

## Diffraction

### d'une onde acoustique plane

### par une sphère élastique

Diffraction of a plane acoustic wave by an elastic layered sphere



Didier HUSSON

Groupe Acoustique Interne et Technique d'Émission, Groupe d'Étude et de Recherche de Détection Sous-Marine, LE BRUSC, 83140 SIX-FOURS

Didier HUSSON est né en 1956 à Surville (France). Il est Ancien Élève de l'École Polytechnique (X 76) et Ingénieur de l'Armement depuis 1979. De 1980 à 1983, il a travaillé sur l'analyse théorique de l'effet acousto-élastique, et sur l'utilisation des ondes acoustiques de volume et de surface à la mesure des contraintes dans les métaux. Il a obtenu les diplômes de Master of Science en 1982, et de Doctor of Philosophy en 1983, à l'Université de Stanford (USA). Il travaille actuellement au GERDSM sur les problèmes posés par l'interaction des ondes acoustiques avec des solides élastiques.

#### RÉSUMÉ

Des résultats du calcul du champ acoustique diffracté par des sphères creuses formées d'une puis de trois couches élastiques liquides ou solides sont présentés sous forme de courbes de la pression acoustique rétrodiffusée à l'infini par ces sphères et de courbes de la pression totale sur leur surface en fonction de la fréquence de l'onde incidente, de cartes de la pression autour des sphères et de leurs déformations à quelques fréquences de résonance particulières.

#### MOTS CLÉS

Diffraction par une sphère, diffraction par un solide multicouche, résonance d'une sphère creuse.

#### SUMMARY

*Numerical results on the diffraction of an acoustic plane wave by hollow aluminium spheres formed of one and three elastic layers are presented. They include plots of the pressure backscattered by the spheres and of the total acoustic pressure on their surface as functions of the frequency of the incident wave, and computer images of the acoustic pressure around the spheres and of their deformations at given resonance frequencies.*

#### KEY WORDS

*Elastic sphere, diffraction by a sphere, diffraction by a layered body.*

**1. Introduction****2. Analyse théorique et programmation****3. Résultats**

- 3.1. Sphère creuse
- 3.2. Sphère multicouche

**4. Conclusion****Bibliographie****1. Introduction**

L'analyse théorique de la diffraction d'une onde acoustique plane par une sphère élastique pleine ou creuse a été étudiée par de nombreux auteurs [1]. Le calcul du champ acoustique diffracté par une sphère formée de plusieurs couches élastiques concentriques repose sur les mêmes techniques : l'onde incidente est décomposée en harmoniques sphériques, les conditions aux limites à chaque interface forment, pour chaque harmonique, un système linéaire d'équations à coefficients complexes.

Nous avons développé un programme FORTRAN qui permet de traiter les cas de sphères formées d'au plus dix couches liquides ou solides, jusqu'à une valeur maximale de  $ka$  de l'ordre de 100 ( $k$  étant le nombre d'onde de l'onde incidente dans le milieu extérieur,  $a$  le rayon extérieur de la sphère). L'atténuation des ondes sonores dans les différentes couches de la sphère est modélisée par l'utilisation de célérités complexes. Les résultats numériques sont présentés sous plusieurs formes : courbes de la pression rétrodiffusée à l'infini et de la pression acoustique totale près de la sphère en fonction de la fréquence de l'onde incidente, cartes de la pression totale au voisinage de la sphère à une fréquence donnée, tracé des déformations induites dans la sphère par l'onde acoustique.

**2. Analyse théorique et programmation**

Considérons une onde acoustique plane harmonique se propageant dans un fluide, incidente sur une sphère multicouche élastique. Le champ acoustique dans le fluide extérieur à la sphère et dans ses couches fluides est entièrement déterminé par la connaissance d'un potentiel scalaire  $\phi$  vérifiant l'équation :

$$(1) \quad \Delta\phi = \frac{1}{c^2} \frac{d^2\phi}{dt^2}$$

et certaines conditions aux limites,  $c$  étant la célérité du fluide. Si la direction d'incidence de l'onde plane est choisie comme axe d'un système de coordonnées

sphériques, une solution générale de l'équation (1) peut s'écrire sous la forme :

$$(2) \quad \phi = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n j_n(kr) + b_n y_n(kr)) P_n(\cos\theta),$$

$j_n$  et  $y_n$  étant les fonctions de Bessel sphériques,  $P_n$  les polynômes de Legendre,  $k$  le nombre d'onde dans le liquide,  $r$  et  $\theta$  les coordonnées sphériques.

Le champ acoustique dans les couches solides de la sphère est déterminé par la connaissance du potentiel scalaire  $\phi$  des ondes longitudinales et du potentiel vecteur  $\Psi$  des ondes transversales dans le solide.  $\phi$  peut être décomposé en une combinaison linéaire décrite par l'équation (2). La symétrie cylindrique du problème permet de réduire le potentiel vecteur  $\Psi$  à une seule de ses composantes, que nous noterons également  $\Psi$  et qui peut être décomposée sous la forme :

$$(3) \quad \Psi = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n j_n(k'r) + d_n y_n(k'r)) \frac{dP_n}{d\theta},$$

$k'$  étant le nombre d'onde des ondes transversales dans le solide.

L'onde plane incidente dans le fluide extérieur est décrite par le potentiel  $\phi_i$ , qui se décompose en harmoniques sphériques sous la forme :

$$\phi_i = \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) i^n j_n(kr) P_n(\cos\theta).$$

Les déplacements et les contraintes acoustiques se calculent facilement à partir des décompositions en harmoniques sphériques des potentiels  $\phi$  et  $\Psi$  dans toutes les couches de la sphère et dans le milieu extérieur. Les coefficients de ces décompositions sont ensuite déterminés en écrivant les conditions aux limites aux différents interfaces (continuité des déplacements normaux et des contraintes normales à une interface liquide-liquide ou liquide-solide, continuité des déplacements et des contraintes normales à une interface solide-solide), la condition d'existence de la solution au centre de la sphère, et en écrivant que l'onde diffractée dans le milieu extérieur est une onde divergente. Grâce à la symétrie physique de la configuration, il est possible d'appliquer les conditions aux limites indépendamment sur chaque harmonique sphérique. Le problème se réduit donc à la résolution d'un nombre infini (en théorie) de systèmes linéaires à coefficients complexes. En fait, la convergence des séries d'harmoniques sphériques est obtenue avec un nombre  $N$  d'harmoniques tel que  $N > 2ka$ ,  $k$  étant le nombre d'onde de l'onde incidente dans le milieu extérieur,  $a$  le rayon extérieur de la sphère.

Nous avons écrit un programme FORTRAN qui, à partir de la géométrie de la sphère, des caractéristiques acoustiques de ses constituants et de la fréquence de l'onde incidente, engendre les systèmes linéaires associés aux conditions aux limites et calcule les coefficients des décompositions des potentiels acoustiques

en harmoniques sphériques. Ce programme permet de traiter les cas de sphères formées d'au plus huit couches concentriques liquides ou solides. Les propriétés absorbantes de certains matériaux peuvent être prises en compte par l'utilisation de célérités complexes. Les polynômes de Legendre sont calculés par récurrence montante, et les fonctions de Bessel sphérique d'argument complexe par récurrence montante ou descendante ou par sommation d'une série, selon les valeurs de l'ordre et de l'argument de la fonction. L'utilisation de nombres réels ou complexes en double précision permet de résoudre le problème jusqu'à des valeurs de  $ka$  de l'ordre de 100,  $k$  étant ici le plus grand nombre d'onde utilisé, correspondant au matériau dont la célérité est la plus faible. La résolution directe des systèmes d'équations linéaires associés à chaque harmonique sphérique permet de calculer non seulement les caractéristiques du champ acoustique diffracté par la sphère dans le milieu extérieur, mais aussi les décompositions des potentiels du champ acoustique dans toutes les couches.

### 3. Résultats

Ce programme a été utilisé pour calculer le champ acoustique diffracté par une sphère creuse en aluminium immergée dans l'eau, pour plusieurs valeurs du rapport  $b/a$  du rayon intérieur de la sphère à son rayon extérieur, puis le champ acoustique diffracté par une sphère creuse formée de trois couches concentriques, deux couches d'aluminium de 4,8 mm d'épaisseur séparées par une couche d'eau de même épaisseur. Le rayon extérieur de ces sphères est égal à

23,9 cm pour que la valeur de  $ka$  dans l'eau soit égale à la fréquence de l'onde incidente en kHz. Le fluide intérieur est supposé parfaitement mou pour simplifier les calculs.

#### 3. 1. SPHÈRE CREUSE

Les figures 1 à 6 présentent quelques résultats obtenus dans le cas d'une onde incidente sur une sphère de rapport  $b/a=0,99$ . Sur la figure 1 est tracée la pression rétrodiffusée à l'infini par la sphère dans la direction de la source de l'onde incidente, en fonction de la fréquence, entre  $ka=0$  et  $ka=100$ , et sur la figure 2 la courbe de la pression acoustique totale sur la surface de la sphère au point  $\theta=0^\circ$ , en fonction de  $ka$  entre 0 et 20. La pression totale est normalisée par la valeur de la pression acoustique de l'onde plane incidente. Deux types de résonances sont nettement visibles. Le premier type, que nous noterons A, apparaît à très basse fréquence, entre  $ka=0$  et  $ka=2$ . Il se caractérise par des pics très aigus dans la courbe de pression totale sur la sphère. La deuxième série (B) est formée de résonances régulièrement espacées d'environ 4 kHz en fréquence, qui existent dans toute la gamme de  $ka$  étudiée. Chacune de ces fréquences de résonance est associée à un mode de vibration de la coque sphérique, et n'apparaît que dans l'un des coefficients du développement en harmoniques sphériques du champ acoustique diffracté par la sphère. Par exemple, le premier pic de la figure 2, à 760 Hz, est dû à une résonance du coefficient d'ordre 2. Cela est mis en évidence dans les figures 3 et 4. La figure 3 est une carte du module de la pression acoustique totale dans une région d'environ 20 cm d'épaisseur autour de la sphère, à la fréquence de 760 Hz, le noir

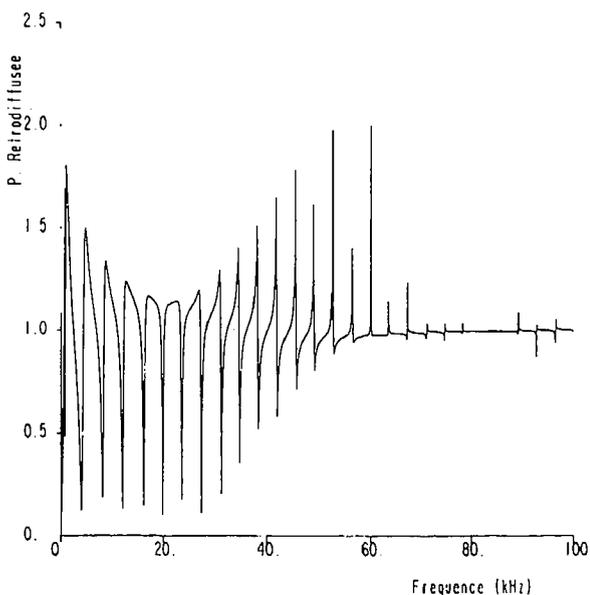


Fig. 1. — Pression rétrodiffusée,  $ka$  entre 0 et 100.

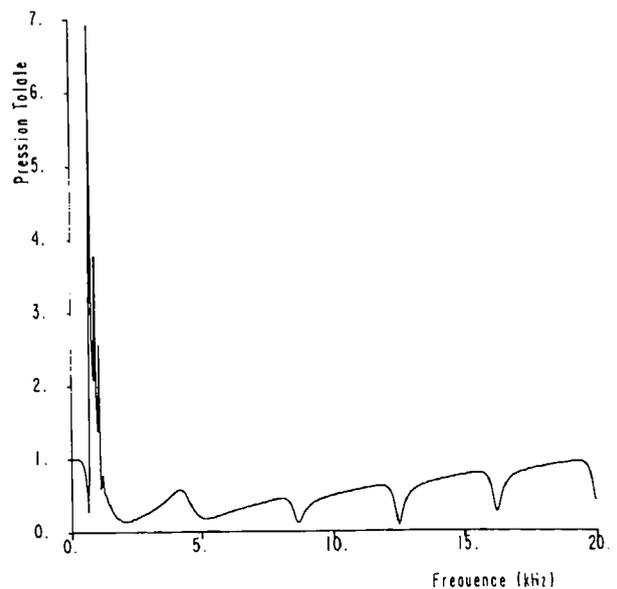
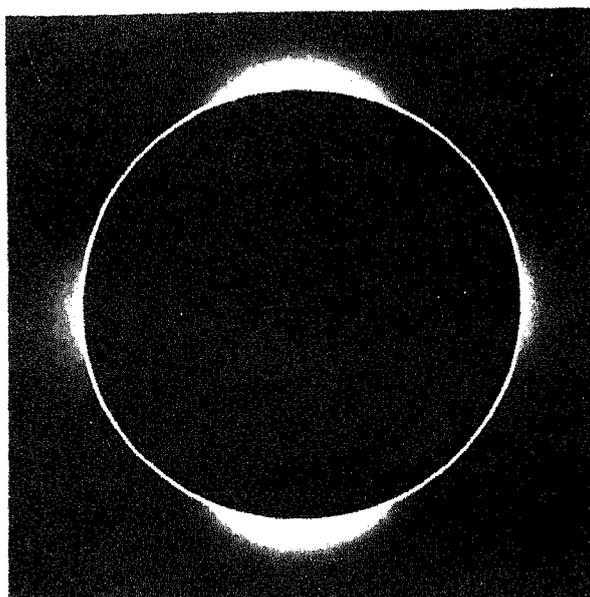
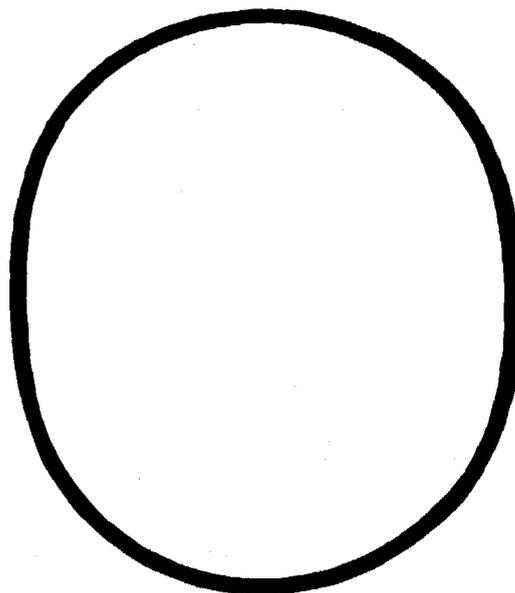
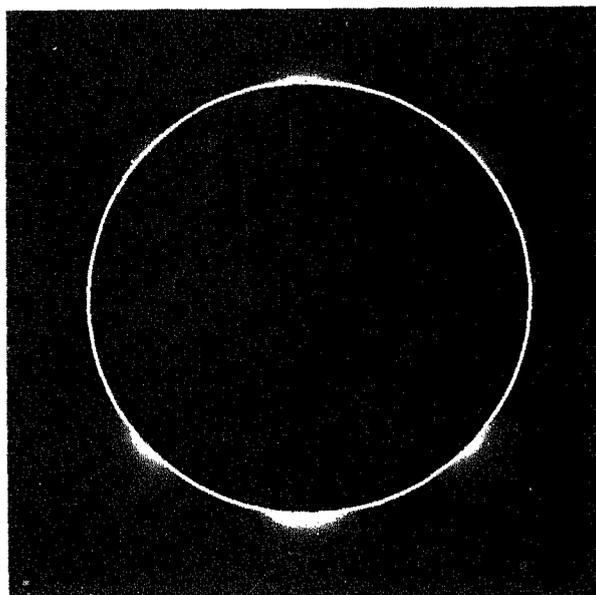
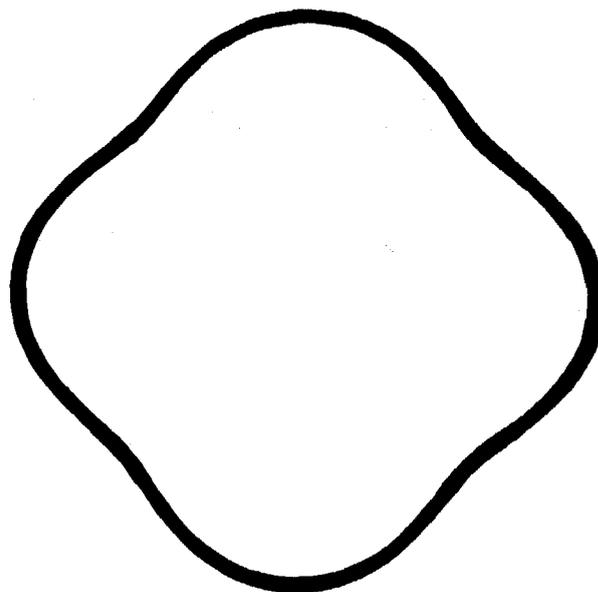


Fig. 2. — Pression totale sur la sphère,  $ka$  entre 0 et 20.


 Fig. 3. — Module de la pression autour de la sphère,  $ka=0,760$ .

 Fig. 4. — Déformée de la sphère pour  $ka=0,760$ .

 Fig. 5. — Module de la pression autour de la sphère,  $ka=1,12$ .

 Fig. 6. — Déformée de la sphère pour  $ka=1,12$ .

représentant la pression 0, et le blanc la pression 7, l'onde plane venant du haut de la figure. Quatre zones de pression élevée près de la sphère, et quatre zones de pression acoustique pratiquement nulle y sont clairement visibles. La figure 4 montre les déformations (amplifiées) induites dans la coque sphérique par l'onde acoustique. A cette fréquence de résonance la sphère prend une forme légèrement ellipsoïdale. Le troisième pic de la figure 2, à la fréquence 1 120 Hz, est une résonance d'ordre 4. On peut distinguer sur la figure 5 huit ventres de pression (la pression totale est proche de quatre fois la pression incidente), séparés par huit nœuds de pression autour de la sphère.

A cette fréquence, la coupe transversale de la coque sphérique prend une forme légèrement carrée.

Lorsque l'épaisseur de la coque est portée à 3% de son rayon ( $b/a=0,97$ ), la position et l'amplitude de ses résonances sont presque complètement modifiées. Les pics de résonance de type B sont toujours présents sur la figure 7. Mais la série de résonances (A) très étroites et de forte amplitude qui n'apparaissait qu'à basse fréquence dans les figures 1 et 2 se poursuit maintenant entre 30 et 70 kHz par des résonances d'ordres plus élevés.

Si on augmente encore l'épaisseur de la sphère pour atteindre  $b/a=0,95$ , ces résonances se rapprochent

encore des basses fréquences et deviennent visibles entre 0 et 40 kHz environ. La position en fréquence de cette série de résonances semble donc directement liée à l'épaisseur de la sphère : plus la coque est mince, et plus la bande de fréquence où les résonances de type A sont excitées est élevée. Par contre, la position et l'amplitude des résonances de type B sont peu affectées par les variations de l'épaisseur de la coque.

### 3. 2. SPHÈRE MULTICOUCHE

La pression rétrodiffusée par la sphère formée de trois

couches est tracée sur la figure 9, pour  $ka$  entre 0 et 100. On y remarque encore la série de résonances de type B, surtout visible entre 0 et 40 kHz. Les résonances du type A sont excitées entre 0 et 2 kHz, puis au-dessus de 30 kHz, chiffres semblables à ceux que l'on obtiendrait avec une seule couche d'épaisseur 4,8 mm. Les pics apparaissant au-dessus de 80 kHz sont sans doute liés à un troisième type de résonance. Quelques pics visibles surtout sur la courbe de la pression totale près de la sphère (fig. 10), vers 4, 8, 12 et 16 kHz, sont dus aux résonances de la couche liquide entre

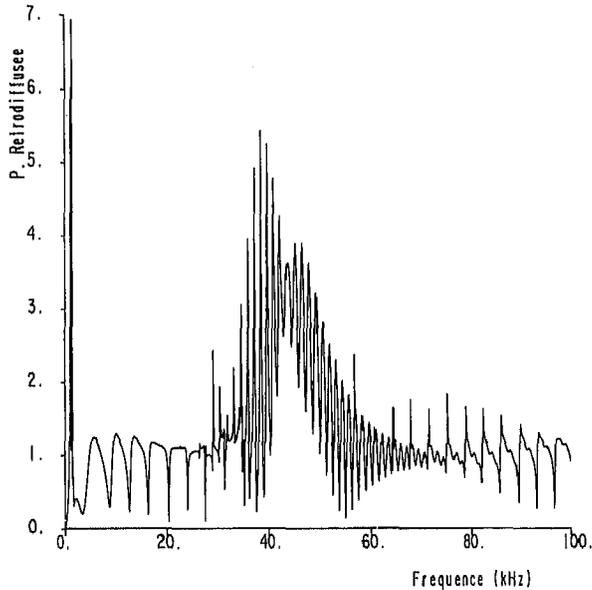


Fig. 7. — Pression rétrodiffusée,  $b/a=0,97$ ,  $ka$  entre 0 et 100.

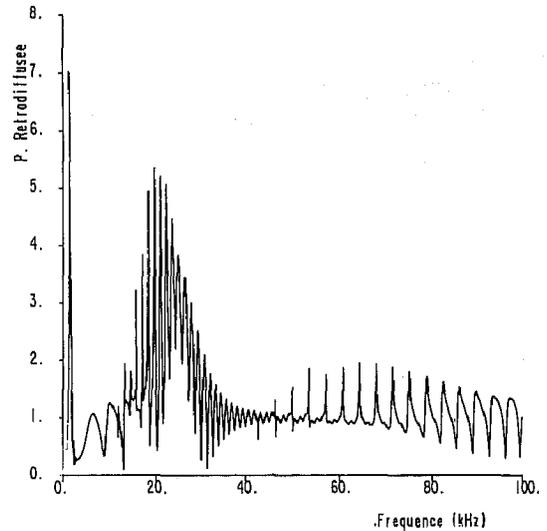


Fig. 8. — Pression rétrodiffusée,  $b/a=0,95$ ,  $ka$  entre 0 et 100.

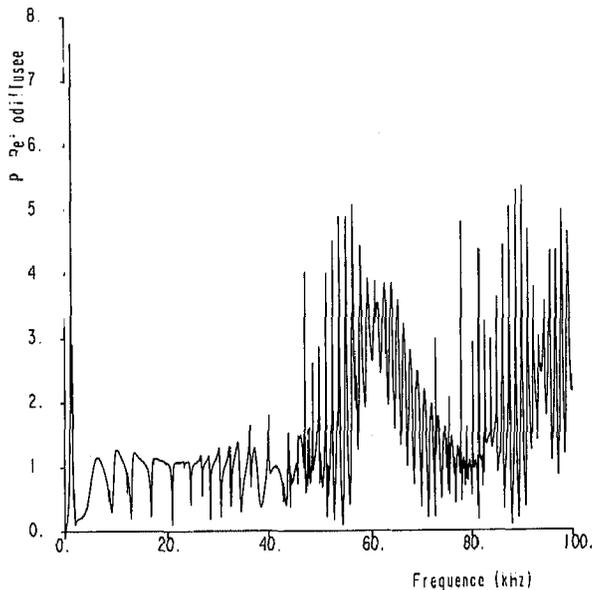


Fig. 9. — Pression rétrodiffusée par la sphère formée de trois couches.

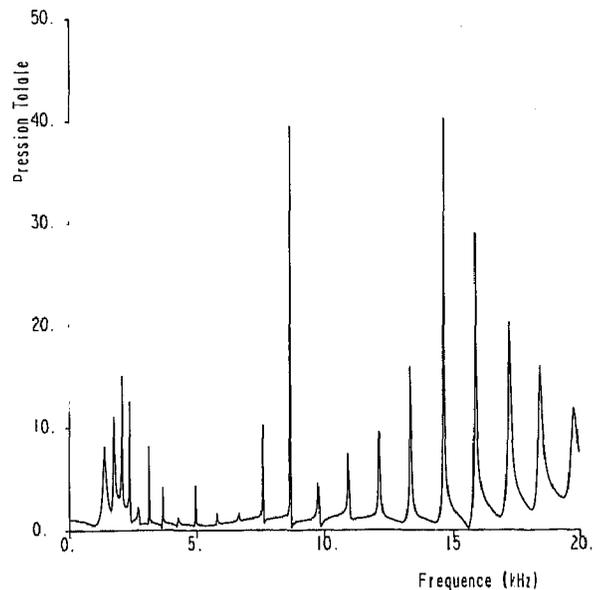


Fig. 10. — Pression totale sur la sphère formée de trois couches,  $ka$  entre 0 et 20.

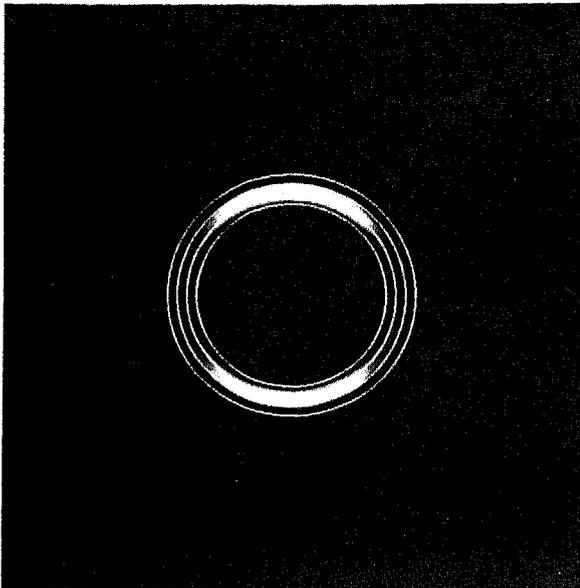


Fig. 11. — Module de la pression totale autour de la sphère,  $ka=4,28$ .

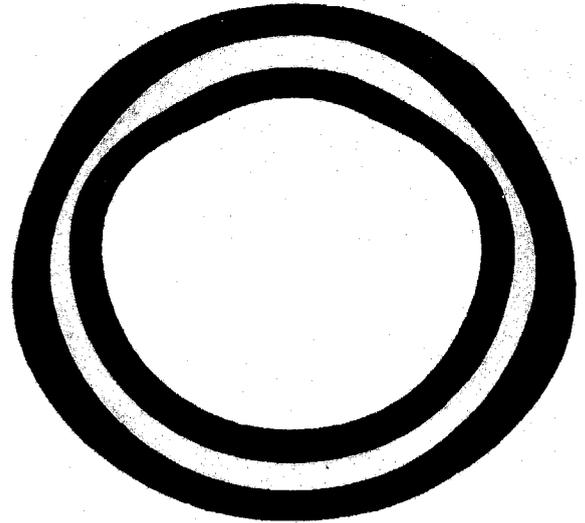


Fig. 12. — Déformée de la sphère pour  $ka=4,28$ .

les deux couches d'aluminium. Le premier pic, de fréquence 4280 Hz, est une résonance d'ordre 1. La figure 11 est une carte du module de la pression acoustique totale autour de la sphère et dans la couche fluide, et du module de la contrainte radiale dans les couches solides (un point à la distance  $r$  du centre de la sphère est tracé à la distance  $r-R$  du centre de l'image,  $R$  étant légèrement inférieur au rayon interne de la sphère, pour augmenter la taille des couches sphériques sur l'image). On y distingue clairement les deux zones de forte pression acoustique dans la couche d'eau, aux deux pôles de la sphère. Les déformations induites dans la sphère sont tracées sur la figure 12.

#### 4. Conclusions

Ce programme, grâce à la diversité des types de résultats qu'il peut fournir, se révèle être un outil intéressant et puissant pour l'identification des modes propres de vibration de sphères immergées formées de couches élastiques concentriques liquides ou solides. Des résultats expérimentaux validant le modèle théorique utilisé, obtenus avec une sphère d'aluminium de rapport  $b/a$  égal à 0,9, seront présentés ultérieurement.

#### BIBLIOGRAPHIE

- Cette liste de références est nécessairement incomplète, compte tenu du nombre de publications parues sur ce sujet.
- J. J. FARAN, Sound scattering by solid cylinders and spheres, *JASA*, 23, (4), 1951, p. 405.
- M. C. JUNGER, Sound scattering by thin elastic shells, *JASA*, 24, 1952, p. 366.
- R. HICKLING, Analysis of echoes from a hollow metallic sphere in water, *JASA*, 36, 1964, p. 1124.
- L. FLAX L. R. DRAGONETTE et H. UBERALL, Theory of elastic resonance excitation by sound scattering, *JASA*, 63, (3), 1978, p. 723.
- G. C. GAUNARD et A. KALNINS, Resonances in the sonar cross section of coated spherical shells, *Int. J. Solids and Structures*, 18, (12), p. 1083.
- A. GERARD, Scattering by spherical elastic layers, ..., *JASA*, 73, (1), 1983, p. 13.
- A. GERARD, Coupled P and SV waves propagating in spherical elastic layers, *Int. J. Engineering and Science*, 21, (6), 1983, p. 617.
- A. P. PODDUBNYAK, Resonance scattering of sound waves by a spherical elastic shell in a fluid, *Sov. Phys. Acoustics*, 30, (1), 1984, p. 51.
- G. DEPRez et R. HAZEBROUK, Diffraction d'une onde impulsive sphérique par une sphère creuse plongée dans l'air, *Revue du CETHEDec*, 72, 1982.
- C. GAZANHES, J. P. SESSAREGO, J. P. HERAULT et J. LEANDRE, Étude des premières résonances d'une sphère élastique, *Revue du CETHEDec*, 70, 1982.
- A. DEREM, J. L. ROUSSELOT, G. MAZE, J. RIPOCHE et A. FAURE, Diffusion d'une onde acoustique plane par des cylindres solides immergés, ..., *Acustica*, 50, (1), 1982.