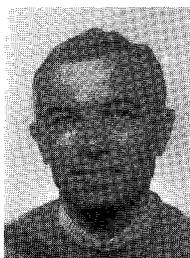


Transformées de Fourier continues rapides

Fast continuous Fourier transforms



Jacques THIEL

Université d'Orléans, UFR Faculté des Sciences, Groupe de Recherche sur l'Énergétique des Milieux Ionisés (GREMI), BP 6759, 45067 ORLÉANS CEDEX 2

Maîtrise et DEA de Physique. Thèse d'État (1981) sur le sondage radiofréquence du plasma circumterrestre. Maître de Conférences en EEA (Informatique, Traitement du Signal, Électronique) à l'Université d'Orléans. Recherches en Physique spatiale au Groupe de Recherches Ionosphériques (Saint-Maur-des-Fossés) puis au Centre de Recherches sur la Physique de l'Environnement (Orléans). Recherches actuelles en Traitement du Signal au GREMI, Équipe Électronique, depuis 1983.



Pierre DAVY

Université d'Orléans, UFR Faculté des Sciences, Groupe de Recherche sur l'Énergétique des Milieux Ionisés (GREMI), BP 6759, 45067 ORLÉANS CEDEX 2

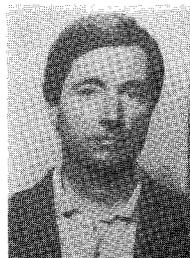
Licence et DEA de Physique, Thèse d'État (1970) sur les décharges dans les gaz. Professeur en EEA à l'Université d'Orléans (Automatique, Filtrage), responsable du DESS EEA Systèmes temps réel. Recherches au GREMI, en Instrumentation et Traitement du Signal, responsable de l'Équipe Électronique.



Gérard JACQUET

Université d'Orléans, UFR Faculté des Sciences, Groupe de Recherche sur l'Énergétique des Milieux Ionisés (GREMI), BP 6759, 45067 ORLÉANS CEDEX 2

Ingénieur Électronicien de l'ENSER de Bordeaux. Thèse de Docteur-Ingénieur (1985) sur une application industrielle de mesures dimensionnelles sans contact. Assistant en EEA (Électronique) à l'Université d'Orléans. Recherches en Traitement d'Image au laboratoire d'Électronique et Résonance Magnétique (Clermont-Ferrand). Recherches actuelles en Traitement du Signal au GREMI, Équipe Électronique, depuis 1984.



Bernard DUBREUIL

Université d'Orléans, UFR Faculté des Sciences, Groupe de Recherche sur l'Énergétique des Milieux Ionisés (GREMI), BP 6759, 45067 ORLÉANS CEDEX 2

Maîtrise, DEA, Thèse de 3^e Cycle en Physique. Thèse d'État (1979) sur les interactions laser-plasma, leurs applications et leur interprétation par des méthodes d'identification. Professeur à l'Université d'Orléans (Circuits-Systèmes, Synthèse, Électronique numérique, Spectroscopie laser des plasmas). Recherches au Laboratoire GREMI en Physique des Gaz et des Plasmas : Spectroscopie laser résolue en temps; Analyse de signaux transitoires; Développement de sources; Analyse de trace dans les matériaux par ionisation multiphotonique résonnante.

RÉSUMÉ

Regroupés sous le sigle TFCR (Transformées de Fourier Continues Rapides), de nouveaux algorithmes sont proposés pour évaluer la transformée de Fourier (intégrale) d'un signal continu. Ces algorithmes calculent sans erreur de troncature l'intégrale de Fourier, sur la durée d'échantillonnage, d'un pseudo-signal continu déduit des échantillons par interpolations polynomiales d'ordre 0 (fonction en escalier) à 3 (spline cubique). Ils sont très rapides car leurs formules de quadrature sont calculables en utilisant tout ou partie d'algorithmes de Transformée de Fourier Discrète Rapide. Ils semblent bien adaptés au calcul des transformées de Fourier des signaux non périodiques et/ou à spectre non borné, le spectre calculé n'étant plus périodique. En particulier, pour des signaux transitoires, les calculs au-delà de la demi-fréquence d'échantillonnage peuvent être significatifs. Les algorithmes TFCR d'ordres 2 et 3 sont particulièrement efficaces.

MOTS CLÉS

Transitoire, algorithme, transformée de Fourier, méthode de Filon, spline cubique.

SUMMARY

Referred to as FCFT (Fast Continuous Fourier Transforms), new algorithms are proposed to evaluate the (integral) Fourier transform of a continuous signal. These algorithms compute without truncation error the Fourier integral, over the sampling duration, of a continuous pseudo signal deduced from samples by polynomial interpolations of order 0 (step by step function) to 3 (cubic spline). They are very fast because an FFT (Fast Fourier Transform) algorithm is used for the calculation of quadrature formulas. They seem to be especially applicable to the Fourier transform computation of non periodic and/or not band limited signals because the yielded spectrum is not periodic. In particular, with transient signals, calculations made beyond the half of the sampling frequency can be significant. The FCFT algorithms based upon polynomial interpolations of order 2 and 3 are particularly efficient.

KEY WORDS

Transient, algorithm, Fourier transform, Filon method, cubic spline.

TABLE DES MATIÈRES**1. Introduction****2. Formules de quadrature**

- 2.1. Approximation du signal par une fonction en escalier
- 2.2. Interpolation linéaire
- 2.3. Interpolation quadratique
- 2.4. Interpolation par spline cubique
- 2.5. Autres approximations du signal

3. Résultats

- 3.1. Généralités
- 3.2. Cas de l'exponentielle décroissante
- 3.3. Cas de la sinusoïde amortie

4. Discussion

- 4.1. Sur la périodisation du spectre
- 4.2. Sur les interpolations polynomiales et de Shannon
- 4.3. Sur le théorème d'échantillonnage

5. Conclusion**Appendice****Bibliographie****1. Introduction**

La Transformée de Fourier Discrète (TFD) est un outil rapide et précis de traitement des signaux périodiques à spectre borné mais, pratiquement, ces deux conditions sont rarement remplies simultanément et on est contraint de faire l'hypothèse de périodicité et/ou l'approximation du spectre borné. Une telle approximation est légitime si le signal présente une fréquence de coupure au-delà de laquelle la contribution au spectre est négligeable; cette fréquence est alors assimilée à la fréquence de Nyquist-Shannon et l'échantillonnage est réalisé en quasi-conformité avec le théorème 13 de Shannon [1]. A chaque fréquence de calcul inférieure à la demi-fréquence d'échantillonnage, les valeurs obtenues par TFD sont très proches des valeurs correspondantes de la transformée de Fourier (intégrale) du signal continu; nous notons cette dernière TFI dans cet article où, les erreurs d'arrondi étant négligées, les écarts entre valeurs calculées et valeurs de la TFI sont des erreurs de troncature. Donc, si le signal est à bande passante suffisamment marquée, le spectre (discret) calculé par TFD est un échantillonnage fréquentiel précis de la TFI du signal.

Cette similitude entre TFD et TFI est limitée aux basses fréquences lorsqu'aucune fréquence de coupure n'apparaît nettement dans le spectre du signal. Ceci est par exemple le cas de certains signaux transitoires

dont le spectre décroît asymptotiquement en amplitude comme l'inverse d'une puissance de la fréquence. Pour de tels signaux, la TFD apparaît comme une évaluation très sommaire de la TFI au sens de l'analyse numérique, l'erreur de troncature devenant très importante au-delà d'une certaine fréquence qui est souvent bien inférieure à la demi-fréquence d'échantillonnage.

Une notable réduction de cette erreur de troncature peut être obtenue en multipliant les résultats TFD par une des fenêtres spectrales de pondération qui sont habituellement utilisées pour accélérer la convergence de la série de Fourier calculée par TFD [2]. Une telle méthode empirique de calcul rapide de TFI à partir de TFD est cependant moins précise que certaines méthodes habituelles de l'analyse numérique. La très classique méthode de Filon [3], par exemple, évalue numériquement une TFI avec une très bonne précision, même lorsque la fréquence d'analyse est supérieure à la fréquence d'échantillonnage. Les résultats sont encore améliorés avec la méthode de la règle flexible (spline) si on connaît les dérivées du signal aux deux échantillons extrêmes [4]. Mais ces méthodes sont très peu utilisées en traitement du signal quoique, dans les années 70, Mandel et Bearman [5] puis Achilles [6] aient montré qu'elles pouvaient être employées conjointement avec un algorithme TFDR (Transformée de Fourier Discrète Rapide, traduction libre de FFT, Fast Fourier Transform). La publication récente d'études similaires mais indépendantes [7] à [10] témoigne peut-être d'un regain d'intérêt pour de nouveaux algorithmes qui utilisent simultanément les techniques de l'analyse numérique et du traitement du signal. Leur principe commun est particulièrement simple : à partir des échantillons, le signal continu est approximé par une fonction d'interpolation (ou de lissage) suffisamment simple pour aboutir à une formule de quadrature calculable avec des algorithmes qui utilisent tout ou partie d'un algorithme TFDR.

Ces nouveaux algorithmes, que nous proposons de regrouper sous le sigle TFCR (Transformées de Fourier Continues Rapides), donnent des résultats dont la précision dépend essentiellement de la qualité de l'approximation du signal par interpolation entre ses échantillons. Pour les signaux à spectre non borné, les erreurs de troncature inhérentes à la TFD sont notablement réduites avec les algorithmes TFCR.

Cet article a pour but une présentation unifiée des algorithmes TFCR en vue de leur application au traitement du signal. Tout d'abord, les formules de quadrature utilisées seront établies dans les cas très simples où le signal est approximé entre les échantillons par une fonction en escalier, puis par interpolation linéaire, quadratique et enfin cubique. Dans chaque cas, les algorithmes TFCR associés seront brièvement présentés en énumérant les modifications à apporter à un algorithme TFDR pour qu'il calcule la formule de quadrature. D'autres approximations du signal par interpolation ou lissage seront évoquées en conclusion du chapitre 2. Dans le chapitre 3 seront comparativement présentés des spectres calculés avec

des algorithmes TFDR et TFCR. Quelques critères de choix d'un algorithme seront ensuite proposés. La discussion sera prolongée dans le chapitre 4 par une comparaison plus détaillée des algorithmes TFDR et TFCR à partir des présentations des séries et transformées de Fourier qui sont habituellement faites en analyse numérique et en traitement du signal. Il importe en effet de montrer que si les algorithmes TFCR sont des améliorations des algorithmes TFDR selon les critères de l'analyse numérique, ils peuvent également conduire à des applications intéressantes en traitement du signal. Sur ce sujet, cependant, le présent article n'a d'autre ambition que d'ébaucher des propositions.

2. Formules de quadrature

Soit un signal causal continu $x(t)$ supposé nul pour $t > T$; après échantillonnage temporel idéal, il est connu par une suite $\{x_n\}$ de $N+1$ échantillons $x_n = x(n\Delta t)$, $0 \leq n \leq N$, N pair, avec $\Delta t = T/N$, $x_0 = x(0)$ et $x_N = x(T)$. Sa TFI est une fonction complexe continue de la fréquence f .

$$(1) \quad S(f) = \int_0^T x(t) \exp(-i2\pi ft) dt,$$

avec $i = \sqrt{-1}$, alors que sa TFD est une séquence de N termes qui, après multiplication par Δt , s'écrivent :

$$(2) \quad S_m^D = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp(-in\theta_m),$$

$$0 \leq m \leq N-1,$$

avec $\theta_m = 2\pi m/N$. Cette séquence $\{S_m^D\}$ constitue un échantillonnage fréquentiel, avec le pas en fréquence $\Delta f = 1/T$, de la fonction continue

$$(3) \quad S^D(f) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp(-in\theta)$$

dans la gamme de fréquence $[0, f_e]$, f_e étant la fréquence d'échantillonnage ($f_e = 1/\Delta t = N/T = N\Delta f$). θ est un angle intermédiaire qui ne dépend que de f et de f_e ,

$$(4) \quad \theta = 2\pi f/f_e,$$

et correspond à la fréquence normalisée par rapport à f_e : à la fréquence $m\Delta f$ correspond l'angle θ_m ; à la fréquence f_e correspond l'angle $\theta = 2\pi$.

$S^D(f)$ est une évaluation de $S(f)$ par la méthode des rectangles. D'autres évaluations de $S(f)$ par des méthodes plus précises sont proposées ci-dessous, toujours à des fréquences multiples de Δf mais qui pourront être éventuellement supérieures à f_e ; θ pourra donc être supérieur à 2π et nous poserons $\theta' = \theta$ modulo 2π , ainsi que $m' = m$ modulo N , d'où $\theta_{m'} = \theta_m$ modulo 2π .

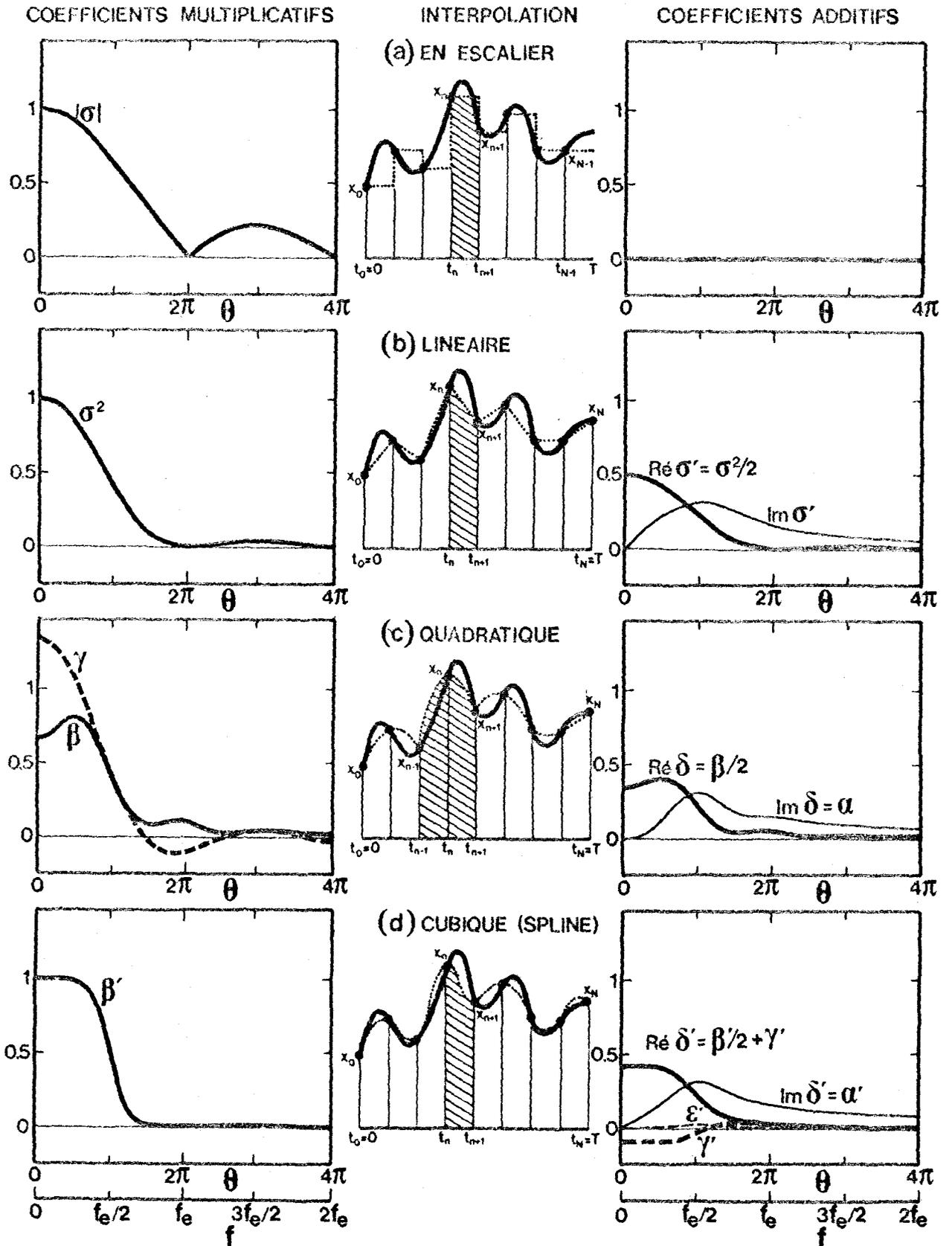


Fig. 1. — Interpolations utilisées : (a) en escalier, (b) linéaire, (c) quadratique, (d) cubique (spline), et variations des coefficients multiplicatifs (gauche) et additifs (droite) en fonction de la fréquence f (ou de $\theta = 2\pi f/f_0$).

2. 1. APPROXIMATION DU SIGNAL PAR UNE FONCTION EN ESCALIER

On approxime par une fonction en escalier non plus l'intégrand $x(t) \exp(-i 2 \pi f t)$ de $S(f)$, comme dans la TFD, mais le signal $x(t)$ seul. Celui-ci est donc remplacé dans les calculs par la superposition de N marches de durée Δt , la n -ième marche d'amplitude x_n débutant à l'instant $t_n = n \Delta t$ [fig. 1 (a)]. Puisque la TFI de cette marche est

$$(5) \quad S^E(n, f) = \text{sinc}(\theta/2) \exp(-i \theta/2) \times \Delta t x_n \exp(-i n \theta),$$

(le sinus cardinal est ici défini par $\text{sinc } x = \sin x/x$), les propriétés de linéarité de la TFI conduisent à

$$(6) \quad S^E(f) = \sum_{n=0}^{N-1} S^E(n, f) \\ = \text{sinc}(\theta/2) \exp(-i \theta/2) S^D(f)$$

comme approximation de $S(f)$ quelle que soit la fréquence f . En particulier, aux fréquences $m \Delta f$, m entier quelconque qui peut être supérieur à N , les valeurs de cette TFI approchée sont

$$(7) \quad S_m^E = |\sigma_m| \exp(-i \theta_m/2) S_m^D$$

où les $\sigma_m = \text{sinc}(\theta_m/2)$ sont les facteurs « sigma » introduits par Lanczos [11]; puisque $m' = m$ modulo N , on a en effet $S_m^D = S_{m'}^D$ et aussi

$$\exp(-i \theta_m/2) = (-1)^k \exp(-i \theta_{m'}/2)$$

avec $k = (m - m')/N$.

Un algorithme TFCR de calcul simultané de N échantillons fréquentiels consécutifs de $S^E(f)$, aux fréquences $m \Delta f$, se déduit donc d'un algorithme TFDR en pondérant ses résultats par les facteurs complexes $|\sigma_m| \exp(-i \theta_m/2)$. Ainsi, un même calcul par TFDR peut être utilisé pour évaluer les valeurs de $S^E(f)$ dans plusieurs domaines fréquentiels de largeur f_e avec un pas en fréquence Δf , au prix de N multiplications complexes supplémentaires. Dans certains cas, il peut être avantageux de réaliser ces multiplications en modifiant les $N/2$ derniers papillons qui calculent simultanément, pour $0 \leq m' \leq [(1/2)N - 1]$,

$$(8a) \quad S_{m'}^D = \Delta t [\Sigma_{m'}^P + \exp(-i \theta_{m'}) \Sigma_{m'}^I]$$

et

$$(8b) \quad S_{m'+N/2}^D = \Delta t [\Sigma_{m'}^P - \exp(-i \theta_{m'}) \Sigma_{m'}^I],$$

avec

$$(9a) \quad \Sigma_{m'}^P = \sum_{n=0}^{(1/2)N-1} x_{2n} \exp(-i 2n \theta_{m'})$$

et

$$(9b) \quad \Sigma_{m'}^I = \sum_{n=0}^{(1/2)N-1} x_{2n+1} \exp(-i 2n \theta_{m'}).$$

Les gains des quatre branches de ces papillons sont donc $1, 1, \exp(-i \theta_{m'})$ et $-\exp(-i \theta_{m'})$ comme illustré sur la figure 2 (a). En les remplaçant par ceux indiqués sur la figure 2 (b), on obtient directement les valeurs de S_m^E à la sortie avec seulement $N/2$ multiplications complexes et $2N$ multiplications réelles supplémentaires. En définitive, quel que soit l'algorithme TFDR choisi, cette première méthode d'évaluation d'une TFI n'est pas beaucoup plus coûteuse en temps de calcul que l'évaluation d'une TFD ordinaire.

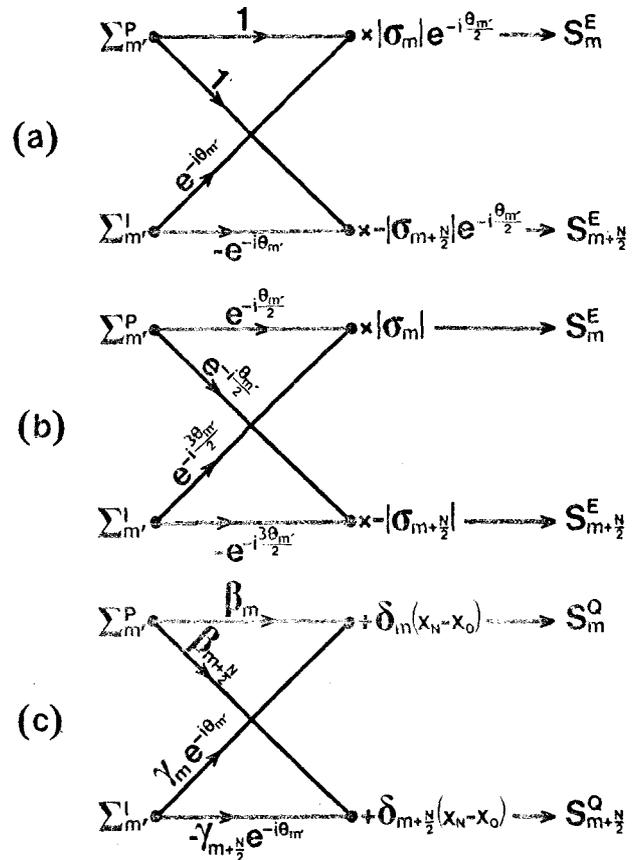


Fig. 2. — Modifications à apporter aux $N/2$ derniers papillons d'un algorithme TFDR (a), pour calculer S_m^E (b) et S_m^Q (c).

Pour les N premiers échantillons en fréquence de $\{S_m^E\}$, $0 \leq m \leq N-1$, la formule (7) se déduit de la formule de la moyenne glissante de Lanczos, sur une durée Δt , par déphasage de $-2\pi(\Delta t/2)f$ car la moyenne est calculée à la fin de l'impulsion et non au milieu. Cependant, cette similitude de résultats procède de deux opérations physiquement très différentes puisque, dans le cas présent, on interpole entre les échantillons non périodisés au lieu de lisser (par convolution avec une fenêtre rectangulaire de largeur Δt) sur les échantillons périodisés-T.

2.2. INTERPOLATION LINÉAIRE

Le signal continu $x(t)$ est maintenant approximé par interpolation linéaire entre les échantillons; il lui correspond donc une TFI approchée $S^L(f)$ qui est la somme des TFI de N segments consécutifs de durée Δt . Comme illustré sur la figure 1 (b), le n -ième segment joint les deux points de coordonnées $[n \Delta t, x_n]$ et $[(n+1) \Delta t, x_{n+1}]$; sa TFI a pour expression

$$(10) \quad S^L(n, f) = \left[\frac{1}{2} \text{sinc}^2(\theta/2) - i(1 - \text{sinc } \theta)/\theta \right] \times \Delta t x_n \exp(-in\theta) + \left[\frac{1}{2} \text{sinc}^2(\theta/2) + i(1 - \text{sinc } \theta)/\theta \right] \times \Delta t x_{n+1} \exp[-i(n+1)\theta].$$

Par superposition, on en déduit

$$(11) \quad S^L(f) = \sum_{n=0}^{N-1} S^L(n, f) = \text{sinc}^2(\theta/2) S^D(f) + \Delta t \left[\frac{1}{2} \text{sinc}^2(\theta/2) + i(1 - \text{sinc } \theta)/\theta \right] \times [x_N \exp(-iN\theta) - x_0]$$

dont les valeurs aux fréquences $m \Delta f$ (m entier quelconque) sont :

$$(12) \quad S_m^L = \sigma_m^2 S_m^D + \sigma'_m \Delta t (x_N - x_0).$$

Dans cette dernière expression, σ'_m est un coefficient complexe qui traduit l'existence d'un « effet de bord » dans les calculs lorsque les valeurs du signal au début et à la fin de l'échantillonnage ne sont pas égales. Il peut être calculé à partir de σ_m , facteur sigma de Lanczos, et de θ_m :

$$(13) \quad \sigma'_m = \frac{1}{2} \sigma_m^2 + i(1 - \text{sinc } \theta_m)/\theta_m.$$

La figure 1 (b) montre les variations de σ_m^2 et de σ'_m en fonction de θ pour des fréquences comprises entre 0 et $2f_e$. Comme $|\sigma_m| \exp(-i\theta_m/2)$, le nouveau facteur de pondération σ_m^2 est nul aux fréquences multiples de f_e ; S_m^L s'annulera donc à ces fréquences si les deux échantillons extrêmes du signal x_N et x_0 sont égaux. Dans ce cas, on retrouve la formule d'Achilles [6] de lissage, sur les échantillons périodisés-T, par convolution avec une fenêtre triangulaire de base $2\Delta t$. Les résultats sont alors plus précis que la formule (8) bien que les algorithmes TFCR associés soient plus simples car ils se déduisent d'algorithmes TFDR en multipliant les résultats par les facteurs réels σ_m^2 ; la modification des $N/2$ derniers

papillons n'a donc plus d'intérêt. Si x_N diffère de x_0 , S_m^L ne s'annule plus aux harmoniques de f_e puisque $\text{Im}(\sigma'_m)$ est un nombre positif. Il faut alors effectuer N multiplications complexes supplémentaires par les facteurs σ'_m qui, comme σ_m^2 , dépendent du domaine fréquentiel choisi, celui-ci pouvant être centré sur une fréquence supérieure à f_e .

La présente méthode utilise la formule de quadrature « Filon Trapezoidal » établie par Tuck [12]; elle généralise la méthode proposée par Schütte [7] qui est également basée sur l'approximation du signal par interpolation linéaire entre les échantillons. Par contre, de même que la méthode du paragraphe 2.1 est très différente de celle des rectangles — équation (2) de la TFD —, elle n'a rien de commun avec la « Trapezoidal FFT » proposée par Abramovici [13] : c'est maintenant le signal $x(t)$ seul qui est approximé par une ligne brisée, et non pas la fonction complexe $x(t) \exp(-i2\pi ft)$ qui oscille à la fréquence d'analyse f . Enfin, malgré la similitude des résultats, elle est aussi différente de la méthode d'Achilles que la méthode du paragraphe 2.1 l'était de celle de Lanczos.

2.3. INTERPOLATION QUADRATIQUE

L'interpolation quadratique entre les échantillons approxime le signal continu $x(t)$ par une suite de $N/2$ arcs de parabole de durée $2\Delta t$ qui seront donc identifiés par un entier n impair [voir fig. 1(c)]. La TFI de l'arc qui passe par les points $[(n-1)\Delta t, x_{n-1}]$, $[n\Delta t, x_n]$ puis $[(n+1)\Delta t, x_{n+1}]$ a pour expression (voir Appendice) :

$$(14) \quad S^Q(n, f) = \left[\frac{1}{2} \beta(\theta) - i\alpha(\theta) \right] \times \Delta t x_{n-1} \exp[-i(n-1)\theta] + \gamma(\theta) \Delta t x_n \exp(-in\theta) + \left[\frac{1}{2} \beta(\theta) + i\alpha(\theta) \right] \times \Delta t x_{n+1} \exp[-i(n+1)\theta]$$

où $\alpha(\theta)$, $\beta(\theta)$ et $\gamma(\theta)$ sont les coefficients de Filon [3] qui ne dépendent que de θ , c'est-à-dire que de f et f_e suivant les expressions :

$$(15a) \quad \alpha(\theta) = (1 + \text{sinc } \theta \cos \theta - 2 \text{sinc}^2 \theta)/\theta$$

$$(15b) \quad \beta(\theta) = 2(1 + \cos^2 \theta - 2 \text{sinc } \theta \cos \theta)/\theta^2$$

$$(15c) \quad \gamma(\theta) = 4(\text{sinc } \theta - \cos \theta)/\theta^2.$$

Les graphes correspondants sont représentés sur la figure 1 (c) où, par comparaison avec la figure 1 (b), on remarque que, pour les angles θ multiples impairs de π , α est égal à $\text{Im}(\sigma')$ tandis que β et γ sont égaux entre eux et à σ^2 .

Lorsque n varie de 1 à $N-1$ par valeurs impaires, la somme des $S^Q(n, f)$ est une évaluation de la TFI du

signal :

$$(16) \quad S^Q(f) = \sum_{n=0}^{(1/2)N-1} S^Q(2n+1, f) \\ = \Delta t \left\{ \beta(\theta) \sum_{n=0}^{(1/2)N-1} x_{2n} \exp(-i2n\theta) \right. \\ \left. + \gamma(\theta) \sum_{n=0}^{(1/2)N-1} x_{2n+1} \exp[-i(2n+1)\theta] \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{2} \beta(\theta) + i\alpha(\theta) \right] [x_N \exp(-iN\theta) - x_0] \right\}$$

dont les valeurs aux fréquences $m\Delta f$ sont

$$(17) \quad S_m^Q = \Delta t [\beta_m \Sigma_m^P + \gamma_m \exp(-i\theta_m) \Sigma_m^I + \delta_m (x_N - x_0)]$$

où $\beta_m = \beta(\theta_m)$, $\gamma_m = \gamma(\theta_m)$ et $\delta_m = (1/2) \beta_m + i\alpha(\theta_m)$, tandis que Σ_m^P et Σ_m^I sont définis par les formules (9a) et (9b), respectivement. Comme avec la méthode d'interpolation linéaire, il apparaît un terme correctif d'effet de bord; les deux méthodes donnent d'ailleurs les mêmes résultats aux fréquences multiples impaires de $f_e/2$. A la fréquence nulle, on retrouve la formule de Simpson ($\alpha_0=0$, $\beta_0=2/3$, $\gamma_0=4/3$) alors qu'on retrouvait celle des trapèzes avec la méthode d'interpolation linéaire.

Lorsque $x_N = x_0$, la formule (17) se déduit des formules (8) en multipliant Σ_m^P et Σ_m^I par les coefficients de Filon β_m et γ_m , respectivement. Ceci signifie qu'il suffit de modifier les $N/2$ derniers papillons d'un algorithme TFDR comme indiqué sur la figure 2(c) pour obtenir directement les valeurs de S_m^Q à la sortie. Une telle modification n'introduit que $4N$ multiplications réelles supplémentaires, ce qui est deux fois plus que pour le calcul de $\{S_m^L\}$, équation (12), mais est du même ordre de grandeur que pour le calcul de $\{S_m^E\}$, équation (7), où N multiplications complexes supplémentaires étaient nécessaires. Dans le cas général où x_N diffère de x_0 , l'introduction de l'effet de bord à la suite de l'algorithme TFDR modifié nécessite à nouveau N multiplications complexes supplémentaires. En définitive, l'algorithme TFCR qui calcule $\{S_m^Q\}$ effectue $2N$ multiplications complexes de plus que l'algorithme TFDR. Le surcoût par rapport aux calculs de $\{S_m^E\}$ et $\{S_m^L\}$ est donc faible : la formule (17) se prête à un calcul extrêmement rapide avec un algorithme TFDR modifié.

Une autre version de la formule de Filon modifiée a été proposée par Mandel et Bearman [5] pour calculer une transformée de Fourier en sinus au moyen de deux algorithmes TFDR; à notre connaissance, leur étude n'a pas été étendue au cas de la TFI. Indépendamment, Mäkinen [8] puis Sorrella et Ghosh [9] et Froyen et Hellemans [10] ont mis au point de nouveaux algorithmes basés sur l'interpolation quadratique du signal mais sans utiliser la méthode de Filon ni considérer les fréquences supérieures à f_e . Aux fréquences inférieures à f_e , leurs résultats sont d'ailleurs légèrement différents des nôtres puisque les interpola-

tions sont faites sur des durées Δt au lieu de $2\Delta t$ et que le dernier échantillon x_N n'est pas pris en compte. Enfin et surtout, l'algorithme TFCR que nous proposons est plus rapide que ceux antérieurement mis au point car il exploite la structure en papillon des algorithmes TFDR.

2.4. INTERPOLATION PAR SPLINE CUBIQUE

Une règle flexible d'interpolation est construite sur toute la durée d'échantillonnage; elle est constituée d'une succession d'arcs de cubique, de durée Δt , dont les dérivées première et seconde sont continues aux échantillons [voir fig. 1(d)]. L'équation de cette règle flexible est assez complexe mais Einarsson [4] a montré que son intégrale de Fourier, sur la durée totale T d'échantillonnage, s'écrit :

$$(18) \quad S^C(f) = \Delta t \left\{ \beta'(\theta) \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp(-in\theta) \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{2} \beta'(\theta) + i\alpha'(\theta) \right] [x_N \exp(-iN\theta) - x_0] \right. \\ \left. + \Delta t \gamma'(\theta) [x'_N \exp(-iN\theta) - x'_0] \right. \\ \left. - i\Delta t^2 \varepsilon'(\theta) [x''_N \exp(-iN\theta) - x''_0] \right\}$$

où x'_0 et x'_N (resp. x''_0 et x''_N) sont les dérivées premières (resp. secondes) de la règle flexible au début et à la fin de l'échantillonnage. Dans cette formule (18), les divers coefficients ont pour expressions :

$$(19a) \quad \alpha'(\theta) = \{1 - 3 \operatorname{sinc}^2(\theta/2) \operatorname{sinc} \theta / [3 - 2 \sin^2(\theta/2)]\} / \theta,$$

$$(19b) \quad \beta'(\theta) = 3 \operatorname{sinc}^4(\theta/2) / [3 - 2 \sin^2(\theta/2)],$$

$$(19c) \quad \gamma'(\theta) = \{1 - 3 \operatorname{sinc}^2(\theta/2) / [3 - 2 \sin^2(\theta/2)]\} / \theta^2,$$

$$(19d) \quad \varepsilon'(\theta) = \{1 - 3 \operatorname{sinc} \theta / [3 - 2 \sin^2(\theta/2)]\} / \theta^3;$$

ils varient en fonction de θ suivant les courbes reportées sur la figure 1(d). Les dérivées premières x'_0 et x'_N sont calculables mais il n'en est pas de même des dérivées secondes x''_0 et x''_N qui doivent être fixées arbitrairement : contrairement aux précédents, ce calcul n'est donc pas « auto consistant ».

On peut le rendre consistant en approximant simultanément les valeurs des dérivées aux échantillons extrêmes par une méthode d'interpolation. Ce faisant, on remplace le calcul complexe de x'_0 et x'_N par un calcul élémentaire et on lève l'arbitraire sur les valeurs de x''_0 et x''_N . Une interpolation linéaire entre les deux premiers puis entre les deux derniers échantillons conduit à $x'_0 = (x_1 - x_0) / \Delta t$, $x'_N = (x_N - x_{N-1}) / \Delta t$, $x''_0 = 0$, et $x''_N = 0$, d'où une première expression simple de $S(f)$ aux fréquences harmoniques $m\Delta f$ (m entier, éventuellement supérieur à N) :

$$(20) \quad S_m^{C1} = \Delta t \left\{ \beta'_m \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp(-i\theta_m) \right. \\ \left. + \delta'_m (x_N - x_0) + \gamma'_m (2x_0 - x_1 - x_{N-1}) \right\}$$

avec $\delta'_m = (1/2)\beta'_m + \gamma'_m + i\alpha'_m$; les parties réelle et imaginaire de δ'_m varient en fonction de θ suivant les courbes reportées sur la figure 1. Une interpolation quadratique entre les trois premiers puis les trois derniers échantillons aboutit à un terme d'effet de bord à quatre coefficients dont trois sont complexes :

$$(21) \quad S_m^{c2} = \Delta t \left\{ \beta'_m \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp(-i\theta_m) + \left[\frac{1}{2}\beta'_m + 3\gamma'_m/2 + i(\alpha'_m - \varepsilon'_m) \right] (x_{N-1} - x_0) - 2(\gamma'_m - i\varepsilon'_m)(x_{N-1} - x_1) + \left(\frac{1}{2}\gamma'_m - i\varepsilon'_m \right) (x_{N-2} - x_2) + \gamma'_m(3x_0 - 4x_1 + x_2) \right\}.$$

L'intégration par spline cubique n'est supérieure à la méthode de Filon que si on connaît les deux dérivées secondes de $x(t)$ aux échantillons extrêmes [4]. En donnant à ces dérivées des valeurs approximatives — formule (21) —, on contourne cette limitation au prix d'une plus grande complexité; en leur donnant des valeurs arbitraires nulles — formule (20) —, on perd en précision du point de vue de l'analyse numérique. D'un autre côté, l'interpolation parabolique par morceaux introduit des points de rebroussement aux jonctions des arcs de parabole tandis que l'interpolation par règle flexible est réputée plus « naturelle » car les dérivées premières et secondes sont continues. Il n'est donc pas évident *a priori* que la formule (17) de Filon doit être préférée à la formule (20) de spline cubique en traitement du signal. Les algorithmes TFCR de calcul de la formule de quadrature (20) sont plus simples que ceux associés à la formule de Filon (17) en ce qui concerne la pondération de la TFD mais non pas en ce qui concerne l'effet de bord. En définitive, ces deux formules ne font intervenir que trois coefficients réels et apparaissent d'équivalente complexité. Quant à la formule (21), plus précise, elle est nettement plus lourde à programmer; notons cependant qu'elle ne nécessite pas plus de calculs que celles de Sorella et Ghosh [9] ou de Froyen et Hellemans [10] d'interpolation quadratique. Indépendamment d'Einarsson [4], Achilles [6] a également établi des formules de quadrature avec une interpolation implicite par règle flexible. Il obtient des résultats équivalents par spline cubique en supposant connues les valeurs extrêmes des dérivées premières et secondes. L'avantage de nos formules est de pouvoir évaluer la TFI d'un signal à partir de ses seuls échantillons, la formule (20) conduisant à un calcul très rapide mais moins précis que la formule (21).

2. 5. AUTRES APPROXIMATIONS DU SIGNAL

Les méthodes ci-dessus peuvent être multipliées en utilisant d'autres techniques d'interpolation ou de lis-

sage du signal. Il est bien connu en analyse numérique que des interpolations d'ordre supérieur conduisent à des oscillations de la fonction d'interpolation qui ne converge pas uniformément vers le signal continu. De plus, elles entraîneraient des contraintes de plus en plus sévères sur le nombre d'échantillons et donc sur les algorithmes TFCR. Enfin, les termes d'effet de bord seraient si complexes que l'utilisation d'algorithmes TFDR perdrait de son intérêt.

A priori, la mise en œuvre de méthodes d'intégration indirecte par lissage préalable du signal, et non plus interpolation, devrait pouvoir être faite sans difficulté selon deux approches différentes. Une première approche empirique consisterait à trouver d'autres pondérations de la TFD que celles proposées dans les formules (7) et (12) de lissages glissants du signal non périodisé en remplaçant les fenêtres rectangulaire et triangulaire par d'autres. Une approche plus classique consisterait à approximer le signal par lissage Moindres Carrés ou Min-Max pendant des durées multiples du pas d'échantillonnage Δt . Les algorithmes TFCR seraient alors d'autant plus rapides que le lissage serait raide par regroupement préalable d'échantillons de plus en plus nombreux. Mais le lissage entraîne une perte d'information sur le signal.

Sur ces critères, nous nous sommes limités aux cinq plus simples méthodes d'interpolation, formules (7), (12), (17), (20) et (21), dont nous présentons maintenant les résultats.

3. Résultats

Nous traiterons surtout le cas test habituel d'un signal causal réel exponentiellement décroissant, $x(t) = \exp(-t)$, de durée T, dont la TFI aux fréquences $m\Delta f$ est

$$(22) \quad S_m = [1 - \exp(-T)] / (1 + i f_e \theta_m).$$

Les amplitudes des divers spectres calculés seront représentées en échelle logarithmique pour bien mettre en évidence les différences entre les algorithmes. C'est d'ailleurs pour insister sur ces différences que nous traiterons aussi le cas d'un signal sinusoïdal de fréquence $f_0 = 1$ exponentiellement amorti $x(t) = \exp(-t) \sin(2\pi t)$. Toujours aux fréquences $m\Delta f$, la TFI de ce signal causal de durée T multiple de $1/f_0$ ($x_0 = x_N = 0$) est

$$(23) \quad S'_m = 2\pi [1 - \exp(-T)] / [4\pi^2 + (1 + i f_e \theta_m)^2].$$

3. 1. GÉNÉRALITÉS

Les deux signaux déterministes précédents ont été échantillonnés pendant la durée T=5 secondes à la fréquence $f_e = 12,8$ Hz, ce qui correspond à 64 échantillons temporels pour les calculs de $\{S_m^D\}$ et $\{S_m^E\}$, mais à 65 pour les autres calculs puisque le dernier échantillon $x(T)$ est pris en compte. La figure 3 représente les amplitudes et phases des spectres

RECHERCHES

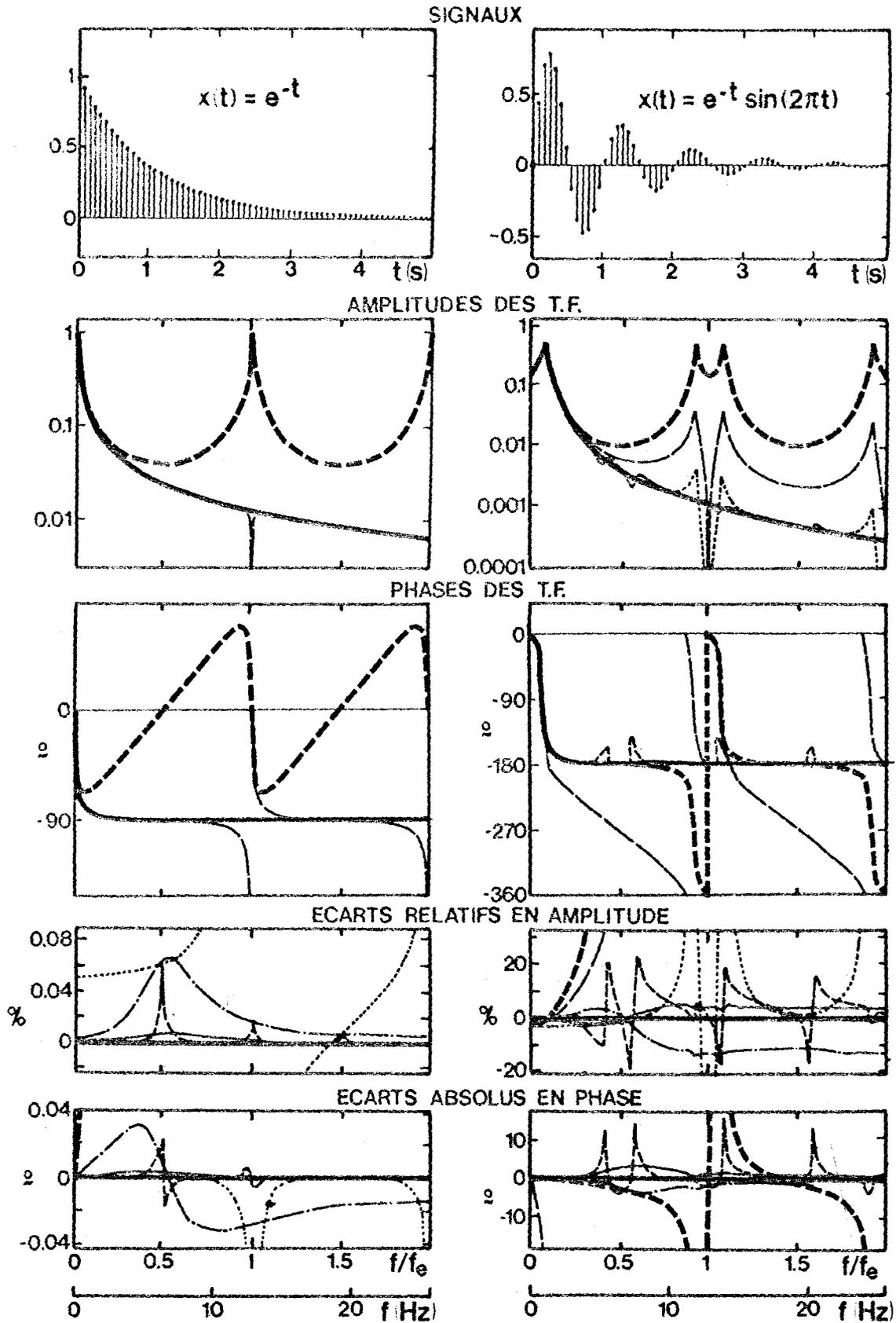


Fig. 3. — Résultats des calculs de spectres de l'exponentielle décroissante (à gauche) et de la sinusoïde amortie (à droite) : — S_m et S_m^0 ; - - - S_m^D , - - - S_m^E , - - - S_m^L , - - - S_m^O , - - - S_m^{C1} , - - - S_m^{C2} .

calculés jusqu'à deux fois la fréquence d'échantillonnage. Ceux de l'exponentielle décroissante sont disposés dans la partie gauche de la figure. Les courbes inférieures montrent en fonction de la fréquence les variations des écarts (relatifs en amplitude et absolus en phase) entre, d'une part certains spectres calculés par TFDR ou TFCR, et d'autre part le spectre exact $\{S_m\}$ de la formule (22). Les spectres de la sinusoïde amortie sont représentés avec les mêmes conventions dans la partie droite de cette figure 3, les écarts étant maintenant calculés à partir du spectre exact $\{S'_m\}$ de la formule (23).

Sauf aux tout premiers échantillons fréquentiels, les spectres $\{S_m^D\}$ calculés par TFDR sont très éloignés des spectres exacts $\{S_m\}$ et $\{S'_m\}$. L'écart relatif en amplitude devient rapidement supérieur à 5%, quoique l'écart absolu reste inférieur à 2% de l'amplitude maximale jusqu'à $f_e/2$. En phase, l'écart avec $\{S_m\}$ dépasse 10° dès le cinquième échantillon mais celui avec $\{S'_m\}$ reste inférieur à 5° jusqu'à $f_e/2$. Aux fréquences supérieures à $f_e/2$, les échantillons fréquentiels S_m^D ne sont pas significatifs puisqu'ils se déduisent des précédents par symétrie hermitique puis périodisation.

3. 2. CAS DE L'EXPONENTIELLE DÉCROISSANTE

Pour l'exponentielle décroissante, cette périodisation ne persiste que sur la phase de $\{S_m^E\}$ dont l'écart avec celle de $\{S_m\}$ ne dépasse cependant pas 10° sauf aux fréquences très proches des harmoniques de f_e . L'amplitude de $\{S_m^E\}$ s'annule à ces harmoniques mais elle est ailleurs très proche de celle de $\{S_m\}$, à mieux de 4% en général. Ces écarts sont fortement réduits avec le spectre $\{S_m^L\}$ pour lequel ils ne sont significatifs (plus de 1% en amplitude et 1° en phase) qu'aux voisinages des harmoniques de f_e . Enfin, l'amélioration devient considérable en approximant le signal par interpolations quadratique ou cubique puisque les écarts sont divisés par au moins un facteur 10, y compris autour des harmoniques de f_e . Cette constatation avantageuse suggère que l'exponentielle décroissante est un test insuffisamment significatif pour ces algorithmes TFCR, tout comme l'aurait été un signal rectangulaire pour celui basé sur la fonction en escalier.

Une autre indication de l'inéquation de ce cas test, pourtant très utilisé, est illustré sur la figure 4. L'exponentielle décroissante est maintenant échantillonnée à une fréquence 16 fois plus faible qu'auparavant; elle est donc connue par seulement cinq échantillons temporels. Dans ces conditions très défavorables, aucun des 5 échantillons S_m^D du spectre TFDR n'a évidemment de signification. Il n'en est pas de même avec le spectre TFCR-Filon, ici étendu jusqu'à 32 fois la fréquence d'échantillonnage, puisque tous les échantillons fréquentiels calculés S_m^Q ne diffèrent que très peu de $S(f)$. Ce résultat s'interprète en construisant, par interpolation quadratique entre les cinq échantillons disponibles, le pseudo signal dont l'algorithme TFCR-Filon calcule le spectre. Représenté en trait

pointillé sur la figure 4, ce pseudo-signal est très proche de l'exponentielle initiale représentée en trait plein, ce qui explique pourquoi les deux spectres calculés analytiquement et numériquement sont eux-mêmes très voisins.

Nous avons donc sélectionné comme test plus sévère la sinusoïde amortie dont les spectres calculés sont représentés sur la partie droite de la figure 3.

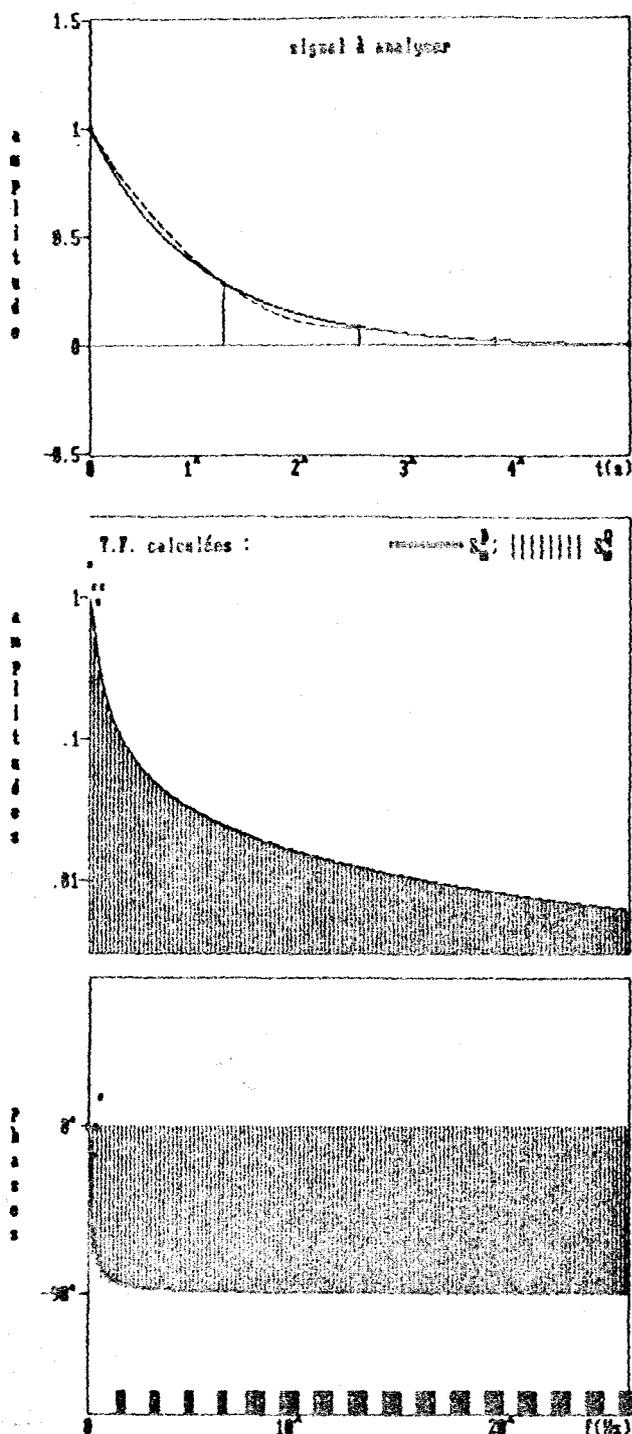


Fig. 4. - Spectres $\{S_m^D\}$ et $\{S_m^Q\}$ de l'exponentielle sous-échantillonnée.

3.3. CAS DE LA SINUSOÏDE AMORTIE

Les avantages et inconvénients de chaque algorithme apparaissent maintenant plus nettement. Par rapport au cas précédent, l'algorithme TFDR donne des résultats équivalents en amplitude mais bien meilleurs en phase puisque l'écart avec la phase de S'_m reste inférieur à 3° pour les fréquences inférieures à $f_e/2$. L'approximation du signal par une fonction en escalier, spectre $\{S_m^E\}$, améliore les calculs d'amplitude mais non pas ceux de phase puisque seuls les cinq premiers échantillons fréquentiels ont une phase correcte à 10° près. L'amélioration devient très sensible avec l'algorithme TFCR basé sur l'interpolation linéaire, spectre $\{S_m^L\}$, sauf autour des fréquences multiples de f_e . On retrouve exactement les mêmes phases qu'avec l'algorithme TFDR car en l'absence d'effet de bord ($x_N = x_0 = 0$ dans le cas présent) S_m^L se déduit de S_m^D par pondération avec les facteurs réels positifs σ^2 . Ces facteurs étant nuls aux fréquences multiples de f_e , l'amplitude est également nulle à ces fréquences et, par continuité, est peu précise aux fréquences voisines. L'algorithme TFCR basé sur l'interpolation quadratique, spectre $\{S_m^Q\}$, ne présente pas ces défauts et donne des résultats satisfaisants en amplitude et en phase. Malgré quelques écarts, puisqu'on approxime des arcs de sinussoïde amortie par des arcs de parabole, $\{S_m^Q\}$ est une bonne évaluation de $\{S'_m\}$. L'amélioration est encore plus sensible avec l'interpolation par splines, spectres $\{S_m^{C1}\}$ et $\{S_m^{C2}\}$, aux variations plus douces sans points de rebroussement. Ces résultats préliminaires nous semblent suffisamment encourageants pour examiner maintenant dans quelle mesure ils peuvent s'expliquer avec les méthodes et techniques de traitement du signal.

4. Discussion

A partir d'un même échantillonnage $\{x_n\}$ de durée T , les algorithmes TFDR et TFCR effectuent des opérations qui conduisent à des résultats très différents. Mais ceci ne signifie nullement que certaines notions de base de traitement du signal sont remises en cause. Au contraire, les deux approches numériques utilisées permettent, nous semble-t-il, de valoriser la signification physique de ces notions.

4.1. SUR LA PÉRIODISATION DU SPECTRE

Du point de vue de l'analyse numérique, l'algorithme TFDR met en œuvre la méthode des rectangles : le signal est d'abord multiplié par l'exponentielle oscillante à la fréquence d'analyse f , puis la fonction résultante est approximée par une fonction en escalier. Mais la multiplication de même signal par une exponentielle oscillante à une fréquence $f + kf_e$ (k entier) donne la même fonction en escalier; un même résultat correspond donc à plusieurs fréquences. Il n'en est plus ainsi avec les algorithmes TFCR puisque c'est

le signal seul qui est préalablement approximé par interpolation; les exponentielles sont ensuite prises en compte par un calcul analytique qui conduit aux divers coefficients représentés sur la figure 1. A chaque fréquence correspond un seul jeu de coefficients, et inversement, ce qui lève l'ambiguïté en fréquence concrétisée par le phénomène de périodisation du spectre TFDR.

Pour atténuer les inconvénients dus à ce phénomène, plusieurs fenêtres spectrales ont été proposées. Nous avons déjà noté que l'algorithme TFCR le plus simple, formule (7), introduit implicitement une nouvelle fenêtre spectrale; celle-ci ne diffère que par un facteur de phase de la fenêtre de Lanczos [2] qu'elle prolonge au-delà de f_e . On voit donc s'établir une certaine continuité entre les algorithmes TFDR et TFCR via les fenêtres spectrales. D'ailleurs, l'algorithme TFCR d'interpolation linéaire utilise implicitement une fenêtre de Lanczos « étendue » [14] mais celle-ci doit être complétée par une prise en compte spécifique des échantillons extrêmes. Avec l'algorithme TFCR-Filon, cet effet de bord est plus élaboré tandis que le facteur multiplicatif de pondération des résultats TFDR est dédoublé, ce qui rend délicate son interprétation en terme de fenêtre. Mais ce dédoublement disparaît avec les algorithmes TFCR de splines cubiques qui introduisent une nouvelle fenêtre spectrale [formule (19b) pour $\beta'(\theta)$] dont la partie centrale est plus large et les lobes plus atténués.

C'est la pondération des résultats TFDR par ces fenêtres spectrales prolongées en fréquence qui fait disparaître la périodisation du spectre dans les résultats TFCR. Cette pondération jouant le rôle d'un filtre passe bas après échantillonnage, les erreurs de repli dans la gamme $(0, f_e/2)$ seront restituées sans grande modification; le phénomène physique de repliement n'est donc pas évité. Donc, comme avec les algorithmes TFDR, l'occurrence dans le spectre d'un maximum à une fréquence supérieure à $f_e/2$ modifiera notablement les résultats aux fréquences inférieures. Cependant, les algorithmes TFCR permettent de se prémunir partiellement contre le repliement en tirant parti du fait que l'évaluation de la TFI (pour laquelle il n'y a évidemment pas de repliement) est d'autant plus précise que le pas d'intégration est petit. Idéalement, ce pas d'échantillonnage est suffisamment petit pour éviter le repliement si, en le divisant par deux, on obtient exactement le même spectre : l'interpolation est alors pleinement justifiée. Ainsi, alors que les résultats TFDR dépendent crucialement de la fréquence d'échantillonnage, ce qui empêche toute comparaison d'une fréquence à l'autre, les résultats TFCR deviennent pratiquement indépendants de celle-ci dès lors qu'elle est suffisamment grande pour éviter le repliement. Donc, avec les algorithmes TFCR, on est théoriquement assuré qu'il n'y a pas de repliement lorsque, divisant successivement par deux le pas d'échantillonnage, la différence entre deux spectres consécutifs est négligeable. Pratiquement, disposant de N échantillons, on peut les prendre en compte par bisections successives de la durée d'échantillonnage :

si les deux derniers spectres, avec $N/2$ puis N échantillons, sont identiques dans le cadre d'une tolérance requise, l'effet du repliement est assurément inférieur à cette tolérance.

Pour les signaux transitoires dont le spectre décroît asymptotiquement en amplitude avec la fréquence, cette méthode itérative de prise en compte des échantillons éviterait l'utilisation d'un filtre anti-repliement.

4.2. SUR LES INTERPOLATIONS POLYNOMIALES ET DE SHANNON

Les algorithmes TFDR calculent les coefficients de Fourier d'un pseudo-signal $x_s(t)$ continu périodique- T déduit de $\{x_n\}$, $0 \leq n \leq N-1$, par interpolation de Shannon entre les échantillons dupliqués sur une durée infinie (fig. 5). Aucune discontinuité n'apparaît dans $x_s(t)$ aux passages entre les images (par périodisation) de x_{N-1} et x_0 mais il se produit des oscillations avant et après ces passages. Ces coefficients de Fourier représentent un échantillonnage fréquentiel (aux fréquences harmoniques jusqu'à $f_e/2$) de la TFI du pseudo-signal $x_s(t)$. $\text{rect}_T(t)$ étant la fonction rectangle de durée T . Les algorithmes TFCR calculent les coefficients de Fourier d'un pseudo-signal $x_p(t)$ continu périodique- T déduit de $\{x_n\}$, $0 \leq n \leq N$, par interpolation polynomiale puis duplication. Si $x_N \neq x_0$, des discontinuités apparaissent dans $x_p(t)$, aux instants multiples de T , mais il n'y a pas d'oscillation; ces discontinuités sont prises en compte dans l'effet de bord. A toutes les fréquences sans limitation, c'est la TFI de $x_p(t)$. $\text{rect}_T(t)$ qui est exactement calculée. La question est de savoir lequel des deux pseudo-signaux $x_s(t)$ ou $x_p(t)$ est le plus proche du signal continu $x(t)$.

Si $x(t)$ est périodique- T , ce sera évidemment $x_s(t)$ pourvu que le théorème d'échantillonnage soit applicable; si $x(t)$ est nul en dehors de la durée T , ce sera $x_p(t)$ pourvu que l'échantillonnage soit compatible avec l'interpolation utilisée. Sauf cas exceptionnel un signal n'est ni nul ni périodique- T antérieurement et postérieurement à son échantillonnage et aucune des deux approches précédentes n'est valable, comme d'ailleurs aucune autre. Néanmoins, dans le cadre d'approximations, des considérations physiques peuvent conduire à préférer l'une à l'autre. Ainsi, avec un signal permanent dont on sait *a priori* qu'il est stationnaire ou oscillant, la périodisation sans discontinuité semble préférable. Les algorithmes TFDR seront donc mieux adaptés, d'autant plus que les brusques variations et oscillations de $x_s(t)$ aux voisinages de x_{N-1} et x_0 peuvent être adoucies par pondération (fenêtre temporelle) ou convolution (fenêtre spectrale). A l'opposé, avec un signal de durée limitée, la non périodisation avec discontinuités en x_0 et x_N est naturellement préférable, comme illustré sur la figure 5. Les algorithmes TFCR semblent alors mieux adaptés. Ceci est par exemple le cas des signaux transitoires car, d'après le principe de causalité, ces signaux sont strictement nuls antérieurement à l'échantillonnage qui doit évidemment coïncider avec le déclenche-

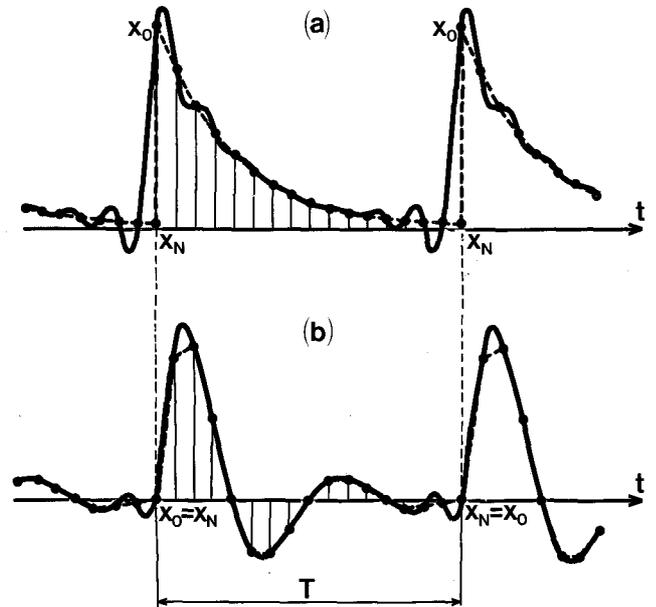


Fig. 5. — Pseudo-signaux $x_s(t)$ (—) et $x_p(t)$ (-----) (exemple de l'interpolation linéaire) dans les cas de l'exponentielle décroissante (a) et de la sinusoïde amortie (b).

ment du processus. Après l'échantillonnage, l'annulation du signal entraîne une erreur de troncature qui est d'autant plus faible que la durée d'échantillonnage est longue. Donc, les algorithmes TFDR semblent mieux adaptés que les TFCR pour calculer la TFI d'un signal permanent, et inversement pour un signal transitoire.

En ne considérant que les signaux ainsi définis par extrapolation (périodisation ou annulation en dehors de l'échantillonnage), on peut d'ailleurs discuter des interpolations polynomiales et de Shannon d'un autre point de vue.

Si le signal a un spectre borné par une fréquence B de Nyquist-Shannon, l'interpolation de Shannon est exacte, $x_s(t) = x(t)$, à condition que $f_e \geq 2B$ (théorème 13 de Shannon). L'interpolation polynomiale ne peut être exacte puisque les spectres des rectangles, trapèzes ou arcs de parabole ne sont pas bornés. Cependant, $x_p(t)$ peut être une très bonne approximation de $x(t)$, d'autant meilleure d'ailleurs que f_e est supérieure à $2B$. Pour un signal sinusoïdal pur de fréquence B , par exemple, échantillonné à une fréquence f_e multiple de B , on vérifie que les spectres TFCR-Filon et par splines sont pratiquement identiques au spectre TFDR dès que $f_e > 4B$, ce qui correspond à plus de quatre échantillons par période du signal.

Si le signal a un spectre non borné, les conclusions sont pratiquement inversées. L'interpolation de Shannon ne peut exactement restituer $x(t)$; elle conduit généralement à un pseudo-signal $x_s(t)$ qui oscille à $f_e/2$ et s'écarte notablement de $x(t)$ entre les échantillons. L'interpolation polynomiale, au contraire, peut être exacte (fonction rectangle approximée par une

fonction en escalier, par exemple); $x_p(t)$ est en tout cas d'autant plus proche de $x(t)$ que f_e est grande.

Si un signal de durée illimitée est échantillonné à une cadence suffisante, il apparaît donc que les algorithmes TFDR conviennent mieux pour calculer les spectres bornés et les algorithmes TFCR pour calculer les spectres non bornés. Comme les signaux à durée limitée ont un spectre non borné, on retrouve les conclusions antérieures.

Pratiquement, tous les signaux étant à durée limitée, les algorithmes TFCR seraient des améliorations sensibles des algorithmes TFDR.

4. 3. SUR LE THÉORÈME D'ÉCHANTILLONNAGE

Un avantage important des algorithmes TFCR est qu'ils permettent le calcul des composantes du spectre au-delà de $f_e/2$, à des fréquences où les résultats d'un algorithme TFDR ne sont pas significatifs. L'interprétation en est la suivante : si on périodise- f_e le spectre calculé par TFD, on obtient l'exacte TFI non plus de $x_s(t)$, qui est continu, illimité et périodique-T, mais de la distribution peigne- Δt multipliée par $x(t)$. Cette TFI est une distribution qui représente un échantillonnage fréquentiel de $S(f)$ périodisé- f_e , d'où le repliement des spectres $S(f)$ qui peut être évité en se conformant au théorème d'échantillonnage. Avec un algorithme TFCR, on calcule la TFI du pseudo signal continu $x_p(t)$ qui ne peut en aucune manière être assimilé à une distribution. On peut alors imaginer que le théorème d'échantillonnage est implicitement violé; il n'en est évidemment rien puisque ce théorème ne s'applique qu'aux signaux à spectre borné, ce qui n'est pas le cas des transitoires ou signaux à durée limitée ici considérés.

Il faudrait donc, pour ces signaux, trouver d'autres moyens de vérifier la validité des calculs TFCR au-delà de $f_e/2$; une méthode de calcul itératif de la TFI par dichotomie sur la durée d'échantillonnage a déjà été proposée à la fin du paragraphe 4.1. A l'appui de cette méthode, remarquons que, appliqués à des signaux à spectre borné, les algorithmes TFCR donnent des résultats conformes au théorème d'échantillonnage. En effet, si le signal oscille à une fréquence supérieure à $f_e/2$, aucune interpolation polynomiale n'est correcte et le spectre calculé par TFCR sera erroné. Considérons par exemple une sinusoïde; si elle est échantillonnée à moins de quatre points par période, toutes les interpolations polynomiales (y compris celles par splines) donneront de très mauvais résultats. Pour restituer convenablement ce spectre, et en particulier à la fréquence d'oscillation, il faut augmenter la cadence d'échantillonnage, conclusion conforme au théorème. D'un point de vue énergétique, on peut d'ailleurs remarquer que les algorithmes TFCR font l'hypothèse implicite que la plus grande partie de l'énergie du signal est contenue dans la bande de fréquences $(0, f_e/2)$ puisque tous les coefficients sont globalement décroissants avec la fréquence (voir fig. 1).

Il apparaît donc que, tout en étant dans certains cas moins performants que les algorithmes TFDR, les algorithmes TFCR peuvent aussi être appliqués à des signaux à spectre borné avant échantillonnage mais qui ne le sont plus après échantillonnage pendant une durée finie T.

5. Conclusion

Les algorithmes TFDR calculent un échantillonnage fréquentiel de la transformée de Fourier du signal reproduite à la fréquence d'échantillonnage, d'où le repliement des spectres qui ne peut être évité que si le signal a un spectre borné. Puisqu'il n'en est pas ainsi du fait de la durée nécessairement finie de l'échantillonnage, le calcul est approximatif, avec un domaine fréquentiel de validité d'autant plus étendu que la cadence d'échantillonnage est élevée. Pour une même cadence, ce domaine de validité peut être notablement étendu avec les algorithmes TFCR (Transformée de Fourier Continue Rapide) lorsqu'il s'agit de signaux transitoires. En un temps de calcul légèrement supérieur, ces algorithmes calculent la transformée de Fourier d'un pseudo-signal construit par interpolation polynomiale entre les échantillons disponibles. Il n'y a plus de périodisation du spectre et la précision du résultat est d'autant meilleure que le signal est mieux approximé par le pseudo-signal.

Nous n'avons étudié que les interpolations polynomiales d'ordre 0 (fonction en escalier), 1 (interpolation linéaire) 2 (interpolation quadratique) et 3 (splines cubiques), d'ailleurs très succinctement. Nous avons en effet laissé sans réponse deux questions théoriques. L'une relève de l'analyse numérique : quelles sont les formules des erreurs de troncature des algorithmes TFCR? La seconde est liée au traitement du signal : les algorithmes TFCR sont-ils aussi performants lorsque le signal est bruité? Une étude est en cours pour situer les méthodes d'interpolation parmi les méthodes modernes d'analyse spectrale. D'autre part, nos remarques sur la périodisation du spectre, l'interpolation de Shannon et le théorème d'échantillonnage devraient être approfondies. En bref, ce travail n'a aucune prétention théorique; il se résume à une constatation : pour les signaux à spectre non borné comme les transitoires, les nouveaux algorithmes TFCR que nous proposons sont d'indéniables améliorations des algorithmes TFDR habituels.

Concrètement, il reste acquis de cette étude préliminaire que les algorithmes TFCR-Filon et splines allient précision et rapidité au niveau le plus élevé. Ils empruntent à l'analyse numérique des méthodes qui servent de référence pour les études de précision, et au traitement du signal une technique de calcul parmi les plus rapides qui soient.

Manuscrit reçu le 23 septembre 1985.

Appendice

Après avoir effectué le changement de variable $y=(t-t_n)/\Delta t$ la TFI du n -ième arc de parabole s'écrit :

$$(A 1) \quad S^Q(n, f) = \Delta t \exp(-in\theta) \times \int_{-1}^{+1} x(y) \exp(-i\theta y) dy$$

où

$$(A 2) \quad x(y) = x_n + \frac{1}{2}(x_{n+1} - x_{n-1})y + \left[\frac{1}{2}(x_{n+1} + x_{n-1}) - x_n \right] y^2.$$

On est donc ramené à trois intégrales élémentaires

$$(A 3 a) \quad \int_{-1}^{+1} \exp(-i\theta y) dy = 2 \operatorname{sinc} \theta$$

$$(A 3 b) \quad \int_{-1}^{+1} y \exp(-i\theta y) dy = 2i(\operatorname{csc} \theta - \operatorname{sinc} \theta/\theta)$$

$$(A 3 c) \quad \int_{-1}^{+1} y^2 \exp(-i\theta y) dy = 2 \operatorname{sinc} \theta + 4(\cos \theta - \operatorname{sinc} \theta)/\theta^2$$

dont le calcul permet, après regroupement des termes en x_{n-1} , x_n et x_{n+1} , d'écrire la TFI sous la forme :

$$(A 4) \quad S^Q(n, f) = \Delta t \exp(-in\theta) [x_{n-1}(\sin \theta + 2 \operatorname{csc} \theta - 2 \operatorname{sinc} \theta/\theta - i \cos \theta + i \operatorname{sinc} \theta)/\theta + x_n(4 \operatorname{sinc} \theta - 4 \cos \theta)/\theta^2 + x_{n+1}(\sin \theta + 2 \operatorname{csc} \theta - 2 \operatorname{sinc} \theta/\theta + i \cos \theta - i \operatorname{sinc} \theta)/\theta].$$

En multipliant par $\exp(i\theta) [\cos \theta - i \sin \theta]$ les termes en x_{n-1} et par $\exp(-i\theta) [\cos \theta + i \sin \theta]$ ceux en x_{n+1} , on obtient après simplification l'expression (14) de $S^Q(n, f)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] W. WEAVER et C. E. SHANNON, *Théorie mathématique de la communication*, CEPL, Paris, 1975.
 [2] R. W. HAMMING, *Digital filters*, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, 1977.
 [3] L. N. G. FILON, On a quadrature formula for trigonometric integrals, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, 49, 1928, p. 38-47.
 [4] B. O. EINARSSON, Numerical calculation of Fourier integrals with cubic splines, *BIT*, 8, 1968, p. 279-286.
 [5] F. MANDEL et R. J. BEARMAN, Some remarks on the numerical evaluation of Fourier and Fourier-Bessel transforms, *Journal of Computational Physics*, 7, 1971, p. 637-645.
 [6] D. ACHILLES, Pipeline Fourier transform with implicit spline interpolation, *AEU*, 29-2, 1975, p. 74-80.
 [7] J. SCHUTTE, New fast Fourier transform algorithm for linear system an analysis applied in molecular beam relaxation spectroscopy, *Rev. Sci. Instrum.*, 52, 1981, p. 400-404.
 [8] S. MAKINEN, New algorithm for the calculation of the Fourier transform of discrete signals, *Rev. Sci. Instrum.*, 53, 1982, p. 627-630.
 [9] S. SORELLA et S. K. GHOSH, Improved method for the discrete fast Fourier transform, *Rev. Sci. Instrum.*, 55/8, 1984, p. 1348-1352.
 [10] M. FROYEN et L. HELLEMANS, Improved algorithm for the discrete Fourier Transform, *Rev. Sci. Instrum.*, 56/12, 1985, p. 2325-2327.
 [11] C. LANZOS, *Applied analysis*, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, 1956.
 [12] E. O. TUCK, A simple «Filon-Trapezoidal» rule, *Mathematics of computation*, 21, 1967, p. 239-241.
 [13] F. ABRAMOVICI, The accurate calculation of Fourier integrals by the fast Fourier transform technique, *Journal of computational physics*, 11, 1973, p. 28-37. Voir aussi : N. G. KIN-CHUE, On the accuracy of numerical Fourier transforms, *Journal of Computational physics*, 16, 1974, p. 396-400. The accuracy of finite Fourier transforms, *Journal of computational physics*, 17, 1975, p. 446-449.
 [14] V. CAPPELLINI, A. G. CONSTANTINIDES et P. EMILIANI, *Digital filters and their applications*, Academic Press, London, 1980.