ayant permis d'améliorer la lisibilité et le contenu de cet article.

*Manuscrit reçu le 16 janvier 1987.*

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. KOPP et D. THUBERT, Bornes de Cramer-Rao en traitement d'antenne. Première partie : Formalisme, *Traitement du Signal*, 3, n° 3, 1986, p. 111-125.
- [2] A. S. HOUSEHOLDER, *The Theory of Matrices in Numerical Analysis*, Dover, 1964.
- [3] D. BILLON, Bearing Estimation with a Linear Array, *Proc. ICASSP 86*, Tokyo, 8-11 avril 1986.
- [4] F. M. WHITE (Group 44 Stanford), *Performances of Bayes Optimal Angle of Arrival Estimators*, Report TR-654.
- [5] P. M. SCHULTEISS et E. WEINSTEIN, Detection and Estimation. A Summary of Results, *Proc. of NATO ASI 1980 in "Underwater Acoustics and Signal Processing"*, L. BJORNO éd., Pub. D. Reidel, 1981.
- [6] H. L. VAN TREES, *Detection, Estimation and Modulation Theory*, 1, 1968, J. Wiley.
- [7] P. NICOLAS et G. VEZZOSI, Localisation des sources ponctuelles avec une antenne de géométrie inconnue, *Actes du GRETSI 1985*, Nice, 20-24 mai, p. 331-337.
- [8] B. FRIEDLANDER, On the Computation of the Cramer-Rao Bound for ARMA Parameter Estimation, *IEEE Trans. on ASSP*, 32, n° 4, août 1984, p. 721-727.
- [9] B. FRIEDLANDER et B. PORAT, A General Lower Bound for Parameter Spectrum Estimation, *IEEE Trans. on ASSP*, 32, n° 4, août 1984, p. 728-732.
- [10] B. FRIEDLANDER et K. C. SHARMAN, Performance Evaluation of the Modified Yule-Walker Estimator, *IEEE Trans. on ASSP*, 33, n° 3, June 1985, p. 719-725.
- [11] G. BIENVENU et L. KOPP, Principe de la goniométrie passive adaptative, *Actes du GRETSI 1979*, Nice, 28 mai-2 juin, p. 106.
- [12] D. THUBERT, L. KOPP et J. P. LECADRE, Précision des méthodes haute-résolution et bornes de Cramer-Rao, *Actes du GRETSI 1985*, Nice, 20-24 mai, p. 369-374.
- [13] M. J. SHENSA, On the Uniqueness of Doppler Tracking, *JASA*, 70, n° 4, 1981, p. 1062-1064.
- [14] J. M. F. MOURA, A Spatial Smoothing Formulation for Location Systems, *IEEE Trans. on Oceanic Engineering*, OE-8, n° 3, 1983, p. 148-162.
- [15] M. J. HINICH, Tracking a Moving Vessel from Bearing Measurements, *IEEE Trans. on Oceanic Engineering*, OE-8, n° 3, 1983, p. 131-135.
- [16] D. PILLON, *Observabilité en trajectographie passive*, Rapport n° 49341, DCAN, Toulon, GERDSM, 1986.
- [17] W. R. HAHN, Optimum Signal Processing for Passive Sonar Range and Bearing Estimation, *JASA*, 58, n° 1, July 1975, p. 201-207.
- [18] L. C. NG et Y. BAR-SHALOM, Multisensor Multitarget Time Delay Vector Estimation, *IEEE Trans. on ASSP*, 34, n° 4, 1986, p. 669-678.