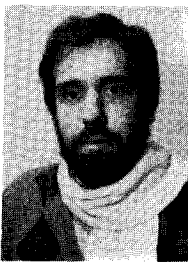


Pôles et zéros

des prédicteurs numériques

Poles and zeros of digital linear prediction filters



Joao Marcos TRAVASSOS-ROMANO

Laboratoire des Signaux et Systèmes, ESE, Plateau du Moulon, 91190 GIF-SUR-YVETTE

Ingénieur de l'Université de Campinas (UNICAMP, Brésil, 1981) et Master of Sciences (1984). Inscrit en thèse de doctorat à l'Université Paris-Sud, il fait ses travaux de recherche au Laboratoire des Signaux et Systèmes. Domaines d'intérêt : filtrage numérique, filtrage adaptatif, transmission numérique, analyse des signaux.



Maurice BELLANGER

Laboratoire des Signaux et Systèmes, ESE, Plateau du Moulon, 91190 GIF-SUR-YVETTE

Ingénieur ENST (1965) et Docteur ès Sciences (1981), Professeur associé à l'Université de Paris-Sud et adjoint au Directeur Scientifique de la Société TRT. Domaines d'intérêt : filtrage numérique, filtres adaptatifs, analyse des signaux, applications et réalisations du traitement numérique.

RÉSUMÉ

La position dans le plan complexe des zéros et pôles des prédicteurs est étudiée pour des signaux sinusoïdaux bruités et des filtres RIF et RII à 1, 2 et N coefficients. L'approche retenue conduit à des résultats facilement exploitables qui, sur certains points, complètent et étendent les résultats déjà connus dans ce domaine. Une application à la détection des signalisations téléphoniques est présentée.

MOTS CLÉS

Filtres numériques, prédiction linéaire, pôles et zéros, RIF/RII, signalisation téléphonique.

SUMMARY

The location in the complex Z plane of zeros and poles of linear predictors is investigated for sinusoidal signals with additive noise. FIR and IIR structures with 1, 2 and N coefficients are considered. The approach taken provides easy-to-use results which, in several aspects, nicely complement known results. The application to signalling signal detection in communications is given as illustration.

KEY WORDS

Digital filters, linear prediction, poles and zeros, FIR/IIR, telephone signalling.

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction
2. Calcul des coefficients des filtres de prédiction
3. Filtres RIF du premier et second ordre
4. Filtres RIF d'ordre N
5. Filtre RII purement récursif
6. Détection de signalisations téléphoniques
7. Conclusion

1. Introduction

Un prédicteur numérique est un filtre dont la fonction de transfert $H(z)$ s'écrit :

$$(1) \quad H(z) = 1 - \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}$$

et dont les coefficients sont calculés pour minimiser une fonction du signal de sortie suivant un critère qui est généralement de type quadratique, par exemple la minimisation de la puissance. Si N est un entier fini, le filtre est à Réponse Impulsionnelle Finie (RIF) et les a_i ($1 \leq i \leq N$) sont les coefficients du prédicteur. Si N est infini, le filtre est à Réponse Impulsionnelle Infinie (RII) et sa fonction de transfert se présente sous la forme d'une fraction rationnelle :

$$(2) \quad H(z) = \frac{1 - \sum_{i=1}^L a_i z^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^M b_i z^{-i}}$$

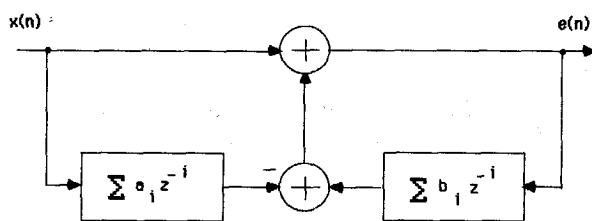


Fig. 1. - Filtre de prédiction RIF/RII.

Le schéma correspondant est donné par la figure 1. Les entiers L et M dans ce filtre sont respectivement les ordres des parties non récursive et récursive. La

sortie $e(n)$, erreur de prédiction, est liée au signal d'entrée $x(n)$ par la relation suivante :

$$(3) \quad e(n) = x(n) - \sum_{i=1}^L a_i x(n-i) + \sum_{i=1}^M b_i e(n-i).$$

Par référence à la modélisation, les prédicteurs RIF sont parfois appelés autorégressifs (AR), les prédicteurs purement RII sont appelés à moyenne ajustée (MA) et les prédicteurs mixtes RIF/RII sont appelés ARMA. Dans le présent texte c'est la terminologie des filtres qui est utilisée.

Les coefficients des filtres de prédiction constituent un ensemble de paramètres intéressants pour la caractérisation des signaux; ils sont utilisés, notamment, pour l'analyse et le codage.

Bien que la théorie de la prédiction linéaire soit maintenant bien établie [1], les résultats ne sont pas toujours convenablement exploités par les utilisateurs de traitement de signal. L'application de méthodes générales aux cas fréquents et simplifiés de signaux sinusoïdaux bruités fournit des résultats rigoureux mais compliqués et parfois délicats à interpréter [2, 3]. En fait, il manque des moyens simples pour établir facilement la correspondance entre les caractéristiques d'un signal et ses coefficients de prédiction.

L'approche la plus directe pour étudier un filtre passe par l'analyse de ses pôles et ses zéros dans le plan des z et l'objet du présent article est de rassembler un certain nombre de résultats sur la position des pôles et des zéros des différents types de prédicteurs dans le cas de signaux sinusoïdaux bruités. Par rapport aux travaux déjà publiés sur ce sujet [2 à 5], l'approche simplifiée qui est présentée apporte des compléments et offre à l'utilisateur des moyens simples et directs pour la conception des prédicteurs et leur exploitation.

Avant d'aborder le cas le plus élémentaire, celui des prédicteurs RIF d'ordre un et deux, différentes techniques de calcul des coefficients de prédiction sont passées en revue.

2. Calcul des coefficients des filtres de prédiction

La méthode générale pour le calcul de N coefficients de prédiction d'un signal stationnaire $x(n)$ consiste à faire appel aux $N+1$ premiers éléments de la fonction d'autocorrélation, définis par :

$$(4) \quad R(n) = E[x(i)x(i-n)]$$

où $E[x]$ est l'espérance mathématique de la variable aléatoire x , et à la matrice d'autocorrélation de dimension N définie par :

$$(5) \quad R_N = \begin{bmatrix} R(0) & R(1) & R(2) & \dots & R(N-1) \\ R(1) & R(0) & R(1) & \dots & R(N-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R(N-1) & R(N-2) & \dots & \dots & R(0) \end{bmatrix}$$

L'annulation des dérivées de la puissance du signal en sortie du filtre, ou erreur de prédiction, par rapport aux coefficients conduit à l'équation dite normale :

$$(6) \quad \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = R_N^{-1} \begin{bmatrix} R(1) \\ R(2) \\ \vdots \\ R(N) \end{bmatrix}$$

Ce calcul peut être fait directement si la fonction d'autocorrélation est disponible. On peut aussi faire appel à des procédures récurrentes pour obtenir les coefficients, en réalisant le filtre sous forme adaptative [6]. Alors les coefficients sont mis à jour à l'arrivée de chaque nouvelle donnée, par exemple dans l'approche la plus simple, par l'expression :

$$(7) \quad a_i(n) = a_i(n-1) + \delta e(n) x(n-i); \quad 1 \leq i \leq N$$

où $e(n)$ est l'erreur de prédiction et δ le pas d'adaptation.

Ces méthodes s'appliquent à des signaux quelconques. En pratique, un cas important est celui où $x(n)$ peut être considéré comme un signal déterministe auquel se superpose un bruit blanc :

$$(8) \quad x(n) = s(n) + b(n)$$

Alors, si $S(\omega)$ désigne la densité spectrale énergétique du signal $s(n)$, P_B la puissance du bruit, il vient, avec l'hypothèse d'indépendance de $s(n)$ et $b(n)$:

$$(9) \quad E[e^2(n)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2 S(\omega) d\omega + P_B \left[1 + \sum_{i=1}^N a_i^2 \right]$$

Cette expression met bien en évidence le fonctionnement du prédicteur : elle montre que l'erreur de prédiction se compose de deux termes, un résidu de prédiction et le résultat de l'amplification du bruit d'entrée. En annulant la dérivée de $E[e^2(n)]$ par rapport aux coefficients dans l'expression (9), on obtient les valeurs de ces coefficients. Cette technique est particulièrement indiquée dans le cas de signaux sinusoïdaux bruités. Elle est bien entendu équivalente à la méthode de corrélation, mais elle présente l'avantage de se prêter facilement à des approximations conduisant à des résultats simples et faciles à utiliser.

Filtres RIF du premier et second ordre

Le prédicteur d'ordre 1 a pour fonction de transfert :

$$(10) \quad H(z) = 1 - az^{-1}$$

Ses possibilités sont naturellement très limitées. Il s'applique au cas où $x(n)$ est un signal continu bruité, par exemple : $x(n) = 1 + b(n)$.

Il vient alors :

$$E[e^2(n)] = |H(1)|^2 + P_B(1+a^2) = (1-a)^2 + P_B(1+a^2)$$

d'où :

$$(11) \quad a = \frac{1}{1+P_B}$$

Le zéro de ce prédicteur se trouve sur l'axe réel du plan des Z ; il se rapproche de l'origine quand le bruit augmente. Les valeurs des deux contributions à l'erreur de prédiction totale peuvent être comparées :

$$|H(1)|^2 = \left(\frac{P_B}{1+P_B} \right)^2; \\ P_B(1+a^2) = P_B \frac{2+2P_B+P_B^2}{(1+P_B)^2}$$

Le rapport

$$k = \frac{P_B(1+a^2)}{|H(1)|^2}$$

est minimal pour

$$P_B = \sqrt{2},$$

c'est-à-dire un rapport signal à bruit de $10 \log(1/\sqrt{2}) = -1,5$ dB, et il prend alors une valeur voisine de 5. Pour P_B petit, il vient $k \approx 2/P_B$. C'est-à-dire que le résidu de signal est très inférieur au bruit amplifié.

Le prédicteur d'ordre deux a pour fonction de transfert :

$$(12) \quad H(z) = 1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}$$

Il s'applique aux signaux sinusoïdaux, soit :

$$x(n) = \sqrt{2} \sin(n\omega_0) + b(n)$$

Alors :

$$E[e^2(n)] = |H(\omega_0)|^2 + P_B(1+a_1^2+a_2^2)$$

et il vient pour les coefficients :

$$(13) \quad \begin{cases} a_1 = 2 \cos \omega_0 \frac{\sin^2 \omega_0 + P_B/2}{\sin^2 \omega_0 + P_B(2+P_B)}; \\ a_2 = -1 \left[1 - P_B \frac{1+P_B+2 \cos^2 \omega_0}{(1+P_B)^2 - \cos^2 \omega_0} \right] \end{cases}$$

L'angle polaire θ des zéros est alors donné par :

$$(14) \quad \cos \theta = \cos \omega_0 \\ \times \frac{1+P_B - \cos 2\omega_0}{2 \sqrt{((1+P_B)^2 - \cos^2 \omega_0)(\cos^2 \omega_0 - (1+P_B) \cos 2\omega_0)}}$$

Quand le bruit s'annule, les zéros viennent se placer sur les cercle unité en $e^{\pm j\omega_0}$. La condition pour qu'ils

soient complexes est la suivante :

$$a_1^2 + 4a_2 < 0$$

ce qui est toujours vérifié si $|\cos \omega_0| < \sqrt{2}/2$, c'est-à-dire $45^\circ \leq \omega_0 \leq 135^\circ$. En dehors de ce domaine les zéros sont complexes quand le bruit est suffisamment petit; la puissance de bruit correspondant à la limite, c'est-à-dire pour laquelle l'égalité suivante est vérifiée :

$$(15) \quad a_1^2 + 4a_2 = 0$$

est donnée par l'équation du troisième degré suivante :

$$(16) \quad (1 + P_B)^3 + \frac{3 \cos^2 \omega_0}{8 \cos^2 \omega_0 - 4} (1 + P_B)^2 - \frac{3}{2} \cos^2 \omega_0 (1 + P_B) + \frac{4 \cos^6 \omega_0 + \cos^2 \omega_0}{8 \cos^2 \omega_0 - 4} = 0$$

Cette équation n'a qu'une seule racine réelle positive pour les valeurs de ω_0 considérées. La puissance limite théorique du bruit peut ainsi être calculée en fonction de la fréquence de la sinusoïde.

En prenant les résultats donnés dans la référence [5] pour la position des zéros d'un prédicteur dans le cas d'un signal constitué par deux fréquences pures bruitées et en les appliquant au cas d'ordre 2, où les fréquences pures sont $+\omega_0$ et $-\omega_0$, l'approximation suivante est obtenue

$$(17) \quad P_B = 1,33 \omega_0^3 \quad (\omega_0 \text{ en rd}).$$

La figure 2 montre alors l'évolution de la puissance limite du bruit en fonction de la pulsation ω_0 de la sinusoïde (exprimée en degrés) et permet une comparaison avec l'approximation (17).

L'évolution des zéros dans le plan complexe, quand la puissance du bruit additif varie est donnée par la figure 3. Pour un bruit initial très faible les zéros

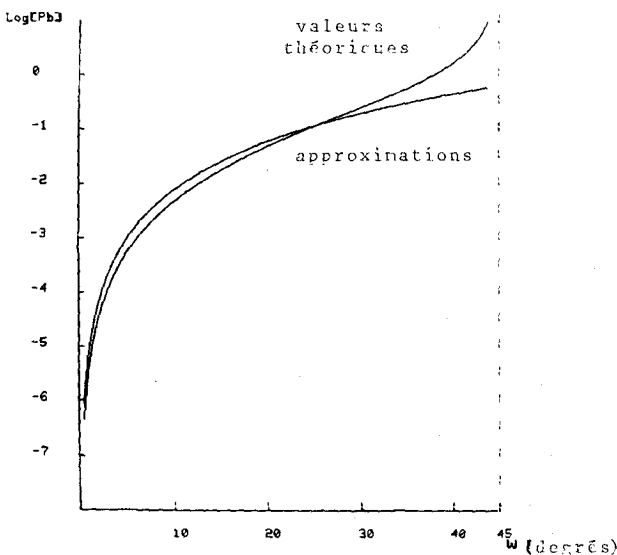


Fig. 2. — Puissance limite de bruit en fonction de la pulsation du signal sinusoïdal.

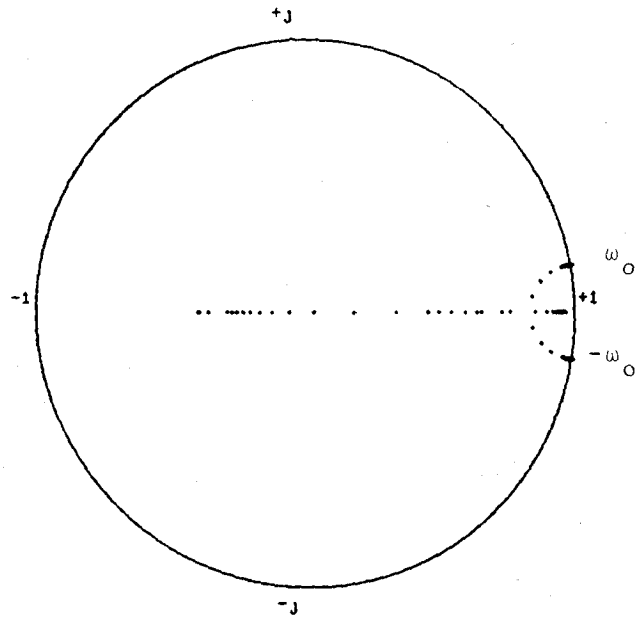


Fig. 3. — Évolution des zéros d'un prédicteur d'ordre 2 en fonction du rapport signal à bruit.

partent du cercle unité; ils se déplacent sur un cercle de rayon ω_0 quand le bruit augmente. Au-delà de la valeur limite précédemment calculée, ils se déplacent sur l'axe réel.

4. Filtres RIF d'ordre N

La fonction de transfert d'un prédicteur RIF d'ordre N est le polynôme en z :

$$(18) \quad H(z) = 1 - \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}$$

Les valeurs des N coefficients peuvent être obtenues à partir de la relation (9) par dérivation ou, ce qui est équivalent, en résolvant le système (6); les zéros sont ensuite déterminés en calculant les racines de H(z). Cette méthode est rigoureuse mais elle ne permet pas de déterminer facilement et directement la position des zéros. Ce résultat peut être obtenu en faisant appel à une méthode approchée basée sur le mode de fonctionnement du prédicteur. Cette méthode est d'abord présentée pour le cas d'un prédicteur appliqué à un signal continu bruité.

4.1. SIGNAL CONTINU BRUITÉ

En observant la relation (9), on peut voir que le prédicteur idéal serait le filtre qui annulerait la composante continue et réduirait à l'unité le facteur de P_B . Or il existe un type de filtre spécialement conçu pour cette fonction, qu'il réalise d'une manière arbitrairement approchée, c'est le filtre dit « à encoche »

RECHERCHES

et dont la fonction de transfert s'écrit :

$$(19) \quad H_{1E}(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - (1 - \varepsilon) z^{-1}}$$

ou ε est un réel avec $0 < \varepsilon \ll 1$.

Il possède un zéro $z_0 = 1$ qui annule le signal continu et un pôle dont le rôle est compenser l'amplification du bruit apportée par le zéro.

Le dénominateur de $H_{1E}(z)$ n'est pas réalisable avec un filtre RIF, mais il est possible d'en obtenir une approximation. En effet, avec $b = 1 - \varepsilon$ il vient :

$$(20) \quad \frac{1}{1 - bz^{-1}} \approx \frac{1 + bz^{-1} + \dots + b^{N-1} z^{-(N-1)}}{1 - b^N z^{-N}}$$

La fonction $1 - b^N z^{-N}$ a un module qui oscille régulièrement entre $1 + b^N$ et $1 - b^N$. En réalisant la fonction :

$$H(z) = (1 - b^N z^{-N}) H_{1E}(z),$$

on introduit simplement des ondulations d'amplitude constante sur la réponse en fréquence pratiquement uniforme $H_{1E}(z)$, d'autant plus petites que b^N est petit. Dans ces conditions $H(z)$ doit être très proche de l'optimum accessible avec un filtre RIF à N coefficients. Soit donc le prédicteur de fonction de transfert :

$$(21) \quad H(z) = (1 - z^{-1})(1 + bz^{-1} + \dots + b^{N-1} z^{-(N-1)})$$

Alors :

$$E[e^2(n)] = P_B \left(1 + \sum_{i=1}^N a_i^2 \right) = 2 P_B \frac{1 + b^{2N-1}}{1 + b}$$

En annulant la dérivée par rapport à b il vient :

$$(2N-2)b^{2N-1} + (2N-1)b^{2N-2} - 1 = 0$$

Soit :

$$b^{2N-2} = \frac{1}{(2N-2)b + 2N-1}$$

Pour ε petit et b voisin de l'unité, on peut assimiler b à 1 dans le dénominateur de l'expression ci-dessus car l'erreur relative ainsi faite est divisée par $2N-2$ par la suite. Il vient alors

$$(22) \quad b \approx \left(\frac{1}{4N-3} \right)^{1/(2N-2)}$$

Finalement, pour un prédicteur d'ordre N appliqué à un signal continu bruité, les zéros se répartissent comme suit :

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} Z_0 \approx 1; \\ Z_i \approx \left(\frac{1}{4N-3} \right)^{1/2(N-1)} e^{j2\pi(i/N)}; \\ 1 \leq i \leq N-1 \end{array} \right.$$

C'est-à-dire que les $(N-1)$ zéros qui ont pour fonction de compenser l'amplification du bruit se placent sur un cercle de rayon b , donné par l'expression (22). En toute rigueur, il est possible de démontrer que les $N-1$ zéros éloignés du point 1 se trouvent dans la couronne du plan des z donnée par [4] :

$$(24) \quad (2N)^{-1/N} < |z| < 1 - \frac{1}{N}$$

Le tableau donne pour différentes valeurs de N les valeurs de l'estimation du rayon du cercle et des rayons de la couronne limite, en les comparant avec les valeurs réelles extrêmes des modules des $(N-1)$ zéros éloignés du point 1, calculés à partir de l'expression (6) pour une valeur faible et une valeur importante de la puissance du bruit.

L'illustration présentée à la figure 4 compare les positions de zéros estimés par l'expression (23) avec les zéros réels calculés pour $N=12$ et $P_B=0,001$.

Il est remarquable d'observer que l'estimation (22) reste très proche du maximum de la distance des zéros à l'origine et fournit en fait une bonne évaluation du rayon extérieur de la couronne, valable sur une grande gamme de puissances de bruit.

Une estimation de l'amplification apportée par le filtre sur le bruit peut également être obtenue. En effet en

TABLEAU

Distances à l'origine du groupe de $N-1$ zéros

N	Min. et Max. des valeurs calculées		Rayons de la couronne	$\left(\frac{1}{4N-3} \right)^{1/2(N-1)}$
	$P_B=0,001$	$P_B=0,5$		
2.....	0,5	0,4633	0,5-0,5	(0,5)
4.....	0,6058-0,6423	0,5916-0,6273	0,5946-0,750	0,6521
8.....	0,7146-0,7845	0,7097-0,7793	0,7071-0,8750	0,7862
12.....	0,7721-0,8469	0,7697-0,8443	0,7673-0,9167	0,8411

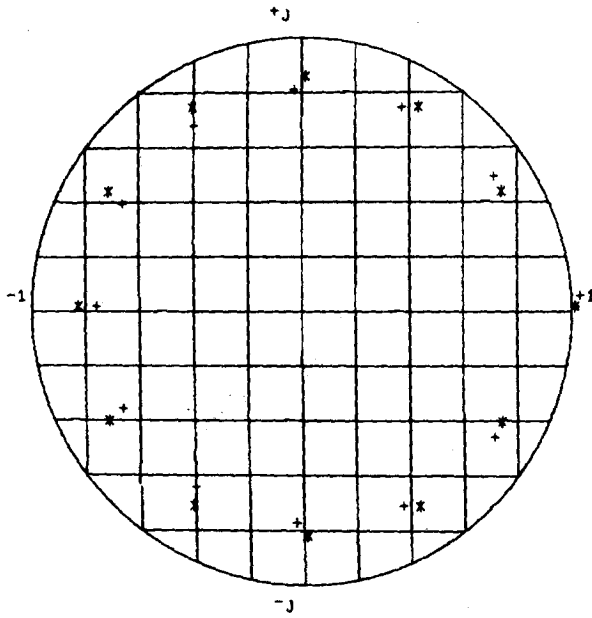


Fig. 4. - Zéros du prédicteur d'ordre 12 appliqué à un signal continu bruité. + valeurs calculées; * valeurs estimées.

prenant les coefficients donnés par la relation (23), il vient :

$$(25) \quad 1 + \sum_{i=1}^N a_i^2 = 1 + \frac{1-b}{1+b} [1 - b^{2(N-1)}] + b^{2N-2} = \frac{2}{1+b} [1 + b^{2N-1}]$$

et dès que N dépasse quelques unités :

$$(26) \quad 1 + \sum_{i=1}^N a_i^2 \approx 1 + \frac{1-b}{2} + \frac{1}{4N-3}$$

c'est-à-dire que le bruit n'est pratiquement plus amplifié dès que quelques zéros sont disponibles.

4. 2. SINUSOÏDE BRUITÉE

Le prédicteur RIF idéal pour une entrée sinusoïdale correspond au filtre à encoche qui s'écrit

$$(27) \quad H_E(z) = \frac{1 - 2 \cos \omega_0 z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2(1-\varepsilon) \cos \omega_0 z^{-1} + (1-\varepsilon)^2 z^{-2}}$$

Un tel filtre possède deux zéros $z_0 = e^{j\omega_0}$ et \bar{z}_0 et deux pôles $(1-\varepsilon)z_0$ et $(1-\varepsilon)\bar{z}_0$. L'amplification qu'il apporte sur le bruit est donnée par la relation (VI-43) dans [6], soit pour ε petit :

$$(28) \quad \|H_E\|^2 \approx \frac{2-3\varepsilon}{2-5\varepsilon} \approx 1 + \varepsilon$$

Une approximation du type $(1-b^N z^{-N}) H_E(z)$ avec un filtre à coefficients réels est possible pour les

valeurs suivantes de ω_0 :

$$(29) \quad \omega_0 = 2K \frac{\pi}{N}; \quad \omega_0 = (2k+1) \frac{\pi}{N}; \quad 0 \leq k \leq N-1$$

Alors les $N-2$ zéros du prédicteur éloignés du cercle unité se répartissent sur un cercle dont le rayon peut encore être estimé par la relation (22). Ainsi la figure 5 montre les zéros théoriques et estimés pour $N=12$ et $\omega_0 = \pi/12$. Pour des valeurs quelconques de ω_0 , l'estimation n'est plus valable, l'amplification du bruit est plus forte et les zéros complémentaires sont moins efficaces, certains se rapprochant de l'origine; dans ce cas, la relation (22) peut être considérée comme donnant le rayon du cercle à l'intérieur duquel se répartissent les zéros éloignés du cercle unité.

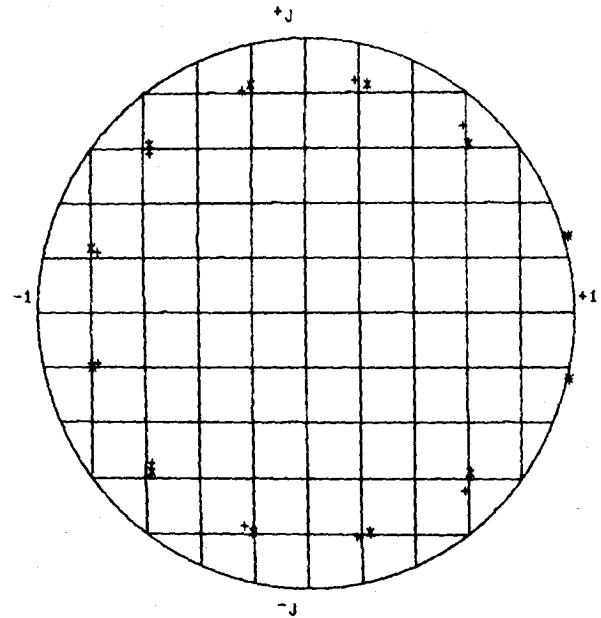


Fig. 5. - Zéros du prédicteur d'ordre 12 appliqué à une sinusoïde bruitée. + valeur calculées; * valeurs estimées.

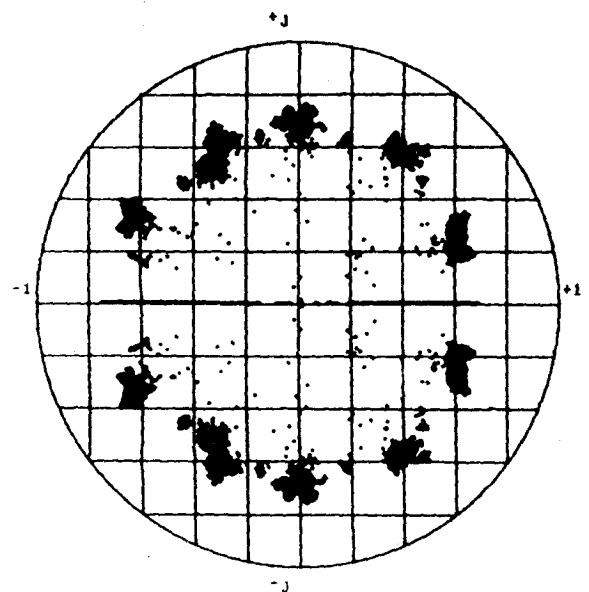


Fig. 6. - Zéros d'un prédicteur RIF appliqué à un bruit seul utilisant l'algorithme du gradient.

Les résultats ci-dessus peuvent encore s'étendre au cas d'un signal constitué d'un nombre de sinusoides supérieur à deux et inférieur à $N/2$.

La couronne définie par la relation (24) ne dépendant pas du rapport signal à bruit, on peut se demander si même en l'absence de signal, c'est-à-dire pour une entrée constituée seulement par du bruit, les zéros du prédictor ne vont pas, dans les applications réelles, se placer dans cette couronne. La figure 6 montre la position des zéros dans ce cas pour un filtre RIF d'ordre 12 de type adaptif et utilisant l'algorithme du gradient; il apparaît que les zéros se répartissent approximativement uniformément sur un cercle.

5. Filtre RII purement récursif

La prédiction linéaire peut également être réalisée par un filtre de type RII. Le premier ordre correspond à la fonction :

$$(30) \quad H(z) = \frac{1}{1-bz^{-1}}$$

Quand un signal continu bruité est appliqué à ce filtre, l'erreur de prédiction a pour puissance :

$$(31) \quad E[e^2(n)] = \left(\frac{1}{1-b}\right)^2 + P_B \frac{1}{1-b^2}$$

Elle se trouve minimisée pour la valeur suivante du coefficient :

$$(32) \quad b = -1 + \frac{\sqrt{P_B(P_B+8)} - 3P_B}{2(1-P_B)}$$

si $P_B \neq 1$; pour $P_B = 1$, il vient : $b = -1/3$.

Le cas du filtre purement récursif d'ordre N correspond à la fonction de transfert :

$$(33) \quad H(z) = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^N b_i z^{-i}}$$

Avec un signal continu bruité un tel filtre devrait approcher la fonction la plus simple c'est-à-dire : $1-az^{-1}$. Ce qu'il peut réaliser c'est l'approximation suivante :

$$(34) \quad H(z) = \frac{1}{1-a^{N+1}z^{-(N+1)}}(1-az^{-1}) = \frac{1}{1+az^{-1}+\dots+a^N z^{-N}}$$

Alors :

$$(35) \quad E[e(n^2)] = |H(1)|^2 + P_B \left(\sum_{i=0}^{\infty} h_i^2 \right)$$

où h_i est un élément de la réponse impulsionnelle du filtre. Une évaluation de la sommation peut être faite en considérant que le bruit blanc qui est appliqué à un système de fonction de transfert $1/1-a^N z^{-N}$ reste à spectre plat et subit seulement une amplification par $1/1-a^{2N}$. Dans ces conditions, il vient :

$$(36) \quad E[e^2(n)] = \left(\frac{1-a}{1-a^{N+1}}\right)^2 + P_B \left(\frac{1+a^2}{1-a^{2(N+1)}}\right)$$

Cette expression montre que le gain de prédiction est limité. En effet, les conditions de stabilité du filtre imposent que les pôles restent à l'intérieur du cercle unité, c'est-à-dire $|a| < 1$; alors la limite inférieure de la puissance de l'erreur de prédiction, atteinte quand le bruit s'annule, est donné par :

$$(37) \quad E_{\min} = \frac{1}{(N+1)^2}$$

Pour une puissance de bruit P_B donnée, la valeur de a est obtenue en dérivant la fonction (36). Soit :

$$E[e^2(n)] = f(a) + P_B g(a)$$

Il vient :

$$(38) \quad f'(a) = -2 \frac{1+2a+3a^2+\dots+Na^{N-1}}{(1+a+\dots+a^N)^3}$$

Pour les faibles puissances de bruit la valeur de a s'approche de l'unité et l'on peut écrire :

$$f'(a) \approx f'(1) = -\frac{N}{(N+1)^2} \approx -\frac{1}{N+1}$$

Dans les mêmes conditions :

$$g(a) \approx \frac{1}{(N+1)(1-a)}; \quad g'(a) = \frac{1}{N+1} \frac{1}{(1-a)^2}$$

La valeur de a est alors donnée par :

$$(39) \quad a = 1 - P_B^{1/2}$$

Pour les valeurs importantes de P_B au contraire a doit tendre vers zéro. Il vient :

$$f'(a) \approx -2(1-a); \quad g'(a) \approx 2a$$

et dans ces conditions :

$$(40) \quad a = \frac{1}{1+P_B}$$

Finalement il apparaît que pour le prédictor RII la distance des pôles à l'origine est liée à la puissance du bruit ce qui est une différence notable avec le type RIF. Il en est de même du facteur amplificateur du bruit qui lorsque (40) s'applique devient :

$$(41) \quad \frac{1+a^2}{1-a^{2(N+1)}} \approx \left[1 + \frac{1}{(1+P_B)^2} \right] \left[1 + \frac{1}{(1+P_B)^{2N+2}} \right]$$

relation qui est à rapprocher de l'estimation (26).

Les résultats obtenus avec un signal continu s'étendent aux signaux sinusoidaux bruités. Pour une sinusoïde à la fréquence ω_0 c'est une fonction du type :

$$F(z) = 1 - 2a \cos \omega_0 z^{-1} + a^2 z^{-2}$$

qu'il faut approcher. Ainsi pour les valeurs suivantes de ω_0 :

$$(42) \quad \omega_0 = 2k \frac{\pi}{N+2}; \quad \omega_0 = (2k + 1) \frac{\pi}{N+2}; \quad 1 \leq k \leq N+1$$

l'approximation suivante peut être réalisée :

$$(43) \quad H(z) = \frac{1 - 2a \cos \omega_0 z^{-1} + a^2 z^{-2}}{1 - a^{N+2} z^{-(N+2)}}$$

avec un prédicteur RII dont les N pôles se répartissent sur un cercle de rayon a . La figure 7 montre les pôles obtenus à chaque itération par une technique adaptative selon l'équation (7) pour $N=6$, $\omega_0 = 2\pi/3$ et $P_B = 0,1$. On remarque l'absence de pôle à la fréquence de la sinusoïde, la prédiction se faisant en quelque sorte par défaut. Évidemment la prédiction par présence d'un singularité doit être plus efficace; c'est ce qu'ont montré les résultats précédents. En fait les prédicteurs de type purement récursif sont rarement employés seuls; ils servent plutôt de compléments aux prédicteurs RIF, notamment dans le cas de signaux sinusoidaux bruités pour réaliser les filtres « à encoche » nécessaires. Dans le cas général, le prédicteur RIF/RII correspond au filtre à phase minimale qui donne la meilleure approximation, avec les paramètres disponibles, de l'inverse du spectre du signal.

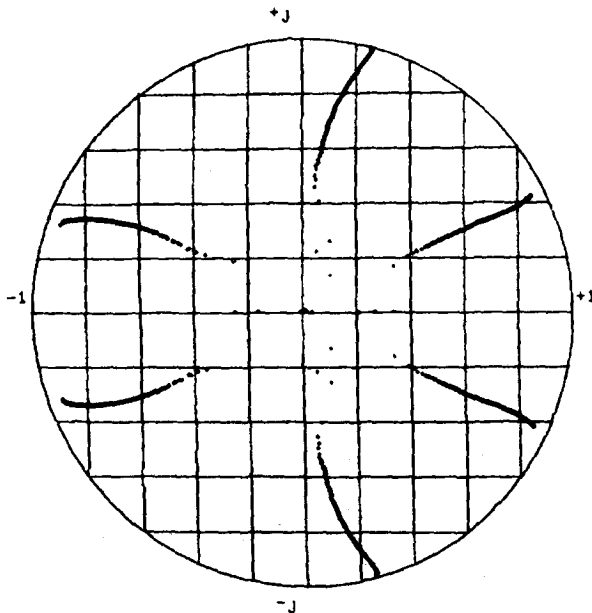


Fig. 7. - Trajectoire des pôles d'un prédicteur RII appliqué à une sinusoïde bruitée utilisant l'algorithme du gradient.

6. Détection de signalisations téléphoniques

Les résultats de la prédiction s'appliquent à la détection des signaux de signalisation dans une voie téléphonique. Ces signaux sont utilisés dans le réseau pour transmettre les informations relatives à l'établissement, au maintien et à la tarification des communications. Ils sont constitués par deux fréquences prises parmi huit possibles, suivant un code normalisé [7]. Le récepteur de signalisation doit reconnaître la présence des sinusoïdes au milieu de signaux perturbateurs et donner le code correspondant. Cette fonction peut être réalisée par un prédicteur de type RIF dont l'ordre N doit être au moins égal à 4.

Soit le signal $x(n)$ suivant :

$$(44) \quad x(n) = A_1 \sin(n\omega_1) + A_2 \sin(n\omega_2) + b(n)$$

constitué de deux sinusoïdes d'amplitude A_1 et A_2 auxquelles s'ajoute un bruit blanc de puissance P_B . Le prédicteur RIF d'ordre 4 a pour fonction de transfert :

$$(45) \quad H(z) = 1 - \sum_{i=1}^4 a_i z^{-i} = (1 - a_{11} z^{-1} - a_{21} z^{-2})(1 - a_{21} z^{-1} - a_{22} z^{-2})$$

L'erreur de prédiction s'écrit :

$$(46) \quad E[e^2(n)] = |H(\omega_1)|^2 + |H(\omega_2)|^2 + P_B \left(1 + \sum_{i=1}^4 a_i^2 \right)$$

La détermination des coefficients du prédicteur à partir de cette expression nécessite des calculs compliqués. La figure 8 représente l'évolution des zéros de ce prédicteur en fonction de la puissance de bruit. En rapprochant cette figure de la figure 3 on observe que

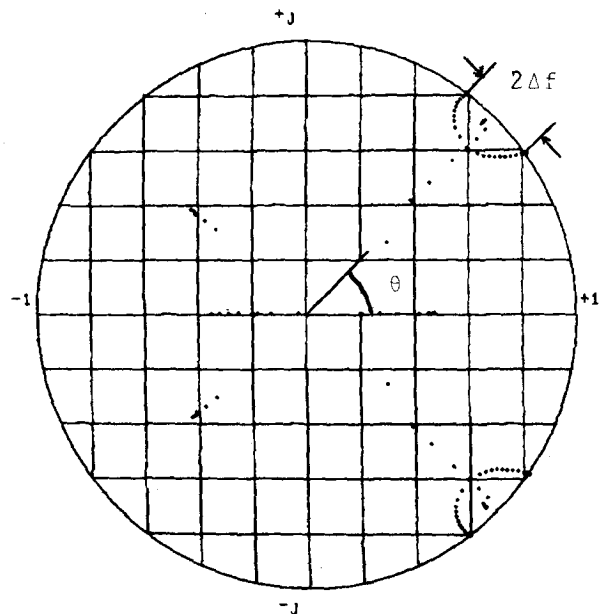


Fig. 8. - Évolution des zéros d'un prédicteur d'ordre 4 appliqué à deux sinusoïdes proches en fonction du bruit.

P_{BL} (dB)

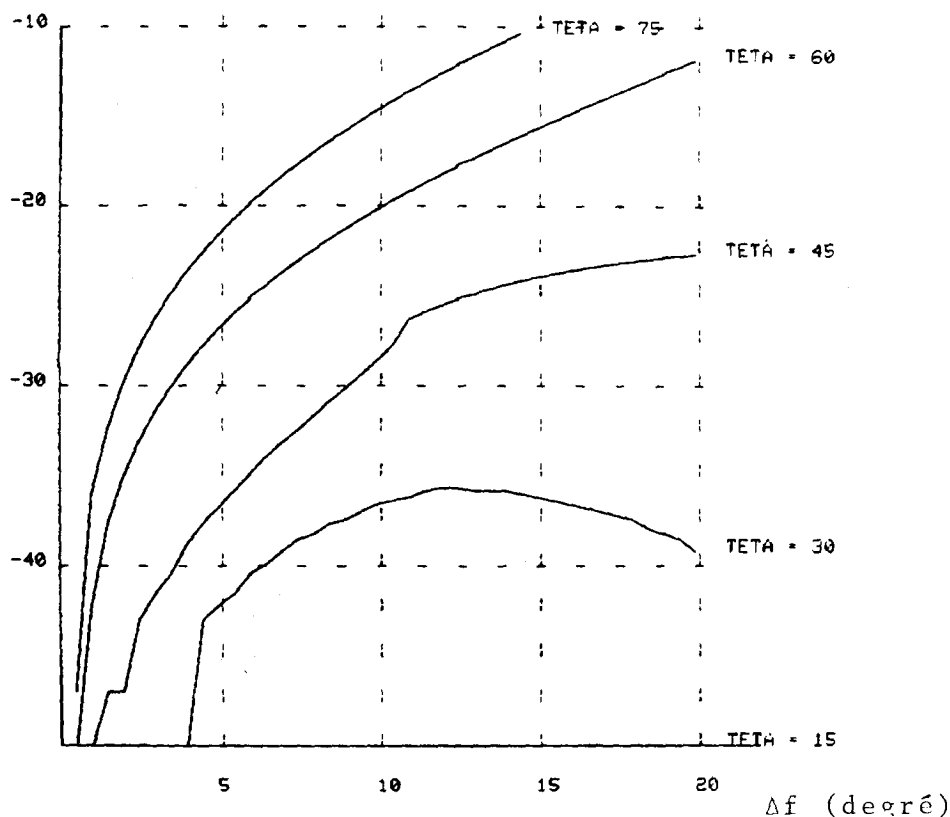


Fig. 9. — Variation de la puissance limite de bruit en fonction de l'écart de fréquence (N=4).

l'évolution des zéros dans le cas des deux sinusoides est semblable à celle correspondant à une sinusoïde. Quand le bruit décroît les zéros se rapprochent du cercle unité et pour une puissance de bruit limite P_{BL} ils se séparent pour atteindre ensuite les points convenables du cercle unité. L'étude de cette puissance limite de bruit P_{BL} est intéressante car elle donne la limite de discrimination des deux fréquences. La figure 9 donne la variation de P_{BL} en fonction de l'écart $2\Delta f$ entre les fréquences pour différentes positions de ces fréquences sur le cercle unité. On remarque que pour Δf fixé, P_{BL} est d'autant plus faible que l'angle θ est faible.

Les fréquences utilisées en signalisation téléphonique sont les suivantes :

BF (Hz)	697	770	852	941
HF (Hz)	1209	1336	1477	1633

avec une fréquence d'échantillonnage égale à 8000 Hz.

D'où

$$\begin{aligned} \theta_{\min} &= 42,885^\circ \rightarrow \Delta f \approx 11^\circ \\ \theta_{\max} &= 57,9^\circ \rightarrow \Delta f \approx 14^\circ \\ \Delta f_{\min} &= 6^\circ \rightarrow \theta = 48,375^\circ \\ \Delta f_{\max} &= 21^\circ \rightarrow \theta = 52,425^\circ \end{aligned}$$

Les situations les plus remarquables pour la détection sont celles qui correspondent aux valeurs minimales et maximales de θ et de Δf . Les quatre courbes donnant P_{BL} en fonction de Δf correspondantes sont données par la figure 10 sur laquelle on a placé les quatre points de fonctionnement du détecteur de signalisation. Il apparaît alors que la détection nécessite une puissance de bruit inférieure à -33 dB, ce qui correspond à un rapport signal à bruit qui peut ne pas être atteint dans une voie téléphonique. Alors il est nécessaire d'augmenter le nombre de coefficients du prédictor. La figure 11 donne les variations de P_{BL} en fonction de Δf pour quatre et six coefficients. Dans le cas de six coefficients la puissance de bruit limite pour la détection se trouve ramenée à 15 dB, ce qui correspond à un rapport signal à bruit toujours dépassé en téléphonie. Il apparaît ainsi qu'un prédic-

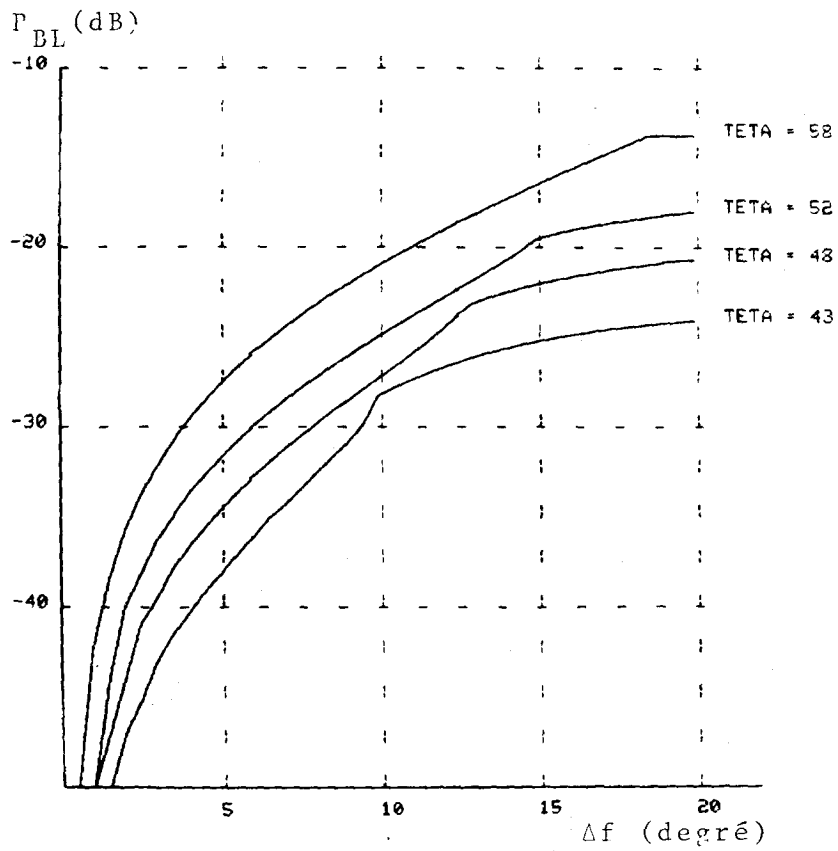


Fig. 10. — Variations de P_{BL} en fonction de Δf pour quatre cas remarquables de détection de signalisation ($N=4$).

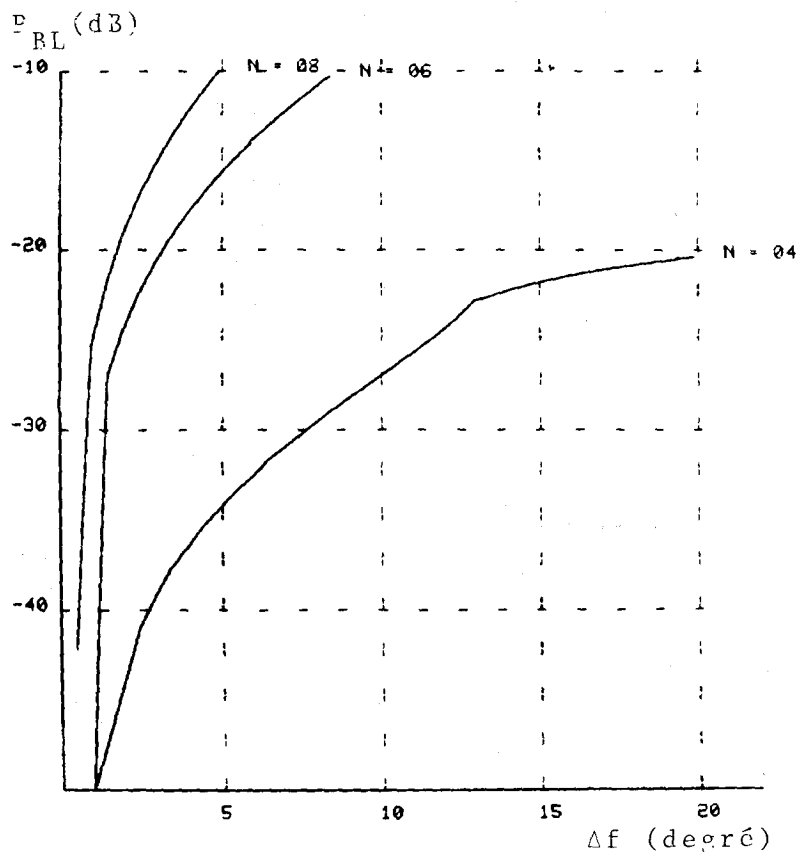


Fig. 11. — Comparaison des variations de P_{BL} en fonction de Δf pour différents nombres de coefficients du prédicteur ($\theta = 48,375$).

teur d'ordre 6 doit en principe permettre la détection des signalisations.

7. Conclusion

L'étude de la position des pôles et des zéros des prédicteurs numériques dans le plan complexe conduit à des résultats simples et facilement utilisables pour le cas de signaux sinusoidaux dans du bruit.

Pour le prédicteur du second ordre les positions des zéros sont définies analytiquement en fonction du bruit. Pour des prédicteurs d'ordre plus élevé des domaines ont été délimités.

L'approche utilisée, séparant dans l'erreur de prédiction la contribution du résidu de signal et le bruit amplifié, a permis de donner une interprétation physique simple qui s'étend à l'évaluation des positions des pôles et zéros d'un prédicteur quelconque.

Une application des résultats obtenus peut être la détection des signalisations dans les voies téléphoniques. Pour ce cas il reste à déterminer un algorithme d'adaptation suffisamment rapide qui permette la mise en œuvre de la prédiction avec une rapidité compatible avec les spécifications habituelles des récepteurs de signalisation du réseau. Il semble que cet objectif puisse être atteint avec un algorithme de

moindres carrés rapides. Les travaux correspondants sont en cours.

Manuscrit reçu le 2 décembre 1985.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. MAKHOUL, Linear prediction: a tutorial review, *Proceedings IEEE*, 63, n° 4, April 1975.
- [2] S. M. KAY, The effects of noise on the autoregressive spectral estimator, *IEEE Transactions, ASSP-27*, n° 5, October 1979.
- [3] D. W. TUFTS et R. KUMARESAN, Estimation of frequencies of multiple sinusoids: making linear prediction perform like maximum likelihood, *Proceedings IEEE*, 70, n° 9, September 1982.
- [4] J. L. LACOUME, C. HANNA et J. L. NICOLAS, Étalonnage de l'analyse spectrale par la méthode du modèle autorégressif, *Ann. Telecommunications*, n° 11-12, April 1981.
- [5] J. L. LACOUME, M. GHARBI, C. LATOMBE et J. L. NICOLAS, Close frequency resolution by maximum entropy spectral estimators, *IEEE Transactions, ASSP-32*, n° 5, October 1984.
- [6] M. BELLANGER, chap. XI, *Filtrage adaptatif dans Traitement numérique du signal*, Masson, Paris, 2^e édition, 1984.
- [7] CCITT, *Spécifications des systèmes de signalisation*, IV-2, Genève, 1981.