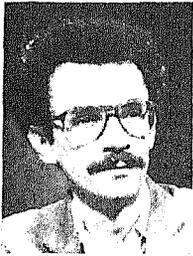


# Propagation des ondes dans les composites élastiques fissurés

Wave motion in elastic cracked composites



Olivier COUSSY

Laboratoire des Ponts et Chaussées, 58, boulevard Lefebvre, 75732 PARIS  
CEDEX 15

Olivier COUSSY est ingénieur de recherches au Service de Mécanique du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées depuis 1979. Ses recherches ont principalement porté sur la dynamique des structures et la propagation des ondes dans les milieux hétérogènes. Il a déterminé théoriquement l'influence d'irrégularités aléatoires de la chaussée sur la réponse dynamique d'un ouvrage d'art soumis à un trafic. Dans le domaine des ultrasons, il a étudié l'effet des fissures sur l'atténuation des ondes dans les milieux composites (béton, béton armé...) Il travaille actuellement sur l'acoustique des milieux poreux et milieux biphasiques dissipatifs.

## RÉSUMÉ

On étudie la diffraction des ondes élastiques par des composites fibrés fissurés aux interfaces. Dans l'approximation des ondes longues, par une méthode de perturbation, on détermine analytiquement la section efficace pour une fibre isolée, partiellement désolidarisée de la matrice. Par une technique d'homogénéisation, on étend l'analyse à des distributions aléatoires d'inclusions et de fissures. On montre alors que le matériau composite fissuré se comporte comme un matériau viscoélastique anisotrope.

## MOTS CLÉS

Diffraction, ondes élastiques, composite fibré, fissures, interfaces.

## SUMMARY

*We study the scattering of elastic waves by fiber reinforced composites with interface cracks. In the long wave approximation, by means of a perturbation method, we derived in a closed form the scattering section for an isolated fiber, partially debonded from the matrix. Using a homogenization procedure we extend the analysis to random distributions of inclusions and cracks. We show that the cracked composite behaves like an anisotropic viscoelastic material.*

## KEY WORDS

*Scattering, elastic waves, fiber reinforced composite, cracks, interface.*

TABLE DES MATIÈRES

1. Diffraction des ondes par une fibre isolée partiellement désolidarisée de sa matrice
  2. Propagation des ondes dans des composites fibrés présentant des fissures d'interface
    - 2.1. Technique d'homogénéisation
    - 2.2. Propagation des ondes
  3. Conclusion
- Bibliographie

1. Diffraction des ondes par une fibre isolée partiellement désolidarisée de sa matrice

Considérons une fibre élastique isotrope  $R_2$  (axe  $Ox_3$ , rayon  $a$ , composantes du tenseur d'élasticité  $C_{ijkl}^2$ , masse volumique  $\rho_2$ ) insérée dans une matrice infinie élastique isotrope

$$R_1(C_{ijkl}^1 = C_{ijkl}^2 - \Delta C_{ijkl}, \rho_1 = \rho_2 - \Delta\rho).$$

La surface de l'inclusion est composée de deux parties: une partie  $L$ , parfaitement solidaire de la matrice (continuité des déplacements et du vecteur contrainte) et une partie  $L^-$  désolidarisée de la partie en regard  $L^+$ , appartenant à la matrice (nullité du vecteur contrainte). Le problème est alors de déterminer les composantes du champ de déplacement  $u_m$  pour une onde incidente plane harmonique (pulsation  $\omega$ ) de type P, S ou SH, définie par :

$$(1) \begin{cases} u_j^\infty(x, t) = u_j^\infty(x) e^{-i\omega t}; \\ u_j(x) = U_j^\infty e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}}; \\ S, P, j=1, 2; \quad SH, j=3 \end{cases}$$

où  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{k}_1$  sont le vecteur position ( $\mathbf{x} = (x \cos \Psi, x \sin \Psi, 0)$ ) et le vecteur d'onde ( $\mathbf{k}_1 = (k_1 \cos \Phi, k_1 \sin \Phi, 0)$ ) (fig. 1). Utilisant des méthodes classiques [1] de perturbation, on peut alors montrer que le champ de déplacement résultant est la somme du champ incident (1) et d'un champ de déplacement diffracté  $u_m^d(x') e^{-i\omega t}$  avec :

$$(2) \quad u_m^d(x') = C_{ijkl}^1 \int_{L^+} (g_{im, l} u_l^+ - u_l^-) - g_{im} u_{k, l}^- n_j^+ dl^+ + \int_{R_2} \Delta\rho \omega^2 u_i g_{im} dR_2 - \int_{R_2} \Delta C_{ijkl} g_{im, j} u_{k, l} dR_2,$$

où  $g_{im}$  représente une fonction de Green relative à la matrice. Dans l'approximation des ondes longues

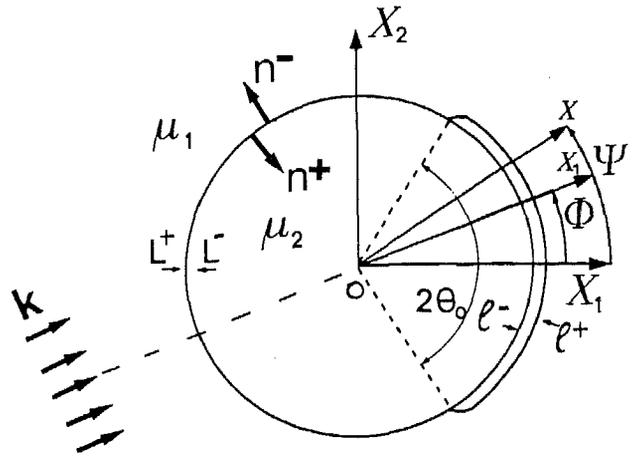


Fig. 1. — La fibre isolée.

( $k_1 a \ll 1$ ), le champ excitant est linéaire dans le voisinage de la fibre et (2) peut être approximé par [2] :

$$(3) \quad u_m^d(x') = \Delta\rho\omega^2 \int_{R_2} U_i^\infty g_{im} dR_2 - C_{ijkl}^1 \int_{L^+} v_i^+ g_{km, l} n_j^+ dl^+ - \int_L (g_{im} v_{k, l}^+ - v_i^+ g_{km, l}) n_j^+ dL,$$

où  $v_i$  est la solution d'un problème statique associé défini par le déplacement à l'infini linéaire  $u_m^\infty(x') = U_m^\infty i k_1 \cdot x'$ . Pour une onde incidente plane SH, cette solution statique peut être déterminée par la méthode des potentiels complexes [3]. Reportant cette solution dans (3) et prenant pour  $g_{33}$  son expression asymptotique, on obtient l'expression du champ lointain diffracté dans la direction  $\mathbf{x}$  sous la forme :

$$(4) \quad \begin{cases} u_3^d = U_3^\infty (i/2) (2\pi x)^{-1/2} \times e^{-i\pi/4} k_1^{3/2} e^{ik_1 \cdot \mathbf{x}} S(\Psi), \\ S(\Psi) = (\rho_2/\rho_1 - 1) + (\mu_1 + \mu_2)^{-1} \times (2 \cos(\Psi - \Phi) (\mu_1 - \mu_2 \cos \theta_0) + \mu_2 \sin^2 \theta_0 \cos(\Psi + \Phi)), \end{cases}$$

où  $\mu_i$  est le module de cisaillement et  $2\theta_0$  est l'angle d'ouverture de la fissure (fig. 1). A partir de (4) on détermine aisément la section efficace  $S_{sc}$ , qui est l'intégrale de 0 à  $2\pi$  de la section efficace différentielle  $\gamma(\theta = \Psi - \Phi)$ , rapport de la puissance moyenne sur une période diffractée dans la direction  $\mathbf{x}$  et de la puissance moyenne incidente par unité de surface :

$$(5) \quad \begin{cases} S_{sc} = k_1 (\alpha_1 \cos^2 \Phi + \alpha_2 \sin^2 \Phi), \\ \alpha_1 - \alpha_2 = \frac{\pi^2 k_1^2 a^4}{(\mu_1 + \mu_2)^2} \mu_2 \sin^2 \theta_0 (\mu_1 - \mu_2 \cos \theta_0), \\ \alpha_1 = \frac{\pi^2 k^2 a^4}{8} (2(\Delta\rho/\rho_1)^2 + \{ [2(\mu_1 - \mu_2 \cos \theta_0) + \mu_2 \sin^2 \theta_0] / (\mu_1 + \mu_2) \}^2). \end{cases}$$

La valeur  $\theta_0 = 0$  reportée dans (5) donne bien le résultat classique correspondant à l'inclusion parfaitement solidaire de la matrice [4]. La figure 2 représente les variations de la section efficace normalisée en fonction du demi angle d'ouverture  $\theta_0$  de la fissure pour différents matériaux; inclusion-matrice: I acier-béton ( $\mu_2/\mu_1 = 4,8$ ), II aluminium-acier ( $\mu_2/\mu_1 = 0,38$ ), III époxy-verre ( $\mu_2/\mu_1 = 18,8$ ). Quand l'inclusion est moins rigide que la matrice (II), la section efficace est une fonction monotone croissante de  $\theta_0$ . Quand l'inclusion est plus rigide (I, III), il y a un minimum inférieur à 1. L'explication physique est que, dans l'approximation des ondes longues, l'onde incidente voit l'inclusion et la fissure comme un tout, la fissure assouplissant localement le composite. Ainsi, si l'inclusion est moins rigide que la matrice, la fissure ne fait que renforcer ce caractère de moindre rigidité par rapport à la matrice et la puissance diffractée augmente lorsque la fissure s'étend progressivement le long de l'interface. Si maintenant l'inclusion est plus rigide que la matrice, la fissure en s'étendant le long de l'interface, atténue ce caractère de plus forte rigidité et la puissance diffractée commence par diminuer. Lorsque la fissure atteint une longueur suffisante, c'est l'assouplissement local qu'elle induit qui l'emporte et la puissance diffractée augmente à nouveau. Les résultats similaires peuvent être obtenus pour des ondes P et S incidentes [2].

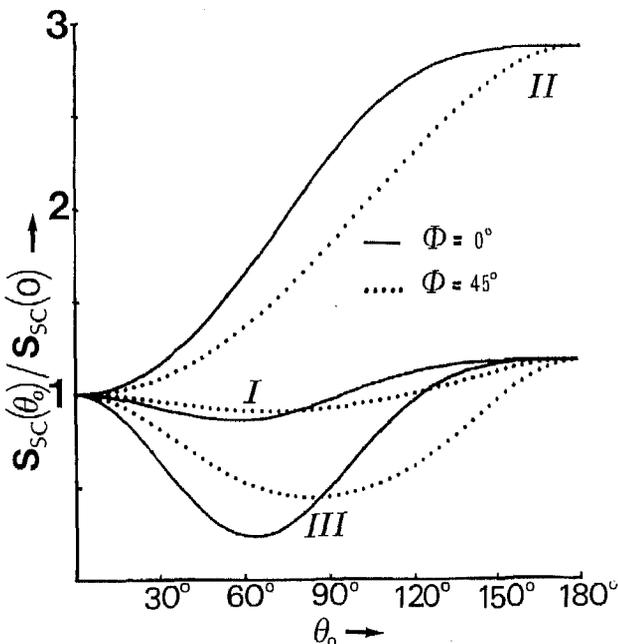


Fig. 2. - Section efficace normalisée fonction de  $\theta_0$ .

## 2. Propagation des ondes dans des composites fibrés présentant des fissures d'interface

Considérons une onde harmonique se propageant dans un milieu élastique isotrope de référence ( $\mu_0, l_0$ ,

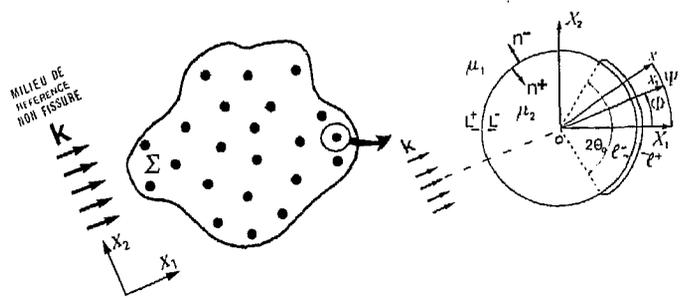


Fig. 3. - Propagation en milieu composite fissuré.

$k_0$ ), incidente sur une région  $\Sigma$ , constituée des fibres partiellement désolidarisées de la matrice (fig. 3). Par la suite nous restreindrons notre attention à des ondes SH incidentes et noterons  $f_{3 i 3 j} = f_{ij} \dots$

### 2. 1. TECHNIQUE D'HOMOGÉNÉISATION

Considérons une grande région  $S (\pi a^2/S \ll 1)$  constituée par une inclusion, sa fissure d'interface et une partie de la matrice avoisinante. En suivant Eshelby [5], le composite réel dans la région  $S$  peut être remplacé par un matériau homogène fictif équivalent si, pour un chargement quelconque  $\sigma_i^\infty v_i$  agissant sur la frontière  $S$  de normale  $v$ , le champ de contraintes induit  $\sigma_i$  satisfait:

$$(6) \quad \frac{1}{2} \int_S S_{ij}^n \sigma_i \sigma_j dS = \frac{1}{2} (S_{ij}^1 + \Delta S_{ij}) \sigma_i^\infty \sigma_j^\infty,$$

où  $S_{ij}^n = (C_{ij}^n)^{-1}$  est le tenseur de souplesse. Si (6) est vérifié,  $S_{ij}^1 + \Delta S_{ij}$  sera le tenseur de souplesse recherché du matériau fictif équivalent, puisqu'alors les matériaux réels et fictifs emmagasineront la même énergie élastique pour les mêmes chargements  $\sigma_i^\infty v_i$  agissant sur leurs frontières. En langage imagé, on peut dire que la forte perturbation engendrée par l'inclusion et sa fissure aura été fictivement répartie sur  $S$ . De fait on peut montrer que (6) est vrai [6] et que, dans un système de référence où l'axe  $ox_1$  est orienté suivant le vecteur d'onde incident, on a:

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta C^{11}/\mu_1 &= \frac{2\pi a^2}{S(\mu_1 + \mu_2)} \\ &\left[ \mu_2 - \mu_1 - \mu_2 \left( 1 - \cos \theta_0 + \frac{1}{2} \sin^2 \theta_0 \cos 2\Phi \right) \right], \\ \Delta C^{22}/\mu_1 &= \frac{2\pi a^2}{S(\mu_1 + \mu_2)} \left[ \mu_2 - \mu_1 \right. \\ &\left. - \mu_2 \left( 1 - \cos \theta_0 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta_0 \cos 2\Phi \right) \right], \quad \frac{\pi a^2}{S} \ll 1 \\ \Delta C^{12}/\mu_1 &= \Delta C^{21}/\mu_1 = \frac{\pi a^2}{S(\mu_1 + \mu_2)} \mu_2 \sin^2 \theta_0 \sin 2\Phi. \end{aligned} \right.$$

Pour  $\theta_0 = 0$ , le matériau équivalent est isotrope et (7) est en accord avec les résultats déjà connus [7]. Les

expressions (6) montrent que la fissure induit une anisotropie ayant l'axe de symétrie de la fissure et l'axe qui lui est orthogonal pour axes principaux. Par rapport à notre problème initial (fig. 3), l'utilisation des expressions (6) suppose les champs incidents spatialement linéaires dans la région S et est donc restreinte à l'approximation des ondes longues vis-à-vis des cibles réelles (i.e. les fibres). Toutefois, par rapport aux cibles fictives constituées par chaque région S remplie par le matériau équivalent, cette approximation correspond alors à une approximation de Born puisque, la perturbation ayant été répartie sur une grande région S,  $\pi a^2/S \ll 1$  entraîne que  $\Delta C_{ij}/\mu_1 \ll 1$  dans (6). Rappelons que l'approximation de Born consiste à remplacer dans les termes sources des équations intégrales le champ inconnu régnant dans la cible (ici fictive) par le champ incident, ceci du fait d'un faible contraste entre les caractéristiques de la cible (ici fictive) et celles du milieu avoisinant ( $\Delta C_{ij}/\mu_1 \ll 1$ ). En outre, les expressions (6) suppose l'absence d'interactions statiques d'une fibre à l'autre. Si  $s$  est la concentration d'inclusions cela revient à considérer que les régions S des fibres avoisinantes sont au plus adjacentes ou légèrement recouvrantes:  $s < 0,2$ .

## 2.2. PROPAGATION DES ONDES

### 2.2.1. Milieu infini

Dans le cas des faibles concentrations ( $s < 10^{-2}$ ), chaque inclusion est vue comme une individualité et il suffit d'additionner les sections efficaces de chaque inclusion pour obtenir l'expression de la perte d'énergie de l'onde directe due aux diffractions élémentaires. Pour des concentrations plus importantes ( $s > 10^{-2}$ ) mais restant faibles ( $s < 10^{-1}$ ), le milieu composite est « vu » par l'onde directe comme un milieu homogène, pour ce qui est de la vitesse de l'onde. On peut alors substituer au milieu composite réel, un milieu élastique décrit par les constantes élastiques  $\mu_1 + \Delta C_{ij} = C_{ij}$ , les expressions de  $\Delta C_{ij}$  étant données par (7), où l'on aura substitué à  $\pi a^2/S$  la concentration  $s$  que l'on supposera faiblement fluctuante, ainsi que les paramètres de fissuration  $\theta_0$  et  $\Phi$ . On en déduit alors la vitesse dans la direction du vecteur d'onde:

$$(8) \quad v = \left( \frac{\mu_1}{\rho_1} \right)^{1/2} \left( 1 - \frac{1}{2} s \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} + \frac{s}{\mu_1 + \mu_2} \left( \mu_2 - \mu_1 \right) - \mu_2 \left( 1 - \theta_0 + \frac{1}{2} \sin^2 \theta_0 \cos 2\Phi \right) \right)$$

Notons alors que cette vitesse aurait pu être obtenue en utilisant les résultats de Waterman et Truell [8] déduits d'une analyse directe des effets de diffraction multiple et de l'amplitude diffractée en avant S( $\Psi$ ) donnée par (4). Les variations de la figure 4 représentent les variations de  $v$  ( $\Phi=0$ ,  $\theta_0$ ) ou encore celles des pulsations propres  $\omega_j$  d'une poutre s'étendant dans la direction de l'axe moyen de symétrie des fissures, normalisées au cas sans fissure.

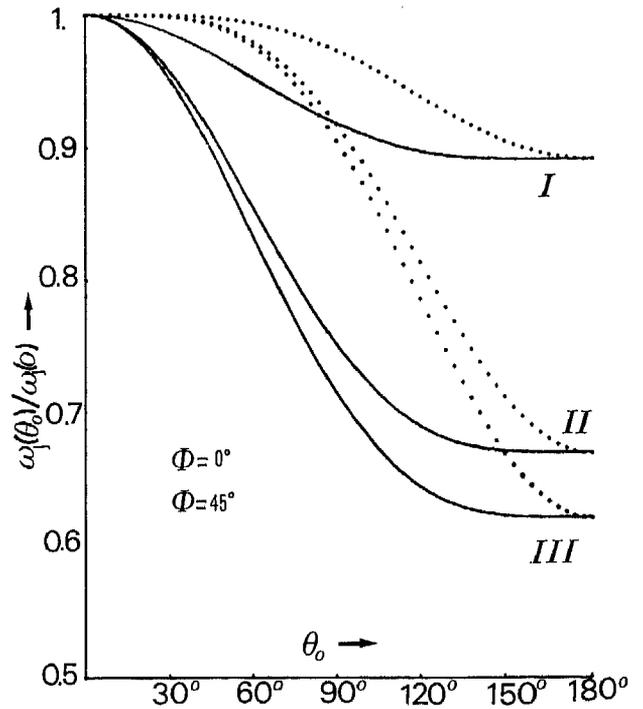


Fig. 4. - Vitesse normalisée fonction de  $\theta_0$  ( $s=0,2$ ).

Dans le cas des faibles concentrations, le théorème d'addition des sections efficaces donne immédiatement l'atténuation des ondes en fonction de la section efficace (5), en suivant l'analyse de Moon et Mow [9]. On trouve ainsi que le champ de déplacement moyen vérifiera :

$$(9) \quad \begin{cases} u = U^\infty e^{-\alpha x_1} e^{i(\omega/v) x_1}; \\ \alpha = \frac{1}{2} \frac{s}{\pi a^2} S_{sc}. \end{cases}$$

La loi de comportement viscoélastique linéaire peut être représentée par le produit de convolution :

$$(10a) \quad \sigma_{31}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_{ij}(t-\tau) \frac{\partial u}{\partial x_j}(\tau) d\tau.$$

Pour un matériau viscoélastique linéaire, si  $C_{ij}(\omega)$  est la transformée de Fourier de  $C_{ij}(t)$ , on peut alors montrer à partir de (10a) que la partie réelle de  $C_{ij}(\omega)$  est donnée par  $\rho v^2$  ( $\rho$  masse volumique) tandis que sa partie imaginaire vaut  $2\rho v^3 \alpha/\omega$ . L'expression (5) de  $S_{sc}$  et l'expression (8) de la vitesse  $v$  permettent alors par (9) de montrer que le composite fibré fissuré se comporte macroscopiquement comme un milieu viscoélastique linéaire anisotrope tel que :

$$(10b) \quad C_{ij}(\omega) = C_{ij} + \frac{is}{\pi a^2} \mu_1 A_{ij}(\omega),$$

où, dans un système d'axes ayant pour axe  $ox_1$  l'axe moyen de symétrie des fissures,  $A_{ij}(\omega)$  est donné par :

$$(10c) \quad A_{ij}(\omega) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix},$$

$\alpha_1$  et  $\alpha_2$  étant donnés par (5).

### 2.2.2. Diffraction par une région fissurée

Retournons alors au problème de la figure 3, pour lequel le milieu de référence est supposé être le composite non fissuré ( $\mu_0 = \mu_1 + \Delta C_{ij}(\theta_0 = 0)$ ,  $\rho_0 = \rho_1(1-s) + \rho_2 s$ ,  $k_0 = \omega/v(\theta_0 = 0)$ ).

Utilisant alors une méthode de perturbation telle que celle développée dans le paragraphe 1, mais à l'échelle macroscopique, et l'approximation de Born utilisable car  $s < 10^{-1}$ , on peut alors montrer que la section efficace différentielle est la somme d'un terme cohérent  $\gamma^{\text{coh}}$ , quantifiant les effets de diffraction multiple moyens différentiels dus au contraste induit par les fissures dans la région  $\Sigma$ , et d'un terme incohérent  $\gamma^{\text{incoh}}$  dus aux interférences entre ondes élémentaires diffractées consécutives aux fluctuations des paramètres de fissuration dans  $\Sigma$ . Pour une région  $\Sigma$  cylindrique de rayon  $R$ , on trouve en particulier :

$$(11) \quad \gamma^{\text{coh}}(\theta = \Psi - \Phi) = \frac{\pi R^2 k_0}{8} \frac{1}{\sin^2 \theta/2} \times \left[ \left( \frac{\Delta C_{11}(\theta_0)}{\mu_0} - 1 \right) \cos \theta + \frac{\Delta C_{12}(\theta_0)}{\mu_0} \sin \theta \right]^2 \times J_1 \left( 2 k_0 R \left| \sin \frac{\theta}{2} \right| \right),$$

où  $J_1$  est la fonction de Bessel du premier ordre. Le terme incohérent peut être déterminé sans difficultés, en adaptant à notre problème particulier les méthodes probabilistes développées dans [10].

### 3. Conclusion

Comme indiqué, la théorie ici développée présente deux limites, une limite en fréquence (approximation des ondes longues) et une limite en concentration ( $s < 10^{-1}$ ). Pour des concentrations et des fréquences plus élevées, la théorie n'est plus valable en raison des effets de diffraction multiple. Ces effets sont analysables *a priori*, soit par des méthodes probabilistes plus sophistiquées [11], soit par des méthodes déterministes [12]. Toutefois, les interactions statiques entre inclusions voisines ont été négligées dans la méthode d'homogénéisation ici utilisée. Ces interactions statiques engendrent des effets du même ordre de grandeur que ceux de diffraction multiple (en  $s^2$  sur la vitesse pour de faibles concentrations). Des commentaires similaires ont été développés dans [13] à propos des expressions de la vitesse des ondes obtenues par une méthode statique d'homogénéisation de type auto-consistante. Ainsi, si l'on veut développer une méthode d'homogénéisation pour de plus grandes concentrations d'inclusions, les interactions statiques et les effets de diffraction multiple doivent être traités conjointement. Notons alors que les méthodes d'homogénéisation fondées sur une hypothèse de distribution périodiques des inclusions, et ici des fissures, si elles donnent de bons renseignements sur les champs moyens statiques même dans le cas aléatoire [14],

seront limitées strictement aux milieux périodiques dans le cas dynamique, car elles introduiraient vis-à-vis du cas aléatoire des effets d'interférences artificiels. Sur le plan théorique, ajoutons encore que, dans le cas des grandes concentrations, la convergence non uniforme des contraintes, due aux conditions mixtes engendrées par les fissures d'interfaces, rend le problème très complexe.

D'un point de vue expérimental, si des structures composites, auscultées dynamiquement, présentent un amortissement primitivement décroissant au cours de tests successifs, cela veut dire, dans le cas de faibles concentrations ( $s < 0,1$ ) et d'inclusions plus rigides que la matrice, que des fissures se sont créées aux interfaces plutôt que dans la matrice. Ceci est dû à l'analyse des variations de la section efficace (cf. fig. 2).

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. E. GUBERNATIS, E. DOMANY et J. A. KRUMHASNL, Formal aspects of the theory of the scattering of ultrasonics by flaws in elastic materials, *J. Appl. Phys.*, 48, 1977, p. 2804-2811.
- [2] O. COUSSY, Scattering of elastic waves by an inclusion with an interface crack, *Wave Motion*, 6, MS 187, 1984, p. 1-14.
- [3] O. TAMATE et T. YAMADA, Stresses in an infinite body with partially bonded circular cylindrical inclusion under longitudinal shear, *Technology Reports, Tohoku Univ.*, 34, n° 1, 1969, p. 161-171.
- [4] A. C. ERINGEN et S. SUHUBI, *Elastodynamics*, Academic Press, 1975.
- [5] J. D. ESHELBY, The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems, *Proceeding of Royal Society*, 241, 1957, p. 376-396.
- [6] O. COUSSY, Diffraction d'une onde transversale anti-plane par un cylindre présentant une fissure d'interface, *C.R. Sc.*, 295, sér. II, 1982, p. 1043-1046.
- [7] Z. HASHIN, Analysis of composite materials, *J. Appl. Mech.*, 50, 1983, p. 381-505.
- [8] P. C. WATERMAN et R. TRUJELL, Multiple scattering of wave, *J. Math. Phys.*, 2, n° 4, 1961, p. 512-538.
- [9] F. C. MOON et C. C. MOW, Wave propagation in a composite material containing dispersed rigid spherical inclusions, *Rand Corporation Report RM 6139 PR*, 1970.
- [10] T. S. CHOW, Scattering of elastic waves in an inhomogeneous solid, *J. Acoust. Soc. Amer.*, 56, 1974, p. 1049-1051.
- [11] J. R. WILLIS, A polarization approach to the scattering of elastic waves, *J. Mech. Phys. Sol.*, 28, 1980, p. 287-326.
- [12] W. M. VISSCHER, A new way to calculate scattering of acoustic and elastic waves. *J. Appl. Phys.*, 51, 1980, p. 825-835.
- [13] A. K. CHATTERJEE, A. K. MAL et L. KNOPOFF, Elastic moduli of two component systems. *J. Geophys. Res.*, 83, 1978, p. 1785-1792.
- [14] P. SUQUET, Plasticité et homogénéisation, *Thèse*, Université Pierre-et-Marie-Curie, Paris-VI, 1982.