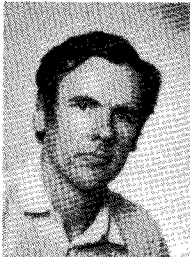


Mouvements et traitement d'images

Motions and pattern analysis



Guy BORNARD

Laboratoire d'Automatique de Grenoble, BP n° 46, 38402 SAINT-MARTIN-D'HÈRES

Guy Bornard né en 1944, est ingénieur ENSAM 1965, IAG 1966, Docteur d'État 1971. Il entre au Laboratoire d'Automatique de Grenoble en 1966, au CNRS en 1973. Actuellement il est Directeur de Recherche au CNRS et Responsable de l'équipe Systèmes et Commandes au LAG. Ses axes de recherches sont la modélisation et commande des procédés industriels de production continue, la théorie des systèmes non linéaires.



Jean-Paul GAUTHIER

Laboratoire d'Automatique de Grenoble, BP n° 46, 38402 SAINT-MARTIN-D'HÈRES

Jean-Paul Gauthier, né en 1952, est ingénieur ENSIMAG 1975, Docteur ès-Sciences Physiques 1982. Ses axes de recherches sont la modélisation et commande des procédés physico-chimiques, la théorie de la commande des systèmes non linéaires, les aspects mathématiques de l'analyse des systèmes. Il est Chargé de Recherche au CNRS.



Martine SILBERMANN

Laboratoire d'Automatique de Grenoble, BP n° 46, 38402 SAINT-MARTIN-D'HÈRES

Martine Silbermann, née en 1960, est titulaire du DEA Traitement graphique/Traitement d'Image depuis 1983 (Université Louis-Pasteur de Strasbourg). Elle prépare actuellement son Doctorat à l'INPG. Ses domaines d'intérêt sont le traitement d'image, la reconnaissance des formes.

RÉSUMÉ

Dans cet article, on propose une transformée qui semble être un outil potentiel pour l'analyse d'images ou la reconnaissance de formes; en particulier dans les situations où des « déplacements » interviennent.

On présente quelques résultats numériques relatifs à cette transformée, qui est étroitement liée à la transformée de Fourier 2-D standard.

MOTS CLÉS

Analyse d'images, reconnaissance de formes, transformée de Fourier, objets en mouvement.

SUMMARY

In this paper, we propose a transform which seems to be an adequate tool for pattern analysis, specially when motions are involved.

We make some numerical investigations around this transform, which is closely related to the standard 2-D Fourier transform.

KEY WORDS

Pattern analysis, pattern recognition, Fourier transform, objects in motion.

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction
2. Définition et propriétés de la \mathcal{M}-transformée (transformée par rapport aux déplacements)
2.1. Transformée de Fourier sur le groupe des déplacements $S_{1,x} \mathcal{R}^2$
2.2. La \mathcal{M} -transformée sur le plan (la transformée par rapport aux déplacements définie sur le plan)
2.3. Propriétés de la \mathcal{M} -transformée
3. Investigations numériques autour de la \mathcal{M}-transformée
4. Le descripteur par rapport aux déplacements $\mathcal{M}D$
5. Conclusion. Perspectives
Bibliographie

1. Introduction

Les transformées de Fourier usuelles sont des outils très utilisés pour la reconnaissance de formes. Des concepts voisins, tels que les « descripteurs de Fourier » sont utilisés pour la description, la classification et la reconnaissance d'objets dans une image. Dans cet article, nous suggérons qu'une certaine transformation, étroitement liée à la transformée de Fourier standard, peut être utile pour les problèmes suivants :

- Reconnaissance de « motifs » (un « motif » étant défini comme une classe d'équivalence d'objets par rapport aux déplacements, ou déplacements plus homothéties).
- Représentation, détection de déplacements en analyse d'images.
- Reconnaissance des mouvements relatifs de plusieurs objets dans une scène.

Pour développer notre idée, nous nous sommes inspirés de l'analyse harmonique abstraite et de la théorie des représentations. Puisque nous considérons des déplacements, l'outil adéquat serait une transformée de Fourier adaptée aux déplacements. La transformée de Fourier usuelle 2-D est, d'une certaine façon, adaptée aux translations, alors que les séries de Fourier standards (souvent utilisées pour décrire les contours des objets en reconnaissance de formes) sont, d'une certaine façon adaptées aux rotations.

La transformation que nous proposons a ces propriétés : par exemple, la transformée d'une fonction $f(x, y)$ composée avec un déplacement (translation plus rotation) n'est autre que la transformée de cette fonction, multipliée par un opérateur qui, formellement, joue le même rôle que $e^{i\omega x}$ dans la transformée habituelle.

Cette transformation est en fait la transformée de Fourier abstraite sur le groupe des déplacements $S_{1,x} \mathcal{R}^2$ (produit semi-direct du groupe des rotations S_1 et des translations \mathcal{R}^2 : les éléments de ce groupe sont des déplacements (θ, x, y) ; θ étant la rotation et (x, y) la translation, le produit sur ce groupe [non commutatif] est simplement la composition des déplacements).

Dans le paragraphe 2, nous définissons cette transformation et étudions ses principales propriétés et relations avec la transformée de Fourier habituelle.

La partie 2.2 constitue la contribution théorique principale de cet article.

Dans le paragraphe 3, nous présentons quelques investigations numériques autour de cette transformée.

Dans le paragraphe 4, nous faisons une remarque, probablement assez triviale, concernant la notion de descripteurs de Fourier pour la reconnaissance de formes.

Dans la conclusion, nous précisons les directions dans lesquelles se poursuit cette étude, sur le plan théorique.

Des applications possibles de ce travail sont :

- l'estimation de déplacements relatifs d'objets dans des images planes;
- la recherche d'invariants, la reconnaissance et la classification d'objets (voir §4);
- le filtrage, l'estimation de contours (zero-crossing) : comme dans le cas des transformées usuelles, la convolution ou l'opérateur Laplacien s'expriment simplement sur la transformée.

Signalons que des idées similaires (pour les groupes compacts, au lieu des groupes non compacts, ce qui rend la théorie plus simple en raison du théorème de Peter-Weyl) ont été présentées dans l'article de S. Chen [C].

Soulignons que la transformée proposée s'applique uniquement aux opérations linéaires en 2-D (les occultations d'objets 3-D projetés sur le plan ne sont pas des opérations linéaires). Toutefois, des transformations du même type peuvent certainement être obtenues dans le cas 3-D; le groupe des déplacements à trois dimensions a cependant une structure plus complexe.

Tout au long de l'article, une image 2-D sera décrite par une fonction réelle f de carré sommable définie sur le plan \mathcal{R}^2 et dont la valeur $f(x, y)$ représente le niveau de gris de l'image au point (x, y) .

2. Définition et propriétés de la \mathcal{M} -transformée (transformée par rapport aux déplacements)

Le point de vue que nous employons ici est celui de la théorie des représentations. Comme il est expliqué au paragraphe 2.3.3, les transformées que nous proposons sont intimement liées aux transformées de Fourier usuelles, et pourraient bien être introduites par ce moyen. Cependant, nous pensons que notre approche éclaire singulièrement un certain nombre de points (par exemple, la généralisation de la notion de descripteurs de Fourier, §4 : le descripteur que nous proposons, invariant par rapport aux déplacements, est exactement l'analogie formel [voir notre généralisation de la formule de Plancherel] des modules des termes de la série de Fourier d'un contour, appelés de façon usuelle « descripteurs de Fourier » [PK]). Par ailleurs, comme expliqué dans la conclusion, le point de vue des représentations permettra d'aborder sous le même angle les problèmes de transformées discrète et rapide.

2.1. TRANSFORMÉE DE FOURIER SUR LE GROUPE DES DÉPLACEMENTS $S_{1x} \mathcal{R}^2$

Le principal résultat de ce paragraphe est une application directe au cas de $S_{1x} \mathcal{R}^2$, d'un théorème général de Segal et Mautner ([S], [M]) : « généralisation du théorème de Plancherel aux groupes séparables unimodulaires localement compacts ».

Pour un énoncé exact de ce théorème, on pourra se référer, par exemple, à Kirillov ([K], p. 203).

Un élément typique de $G = S_{1x} \mathcal{R}^2$ sera noté (θ, x, y) [$\theta \rightarrow$ rotation, $(x, y) \rightarrow$ translation].

[Nous noterons de la même façon – comme il est d'usage en théorie des groupes – un point (x, y) du plan ou une translation de vecteur (x, y) sur le plan.]

2.1.1. Nous désignons par \hat{G} l'« espace dual » de G l'ensemble des classes d'équivalence des représentations continues unitaires irréductibles de G dans des espaces de Hilbert séparables).

Pour déterminer \hat{G} , G étant un produit semi-direct, on peut appliquer le théorème d'imprimitivité de Mackey ([W], p. 436-440). Ce théorème nous dit que \hat{G} est paramétré par les orbites de l'action de S_1 dans \mathcal{R}^2 . Comme toutes les orbites (sauf $\{0\}$) ont un sous-groupe d'isotropie trivial, une seule représentation est associée à chaque orbite non nulle.

Les représentations associées à l'orbite nulle sont les relèvements sur G des caractères unitaires $\hat{\xi}_n$ de S_1 , $\hat{\xi}_n = e^{in\theta}$.

La représentation associée à l'orbite

$$S_\lambda = \{ (x, y) / x^2 + y^2 = \lambda^2 \}, \quad \lambda > 0$$

est la représentation unitaire induite (Kirillov, [K], p. 211-220), $\text{Ind}(\hat{\xi}_\lambda)$ du caractère unitaire de \mathcal{R}^2 , $e^{i\langle \hat{\xi}_\lambda, x \rangle}$ pour un quelconque $\hat{\xi}_\lambda \in S_\lambda$.

Tous calculs faits, nous obtenons les deux familles de représentations :

$$(R_1) \quad T_n(\theta, x, y) = e^{in\theta}$$

pour les représentations associées à l'orbite nulle,

$$(R_2) \quad [T_\lambda(\theta, x, y) \cdot \psi](z) = e^{i\lambda [x \cos z + y \sin z]} \psi(z + \theta)$$

pour les représentations associées à l'orbite S_λ , $\lambda > 0$. Les opérateurs $T_\lambda(\theta, x, y)$ agissent sur l'espace $\mathcal{L}^2(S_1)$ [fonctions de carré sommable sur le cercle S_1 , notées généralement $\psi(z)$].

Si l'on choisit comme base de $\mathcal{L}^2(S_1)$ la base orthonormale $\{ e^{in\theta}, n \in \mathcal{Z} \}$ $i = \sqrt{-1}$ et que l'on calcule à l'aide des séries de Fourier standard, la matrice infinie de l'opérateur T_λ dans cette base, on obtient :

$$(R_3) \quad T_\lambda(\theta, \rho, \omega)_{(m, n)} = e^{i(n\theta + (n-m)(\omega - \pi/2))} J_{m-n}(\lambda\rho)$$

où (ρ, ω) sont les coordonnées polaires dans le plan, et $J_k(z)$ est la k -ième fonction de Bessel dont la représentation intégrale de Sommerfeld est ([NO], p. 183) :

$$(R_4) \quad J_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \sin \theta - ik\theta} d\theta$$

Les représentations de G ont été étudiées en détail par Vilenkin [V].

2.1.2. Soit $d\mu(\lambda)$ la mesure borélienne sur $\hat{G} = \mathcal{R}^+ - \{0\} \cup \mathcal{Z}$, dont le support est $\mathcal{R}^+ - \{0\}$, donnée par $d\mu(\lambda) = \lambda/4 \pi^2 d\lambda$; $d\mu(\lambda)$ est appelée la mesure de Plancherel sur \hat{G} .

2.1.3. Soit H l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt sur $\mathcal{L}^2(S_1)$ avec le produit scalaire $\langle A, B \rangle = \text{Trace}[A \cdot B^*]$ ($*$ est l'opérateur adjoint).

Soit \mathcal{H} l'espace des fonctions sur \hat{G} à valeurs dans H , de carré sommable sur \hat{G} par rapport à la mesure de Plancherel $d\mu(\lambda)$. \mathcal{H} est l'espace de Hilbert des fonctions sur \hat{G} à valeurs dans H muni du produit scalaire :

$$(F_1) \quad \langle \hat{f}(\lambda), \hat{g}(\lambda) \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\lambda > 0} \text{trace}[\hat{f}(\lambda) \hat{g}^*(\lambda)] d\mu(\lambda).$$

2.1.4. Transformée de Fourier sur G , théorème de Plancherel

La mesure de Haar sur G est bi-invariante. Elle est donnée par la formule $d(\theta, x, y) = d\theta dx dy$. Soient $\mathcal{L}^1(G)$ et $\mathcal{L}^2(G)$ les espaces de Banach de fonctions respectivement absolument sommables, et de carré sommable sur G par rapport à la mesure de Haar. Soit \mathcal{F} l'application linéaire de $\mathcal{L}^1(G) \cap \mathcal{L}^2(G)$ dans \mathcal{H} définie par :

$$(F_2) \quad \mathcal{F}(f) = \hat{f}(\lambda) = \int_G f(\theta, x, y) T_\lambda^{-1}(\theta, x, y) d\theta dx dy.$$

\mathcal{F} s'étend de façon unique (à 2π près) à une isométrie \mathcal{F} des espaces de Hilbert $\mathcal{L}^2(G)$ et \mathcal{H} .

\mathcal{F} est appelée transformée de Fourier sur G .

(La formule de Plancherel exprime simplement que \mathcal{F} est une isométrie.)

2.1.5. Transformée de Fourier inverse sur G

La transformée de Fourier inverse sur G est donnée par la formule :

$$(F_3) \quad f(\theta, x, y) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) \\ = \int_{\lambda > 0} \text{trace}[\hat{f}(\lambda) T_\lambda(\theta, x, y)] d\mu(\lambda).$$

Remarque. — Cette situation est formellement exactement la même que celle de la transformée de Fourier standard (sur \mathcal{R} par exemple) si on considère les opérateurs e^{ix} sur \mathcal{C} comme l'ensemble des représentations unitaires irréductibles de \mathcal{R} ,

La seule différence significative est que l'ensemble des représentations nécessaires pour développer les fonctions sur G n'est pas constitué de toutes les représentations de \hat{G} : les représentations $T_n(\theta, x, y) = e^{in\theta}$ ne jouent aucun rôle.

Une situation similaire apparaît dans le cas des groupes nilpotents, où le dual est formé des orbites de la représentation coadjointe, et où seules les orbites génériques doivent être utilisées (cf. [K]).

2.2. LA \mathcal{M} -TRANSFORMÉE SUR LE PLAN (LA TRANSFORMÉE PAR RAPPORT AUX DÉPLACEMENTS DÉFINIE SUR LE PLAN)

Dans le cas du groupe G des déplacements agissant sur le plan, la situation est favorable à deux points de vue :

1. Il existe une mesure sur \mathcal{R}^2 (mesure de Lebesgue) qui est invariante sous l'action de G . Ceci n'est pas du tout une généralité (mais exprime simplement le fait que G est un groupe de « déplacements »).

2. La fibration de G sur l'espace homogène \mathcal{R}^2 admet des fibres compactes (homéomorphes au cercle S_1). De sorte que des fonctions de carré sommable sur le plan \mathcal{R}^2 , par rapport à la mesure G -invariante se relèvent en des fonctions de carré sommable sur G par rapport à la mesure de Haar.

Ces deux faits nous permettent de définir sur le plan la « transformée par rapport aux déplacements » (notée \mathcal{M} -transformée), comme étant exactement la transformée de Fourier, « descendue » sur le plan.

Pour une fonction f sur G , qui ne dépend pas de θ , l'expression (F_2) de la transformée de Fourier sur G devient [avec (ρ, ω) les coordonnées polaires dans le plan] :

$$[\hat{f}(\lambda) \cdot \psi](z) = [\mathcal{F}(f)(\lambda) \cdot \psi](z) \\ \text{obtenue à partir de (R}_2\text{)} \\ \downarrow \\ = \int_G f(\rho, \omega) e^{-i\lambda\rho \cos(\theta - z + \omega)} \psi(z - \theta) \rho d\theta d\rho d\omega.$$

et en posant $\theta - z = \theta'$, on obtient :

$$[\hat{f}(\lambda) \cdot \psi](z) \\ = \int_G f(\rho, \omega) e^{-i\lambda\rho \cos(\theta' + \omega)} \psi(-\theta') \rho d\theta' d\rho d\omega$$

Cette expression ne dépend pas de z . Nous remarquons donc que l'opérateur $\hat{f}(\lambda)$ correspondant à une telle fonction $f(x, y)$ envoie une fonction $\psi \in \mathcal{L}^2(S_1)$ dans une fonction constante. Ainsi, nous définirons la \mathcal{M} -transformée d'une fonction f sur le plan, comme la famille de formes linéaires sur $\mathcal{L}^2(S_1)$ correspondant à la transformée de Fourier de la fonction f relevée sur G ; ces formes linéaires associant à $\psi(z) \in \mathcal{L}^2(S_1)$ la valeur (constante) de $\hat{f}(\lambda) \cdot \psi$.

En choisissant la base $\{e^{in\theta}, n \in \mathcal{Z}\}$ sur $\mathcal{L}^2(S_1)$ et en calculant un peu, on obtient, dans cette base, l'expression de la \mathcal{M} -transformée.

2.2.1. Définition de la transformée par rapport aux déplacements (\mathcal{M} -transformée)

La \mathcal{M} -transformée de f , $\mathcal{M}(f) = \tilde{f}$ est la famille de formes linéaires $\tilde{f}(\lambda)$, $\lambda \in \mathcal{R}^+ - \{0\}$, sur $\mathcal{L}^2(S_1)$ dont l'expression dans la base $\{e^{in\theta}, n \in \mathcal{Z}\}$ de $\mathcal{L}^2(S_1)$ est :

$$(M_1) \quad \mathcal{M}(f)_n = \tilde{f}(\lambda)_n \\ = 2\pi e^{in\pi/2} \int_{\rho, \omega} f(\rho, \omega) e^{in\omega} J_n(-\lambda\rho) \rho d\rho d\omega.$$

2.2.2. L'espace dual de $\mathcal{L}^2(S_1)$ s'identifie à $\mathcal{L}^2(S_1)$. Nous définissons sur $V_M = \mathcal{L}^2(S_1) \times \mathcal{R}^+ - \{0\}$ le produit scalaire

$$(M_2) \quad \langle \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 \rangle_M = \int_{\lambda > 0} \sum_n \tilde{f}_1(\lambda)_n \overline{\tilde{f}_2(\lambda)_n} d\mu(\lambda).$$

où $d\mu(\lambda)$ est la mesure de Plancherel sur \hat{G} identifié avec $\mathcal{R}^+ - \{0\}$. L'ensemble des éléments \tilde{f} de V_M tels que le produit scalaire $\langle \tilde{f}, \tilde{f} \rangle_M$ existe est un espace de Hilbert, noté \mathcal{H}_M , canoniquement isomorphe à l'espace de Hilbert des fonctions de carré sommable sur le plan \mathcal{R}^2 .

2.2.3. Analogie de la formule de Plancherel pour \mathcal{M}

L'application $\mathcal{M} : \mathcal{L}^2(\mathcal{R}^2) \rightarrow \mathcal{H}_M$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ est (à 2π près) un isomorphisme de ces espaces de Hilbert. On a :

$$(M_3) \quad \int_{\mathcal{R}^2} f_1(x, y) \overline{f_2(x, y)} dx dy \\ = \langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 \rangle_M \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{\lambda > 0} \sum_n \tilde{f}_1(\lambda)_n \overline{\tilde{f}_2(\lambda)_n} \frac{\lambda}{4\pi^2} d\lambda$$

2.2.4. La \mathcal{M} -transformée inverse

L'inverse de la transformée par rapport aux déplacements est donnée par :

$$(M_4) \quad \mathcal{M}^{-1}(\tilde{f}) = f(\rho, \omega) \\ = \sum_m \int_{\lambda > 0} \tilde{f}(\lambda)_m e^{-im(\omega - \pi/2)} J_m(\lambda \rho) \frac{\lambda}{4\pi^2} d\lambda.$$

(M₂), (M₃) et (M₄) sont obtenus après quelques calculs en utilisant les transformées de Fourier standard et leurs formules d'inversion, les intégrales de Fourier-Bessel standard et leurs formules d'inversion ([NO], p. 185), ou le théorème de Segal-Mautner et la formule d'inversion générale (F₃). Nous ne développerons pas ici ces calculs.

2.3. PROPRIÉTÉS DE LA \mathcal{M} -TRANSFORMÉE

2.3.1. Effet d'un déplacement

Rappelons (R₃) qui nous dit que dans la base $\{e^{in\theta}, n \in \mathcal{Z}\}$ de $\mathcal{L}^2(S_1)$, la matrice infinie d'un déplacement (θ, ρ, ω) (avec (ρ, ω) coordonnées polaires de la translation) s'exprime par :

$$T_\lambda(\theta, \rho, \omega)_{(m, n)} = e^{i(n\theta + (n-m)(\omega - \pi/2))} J_{m-n}(\lambda \rho).$$

L'effet d'un déplacement (θ, ρ, ω) sur la \mathcal{M} -transformée $\mathcal{M}(f)$ est une multiplication à droite (ou composition d'applications) de la famille des formes linéaires $\tilde{f}(\lambda)$ par les matrices $T_\lambda(\theta, \rho, \omega)$: soit $g(x, y)$ l'application $f((\theta, \rho, \omega) \cdot (x, y))$, on aura alors :

$$(M_5) \quad \mathcal{M}(g)(\lambda) = \tilde{g}(\lambda) = \tilde{f}(\lambda) \cdot T_\lambda(\theta, \rho, \omega)$$

Ceci est dû à l'invariance de la mesure de Lebesgue sur le plan sous l'action de G et est obtenu grâce à certaines manipulations d'intégration invariante, exactement de la même façon que pour obtenir l'effet d'une translation sur une transformée de Fourier standard [sur \mathcal{R} , par exemple, on a $\hat{f}(x+a)(\lambda) = e^{i\lambda a} \hat{f}(x)(\lambda)$].

Nous voyons ici le principal intérêt de la \mathcal{M} -transformée. Tous les déplacements (translations et rotations) agissent sur $\mathcal{M}(f)$ par des multiplications à droite par des matrices unitaires. *Les rotations et les translations sont traitées exactement de la même façon.*

2.3.2. Effet d'un facteur d'échelle

On s'aperçoit aisément, à partir de (M₁) que, en posant $g(x) = f(kx)$:

$$(M_6) \quad \tilde{g}_n(\lambda) = \frac{1}{k^2} \tilde{f}_n\left(\frac{\lambda}{k}\right).$$

2.3.3. Relation avec les transformées de Fourier standards

On vérifie facilement, avec un calcul direct, que (à une constante près) $\tilde{f}_n(\lambda)$ est obtenu de la façon suivante :

1. Calcul de la transformée de Fourier 2-D standard

$$f(x, y) \rightarrow \hat{f}(\mu, \nu).$$

2. Dans le plan (μ, ν) , passage aux coordonnées polaires, i.e. on pose $\lambda \cos z = \mu, \lambda \sin z = \nu$.

3. Calcul des séries de Fourier discrètes standards par rapport à la variable z :

$$\hat{f}(\lambda, z) \rightarrow \tilde{f}(\lambda)_n.$$

On montre ainsi que \mathcal{M} est étroitement liée aux transformées de Fourier usuelles : \mathcal{M} est une combinaison d'une transformée de Fourier discrète et d'une transformée de Fourier 2-D continue.

3. Investigations numériques autour de la \mathcal{M} -transformée

En utilisant la relation de \mathcal{M} avec les transformées de Fourier usuelles (voir 2.3.3), nous pouvons espérer utiliser des algorithmes FFT (Fast Fourier Transform) standards pour calculer \mathcal{M} et \mathcal{M}^{-1} dans la pratique. On peut aussi penser développer un analogue des algorithmes FFT pour la \mathcal{M} -transformée. Ces deux idées (actuellement développées) seront exposées dans un article ultérieur. Toutefois, ici, pour vérifier précisément l'effet des troncatures par rapport à n [troncatures dans les calculs de la transformée $\tilde{f}(\lambda)_n$ et des matrices infinies $T_\lambda(\theta, \rho, \omega)$], on calcule $\mathcal{M}, \mathcal{M}^{-1}$ et T_λ directement à partir des formules (M₁), (M₄), (R₃). Nous tronquons $|n|$ à un certain ordre $N/2$. Nous approximations les intégrales par rapport à ρ et λ :

$$\int_{\rho > 0} f(\rho) \rho d\rho$$

devient

$$\int_{\rho=0}^{\rho=\rho_{\max}} f(\rho) \rho d\rho,$$

de même pour λ .

Nous discrétisons par rapport à λ, ρ, ω pour approximer ces intégrales. Nous calculons les fonctions de Bessel $J_n(x)$ avec une méthode très précise [ADW].

Bien que l'approximation des fonctions de Bessel soit très coûteuse en temps de calcul, nous obtenons des performances acceptables (de l'ordre de quelques secondes ou de quelques minutes, en fonction du degré N de troncature par rapport à n) pour des images raisonnables aussi bien pour les calculs de $\mathcal{M}, \mathcal{M}^{-1}$ que pour des déplacements appliqués à la transformée.

(Le calculateur utilisé est le 32 bits, ND 560 Norsk-Data.)

Compte tenu du fait que le programme est de taille importante, que les approximations des fonctions de

Bessel sont très coûteuses et que les tables que nous manipulons sont grosses, le temps de calcul n'est pas simplement du temps CPU mais correspond en grande partie au temps nécessaire au swapping.

Toutes ces observations nous permettent d'espérer que (en utilisant des algorithmes du type FFT ou des évaluations moins coûteuses des fonctions de Bessel) la méthode peut réellement et efficacement être applicable.

Avant de présenter certains résultats, nous donnons nos conclusions (nous soulignons cependant le fait que nous en sommes au début de nos expérimentations numériques) :

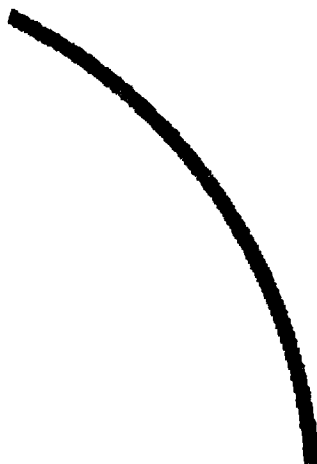
1. Bien que nous manipulons des fonctions de Bessel de grand ordre, les calculs semblent être numériquement très stables.
2. Bien que nous tronquons les matrices infinies T_λ à de petits ordres, l'effet combiné de plusieurs opérateurs T_λ de déplacement sur la transformée tronquée $\tilde{f}(\lambda)$ ne semble pas altérer la qualité de l'approximation de $\tilde{f}(\lambda)$.
3. L'effet de ces opérateurs tronqués T_λ (même avec des troncatures à des ordres faibles) est très proche de l'effet du vrai déplacement.

Résultats : Les programmes traitent bien entendu des niveaux de gris, qui sur les « dessins » présentés ici, sont figurés (quand il y a lieu) par tramage.

Nous avons parfois choisi des images à traiter présentant au départ une symétrie circulaire, ce qui implique évidemment des propriétés particulières pour la transformée étudiée. Ceci est tout à fait volontaire. Une fois déplacées, par rapport à l'origine du plan, cette symétrie disparaît.

Résultat 1 :

(a) Image originale f .



1 (a)

(b) Image $\mathcal{M}^{-1} \mathcal{M} f$.

Avec $N/2=100$, $\rho_{\max}=\lambda_{\max}=20$.

Pas de discrétisation pour ρ et $\lambda=0,05$.

Taille de l'image ≈ 10 .

(c), (d) Effet d'un déplacement sur la transformée.

1 (c) Image originale.

1 (d) Rotation de $-\pi/3$ suivie d'une translation de (8., 8.).

Avec $N/2=100$, $\rho_{\max}=\lambda_{\max}=20$.

Pas de discrétisation pour ρ et $\lambda=0,05$.

Taille de l'image ≈ 14 .

Résultat 2 :

2 (a) Image originale f .

2 (b) Image $\mathcal{M}^{-1} \mathcal{M} f$.

Mêmes valeurs de paramètres qu'en 1 (a).

2 (c) $\mathcal{M}^{-1} \mathcal{M} f$.

Fortes approximations.

Avec $N/2=50$, $\rho_{\max}=\lambda_{\max}=5$.

Pas de discrétisation pour ρ et $\lambda=0,05$.

Résultat 3 : Combinaison de déplacements sur la transformée.

3 (a) Image originale.

3 (b) Image :

1. déplacement sur la transformée;

2. transformée inverse.

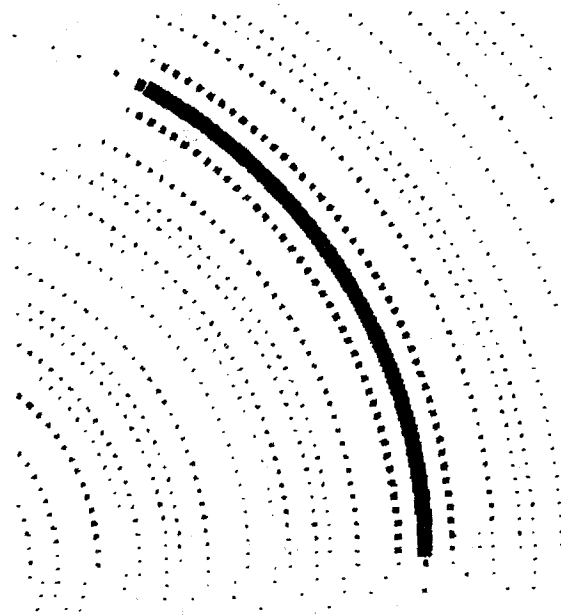
1. translation (8., 8.).

2. rotation de $\pi/6$ autour du point (9., 9.).

Avec $N/2=100$, $\rho_{\max}=\lambda_{\max}=15$.

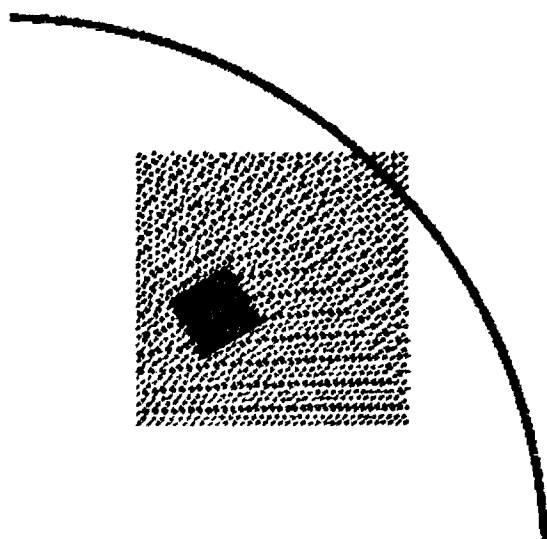
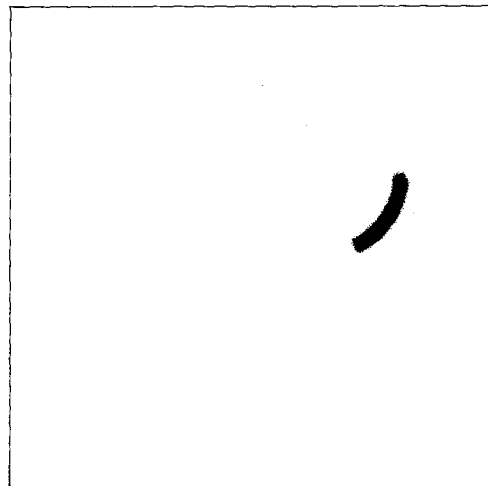
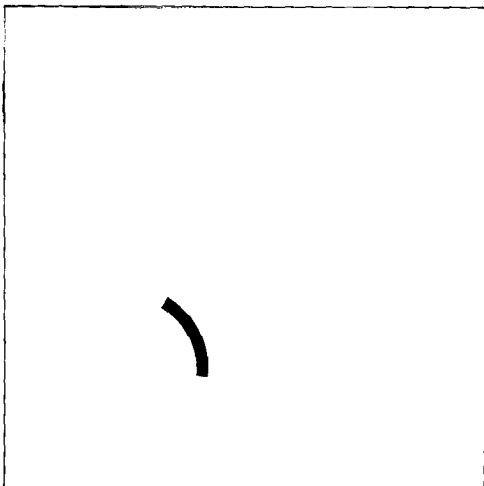
Pas de discrétisation pour ρ et $\lambda=0,05$.

Taille de l'image ≈ 14 .

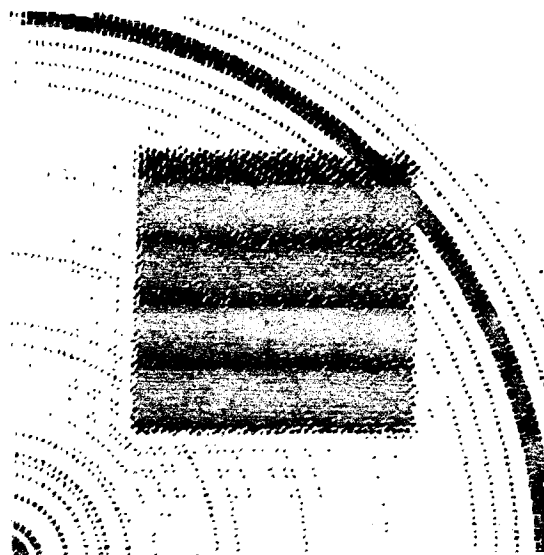


1 (b)

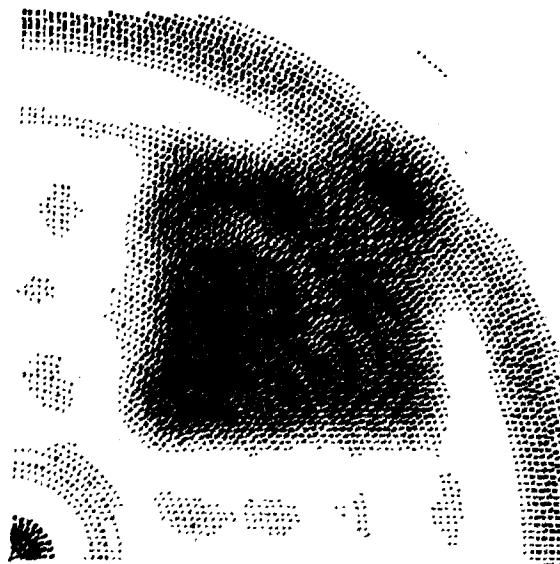
RECHERCHES



2 (a)

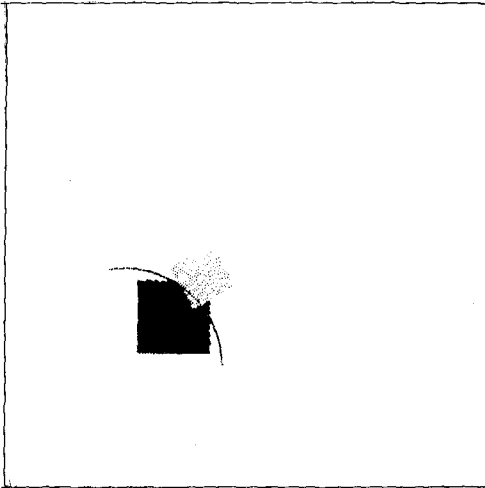


2 (b)

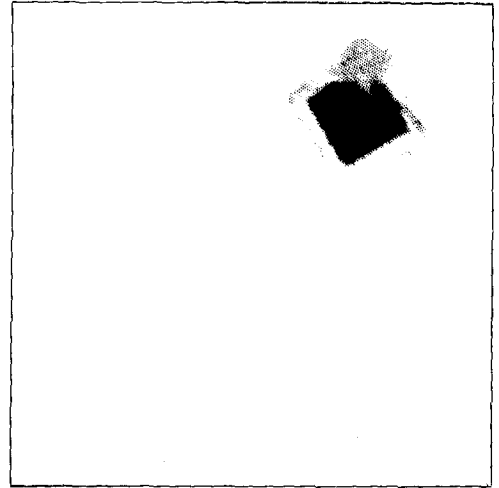


2 (c)

MOUVEMENTS ET TRAITEMENT D'IMAGES



3 (a)



3 (b)

Résultat 4 : Effet d'une combinaison d'opérateurs de déplacement tronqués sur une transformée tronquée.

Avec $N/2 = 50$, $\rho_{\max} = \lambda_{\max} = 5$.

Pas de discrétisation pour ρ et $\lambda = 0,05$.

4 (a) Image originale f .

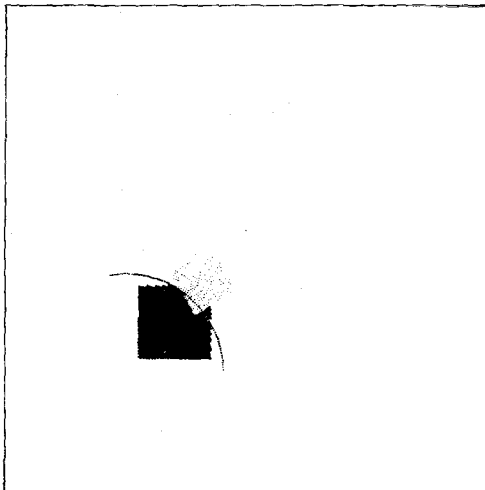
4 (b) $M^{-1} M f$.

4 (c) Combinaison de déplacements tronqués sur la transformée.

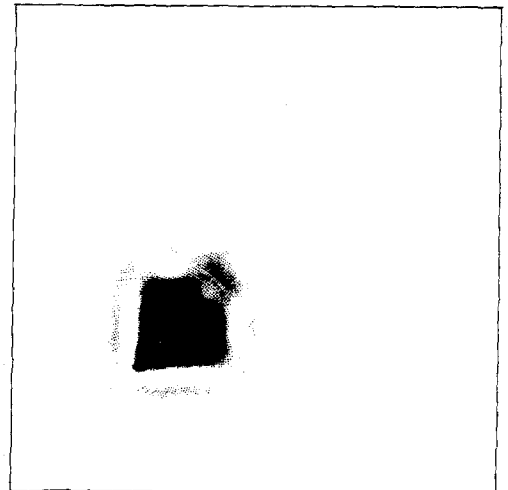
1. Translation de (5., 5.) de la transformée.

2. Translation de (-5., -5.) de la transformée.

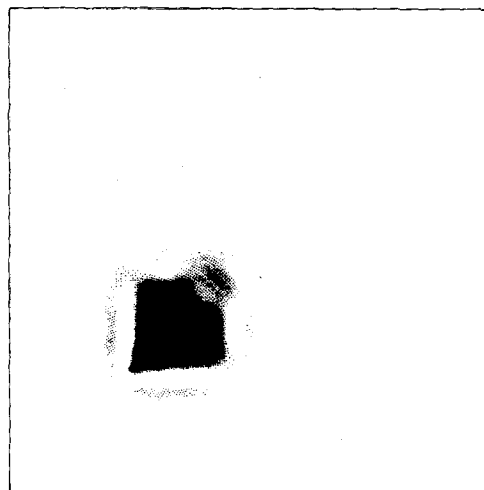
3. Transformée inverse.



4 (a)



4 (b)



4 (c)

Remarque : La formule de Plancherel (M_3) est très utile pour contrôler les erreurs introduites par les troncatures faites sur la transformée :

$$\langle f, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \tilde{f}, \tilde{f} \rangle_M = \frac{1}{2\pi} \sum_n \int_{\lambda > 0} \tilde{f}_n(\lambda) \overline{\tilde{f}_n(\lambda)} \frac{\lambda}{4\pi^2} d\lambda$$

La somme discrète de ces termes positifs étant tronquée peut être comparée à la « surface » $\langle f, f \rangle$ de l'image considérée.

4. Le descripteur par rapport aux déplacements $\mathcal{M}D$

(Se référer à [PK] par exemple, pour comparer notre étude aux notions classiques des « descripteurs de Fourier ».)

Du fait que les matrices T_λ sont des matrices unitaires sur l'espace hilbertien $\mathcal{L}^2(S_1)$, on peut aisément déduire que la fonction

$$\mathcal{M}D(f)(\lambda) = \sum_n \tilde{f}_n(\lambda) \overline{\tilde{f}_n(\lambda)}$$

est une fonction positive de λ définie sur $\mathcal{R}^+ - \{0\}$, sommable par rapport à la mesure $\lambda d\lambda$ et est invariante sous l'action des déplacements (cf. 2.3.1). Ainsi elle pourra être utilisée pour la reconnaissance de « motifs ».

On peut raisonnablement envisager d'utiliser la formule (M_6) pour étendre cet invariant à l'effet d'homothéties (facteurs d'échelle).

Remarque : En utilisant le résultat du paragraphe 2.3.3 (relation avec les transformées de Fourier standards), on obtient immédiatement le résultat (sans doute bien connu) suivant : une image f étant donnée, $\hat{f}(\lambda, z)$ étant la transformée de Fourier 2-D usuelle de f après passage en coordonnées polaires,

$$\mathcal{M}D(f)(\lambda) = \int_0^{2\pi} \hat{f}(\lambda, z) \overline{\hat{f}(\lambda, z)} dz$$

est invariant sous l'action des déplacements.

Ceci peut être vérifié sans difficulté par un calcul direct.

5. Conclusion. Perspectives

Dans cet article, on a défini la « transformée par rapport aux déplacements » ou \mathcal{M} -transformée, et examiné ses propriétés numériques. Cette transformée, bien que faisant intervenir des estimations de fonctions spéciales, semble bien se prêter à des troncatures et approximations, même assez sauvages. Son intérêt est d'être exactement l'analogue de la transformée de Fourier usuelle (sur le plan) par rapport à tous les déplacements (simultanément translations et rotations).

Ces idées sont actuellement poursuivies dans les directions suivantes :

1. Version discrète de la \mathcal{M} -transformée.

Par rapport à certains sous-groupes du groupe des déplacements, on peut envisager une transformée analogue. [Pour répondre à une question intéressante d'un expert, les sous-groupes qu'il faut prendre en considération, concernent seulement des rotations discrètes : on ne peut rien faire « discrètement » par rapport aux translations (ou par rapport à ρ). Ceci provient de la structure « très rigide » du groupe des déplacements du plan par rapport aux translations (par exemple, exactement 17 pavages du plan)]. On peut choisir ces sous-groupes pour que la transformée soit un opérateur agissant cette fois sur des espaces de dimension finie. Lorsque ces sous-groupes se déforment vers le groupe des déplacements, les transformées obtenues tendent vers la \mathcal{M} -transformée (en un certain sens). On obtient exactement l'analogue de la transformée de Fourier discrète usuelle.

2. Pour ces transformées discrètes, on peut se poser le problème de l'existence d'un analogue de l'algorithme de Cooley-Tukey. Au moins formellement, il semble que cet analogue existe.

Ce type de problème a été abordé dans sa généralité du point de vue de l'analyse harmonique abélienne abstraite via l'application de Weil-Brezin [A], et a été complètement analysé dans le cas des groupes abéliens finis [ATW]. On ne connaît pas d'autre travail sur ce sujet.

Ces deux points (\mathcal{M} -transformée discrète et \mathcal{M} -transformée rapide) seront développés ultérieurement.

BIBLIOGRAPHIE

- [ADW] AMOS, DANIEL et WESTON, CDC 6600 Subroutines IBESS and JBESS for Bessel functions $I_\nu(x)$ and $J_\nu(x)$, $x \geq 0$, $\nu \geq 0$, *ACM Trans. on Mathematical Software*, 3, n° 1, March 1977, p. 76-92.
- [NS] NAIMARK-STERN, *Théorie des représentations des groupes*, MIR, Moscou, 1974, traduction française, 1976.
- [NO] NIKIFOROV-OUVAROV, *Éléments de la théorie des fonctions spéciales*, MIR, Moscou, 1974, traduction française, 1976.
- [V] VILENKIN, *Fonctions spéciales et théorie des représentations des groupes*, MIR, Moscou, 1965.
- [GGV] GELFAND-GRAEV-VILENKIN, *Generalized Functions*, 5, Academic Press, 1966.
- [W] WARNER, *Harmonic analysis on semi-simple Lie groups*, 1-2, Springer Verlag, 1972.
- [K] KIRILLOV, *Éléments de la théorie des représentations*, MIR, Moscou, traduction française, 1974.
- [H] HERMANN, *Fourier analysis on groups and partial wave analysis*, W.A. Benjamin, NY, 1969.
- [S] SEGAL, An extension of Plancherel's formula for separable unimodular locally compact groups, *Ann. Math.*, 52, 1950.

MOUVEMENTS ET TRAITEMENT D'IMAGES

- [M] MAUTNER, Note on the Fourier inversion formula on groups, *Trans. Am. Math. Soc.*, 78, 1955, p. 371-384.
- [C] CHEN, *A new vision system and the Fourier descriptor method by group representation theory*, CDC Conference, 1985, Las Vegas, USA.
- [PK] PERSOON et KING-SUN FU, Shape discrimination using Fourier descriptors, *IEEE Systems, Man, and Cybernetics*, SMC-7, n° 3, mars 1977.
- [A] AUSLANDER, A factorization theorem for the Fourier transform of a separable locally compact abelian group, in *Special functions, group theoretical aspects and applications*, Reidel Publishing Compagny, 1984.
- [ATW] AUSLANDER-TOLIMIERI-WINOGRAD, Hecke's theorem in quadratic reciprocity, finite nilpotent groups and the Cooley-Tukey algorithm, *Advances in Math.*, 43, 1982, p. 122-172.