

**Synthèse**

**d'ondes élastiques**

**par sommation de faisceaux gaussiens**

Elastic wave synthesis by a sum of Gaussian beams



**Thierry GEORGE**

Université de Paris-VI et VII, 4, place Jussieu, Tour 14, 75230 PARIS CEDEX 05

Thierry George prépare une thèse d'Université à Paris-VI sur la propagation des ondes dans les milieux élastiques.



**Raoul MADARIAGA**

Université de Paris-VI et VII, 4, place Jussieu, Tour 14, 75230 PARIS CEDEX 05

Raoul Madariaga est professeur de Géophysique à l'Université Paris-VII et dirige le laboratoire de Sismologie de l'Institut de Physique du Globe de Paris. Il s'intéresse à la sismogenèse, origine des tremblements de terre, et à la modélisation de la propagation des ondes élastiques dans les milieux naturels.

**RÉSUMÉ**

On modélise la propagation des ondes dans un milieu élastique, inhomogène dans deux dimensions, avec une méthode asymptotique basée sur la sommation de faisceaux gaussiens. Du point de vue des calculs, cette méthode est très rapide. On illustre ses possibilités en montrant quelques exemples.

**MOTS CLÉS**

Ondes scalaires et élastiques, approximation à haute fréquence, rais, faisceaux gaussiens, milieux hétérogènes.

**SUMMARY**

*We describe a fast method for modeling the propagation of high frequency elastic waves in a medium with lateral variations. The technique is based on the sum of gaussian beams. We show some examples which illustrate the performance of the method.*

**KEY WORDS**

*Elastic and scalar waves, high frequency approximation, ray, gaussian beams, heterogeneous media.*

**TABLE DES MATIÈRES**

- 1. Introduction
- 2. Description de la théorie
- 3. Stratégie de calcul
- 4. Modélisation
  - 4.1. Dôme de sel
  - 4.2. Caustique
- Bibliographie

**I. Introduction**

La croûte et sa couverture sédimentaire sont des milieux compliqués dans les trois dimensions. On s'intéresse à l'interprétation de données expérimentales qui sont des enregistrements des mouvements du sol en réponse à des tirs explosifs. La distance du point de tir aux points d'enregistrement varie de quelques centaines de mètres — sismique pétrolière — à quelques dizaines, voire centaines de kilomètres pour l'étude de la croûte ou du manteau supérieur.

La modélisation de ces enregistrements est faite généralement par théorie géométrique de rais. On part d'un modèle de milieu dû à des considérations géologiques ou tectoniques et on infirme ou confirme ce modèle par comparaison des synthétiques avec des données observées.

La théorie des rais n'est pas applicable près des singularités telles que les caustiques, réflexions critiques, etc. La méthode de sommation de faisceaux gaussiens permet de calculer au voisinage de ces points singuliers.

**II. Description de la théorie**

Le champ initial est décomposé en une somme d'ondes paraboliques à courbure complexe (faisceau gaussien). Pour une justification développée des équations nous nous référons à Cerveny *et al.* (1982).

Le problème est à symétrie de translation — 2D —, le plan est rapporté à un repère cartésien  $(0, e_x, e_z)$ . La source étant ponctuelle, les rais sont repérés par l'angle de rayonnement  $\psi$ . Pour chaque rai ( $\psi$ ) on définit les coordonnées locales  $(s_\psi, n_\psi)$  d'un point  $M(x, y)$  :  $s_\psi$  est l'abscisse curviligne le long du rai, mesurée de la source à la normale au rai qui passe en M,  $n_\psi$  est la distance orientée du point M au rai, figure 1. Ce repère est orthogonal et régulier dans la partie du plan qui contient le rai.

Dans l'espace de Fourier le champ s'exprime :

$$(1) \quad u(x, z, \omega) = \int \Phi \left( \frac{\rho_0 c_0}{\rho c q} \right)^{1/2} \text{Exp} \left[ i \omega \left( \tau + \frac{pn^2}{q2} \right) \right] d\psi,$$

$\rho, c, p, q$  et  $\tau$  dépendent du rai ( $\psi$ ) par l'intermédiaire de la coordonnée locale  $s_\psi$ .

$$\tau = \int_0 s_\psi c^{-1}(s) ds \text{ temps de parcours le long du rai.}$$

$\rho(s)$  et  $c(s)$  denotent la densité et la vitesse des ondes élastiques.

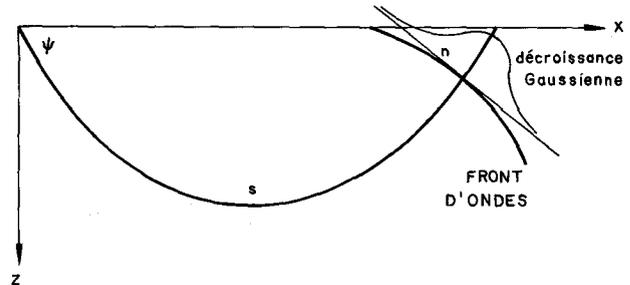


Fig. 1. — Définition du repère local lié au rai et interprétation des fonctions  $p$  et  $q$ .

$p$  et  $q$  sont des fonctions à valeurs complexes qui résolvent l'approximation parabolique de l'équation des ondes en coordonnées locales. Ils ont une interprétation immédiate :

$cp/q$  est la courbure complexe du front d'onde;

$1/2 \text{Im}(p/q)\omega$  détermine la décroissance gaussienne de l'amplitude du faisceau par rapport au rai central.

$\Phi$  est un vecteur qui décrit l'excitation des ondes élastiques par la source, multiplié par les coefficients de réflexion ou de transmission en approximation « ondes planes ». La courbure des interfaces intervient dans les sauts de discontinuité de  $p$  et  $q$  (Deschamps, 1972; Cerveny et Psencik, 1981).

**III. Stratégie de calcul**

On évite le calcul dans le repère local. La contribution d'un rai au signal est fonction de  $\Phi, p, q, \tau$ , évalués sur la surface de référence, de la géométrie du rai et des constantes physiques du milieu à la source et au point d'intersection du rai avec la surface de référence. L'équation (1) s'écrit dans le temps :

$$(2) \quad u(x, z, t) = \frac{1}{\pi} \int \text{Re} \left[ \Phi \left( \frac{\rho_0 c_0}{\rho c q} \right)^{1/2} \left( t - \tau - \frac{pn^2}{2q} \right)^{-1} \right] d\psi.$$

Cette intégrale doit être régularisée afin d'éviter des problèmes numériques qui apparaissent quand le rai central passe près de l'observateur ( $n \rightarrow 0$ ). Ceci peut se faire facilement [Madariaga, 1984] en utilisant un filtre en fréquence de type  $e^{-\omega \Delta t}$ , équivalent à une convolution dans le temps avec  $\pi^{-1} \text{Im}(t - i \Delta t)^{-1}$ .

Pour obtenir un signal réaliste, on convolue la réponse impulsionnelle par une fonction de source à choisir.

**IV. Modélisation**

**4.1. CAUSTIQUE**

Nous calculons le champ d'ondes P produit par une source explosive dans un milieu verticalement stratifié, constitué d'une couche sur un demi-espace. Les gra-

# FAISCEAU BORNÉ, RÉFLEXION ET RÉFRACTION

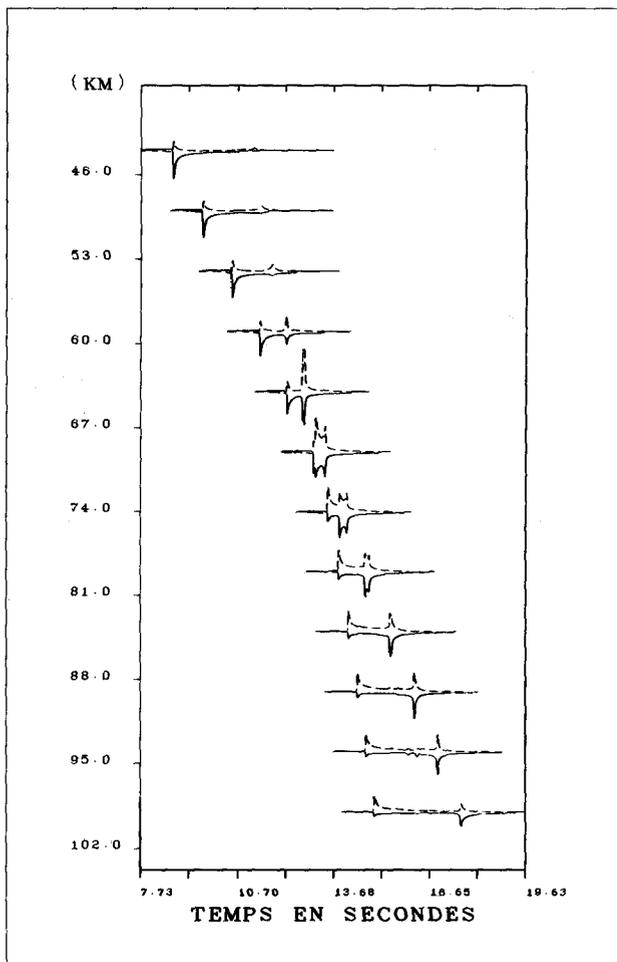


Fig. 2. — Profil (représentation des déplacements dans un repère lié à la distance au point de tir) pour une discontinuité du gradient de la vitesse. Le déplacement reste continu au voisinage de la caustique. La composante verticale du déplacement est dessinée en trait continu, les tiretées représentent la composante horizontale.

dients de vitesse sont constants dans chaque milieu et la vitesse est continue à l'interface. La vitesse des ondes longitudinales est de 7 km/s à l'interface et les gradients de vitesse de  $.1 \text{ s}^{-1}$  dans la couche supérieure et de  $.44 \text{ s}^{-1}$  dans le demi-espace. La source et les capteurs se trouvent en surface. Le profil calculé entre 50 et 100 km de distance à la source est présenté en figure 2, la caustique intercepte la surface libre à

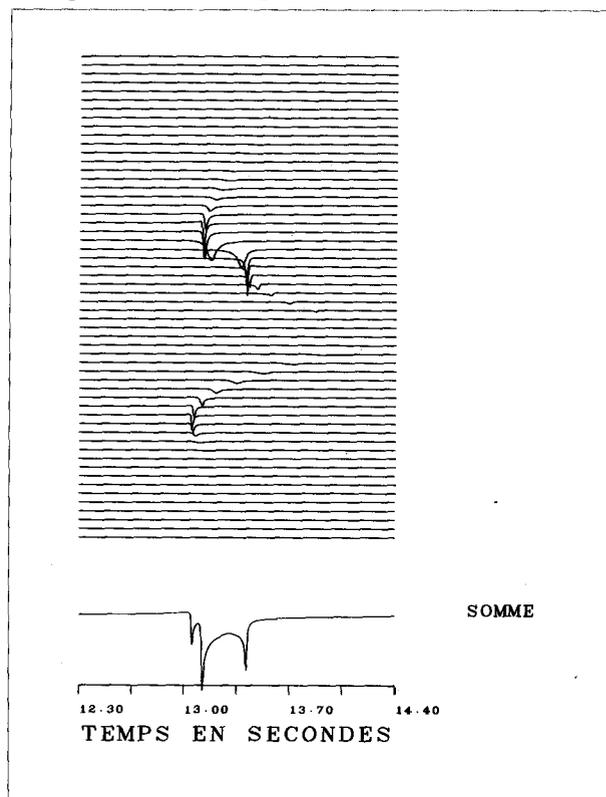


Fig. 3. — Construction de la composante verticale du déplacement par sommation des contributions de chaque rai.

— — : Lieux des enregistrements

∇ : Source

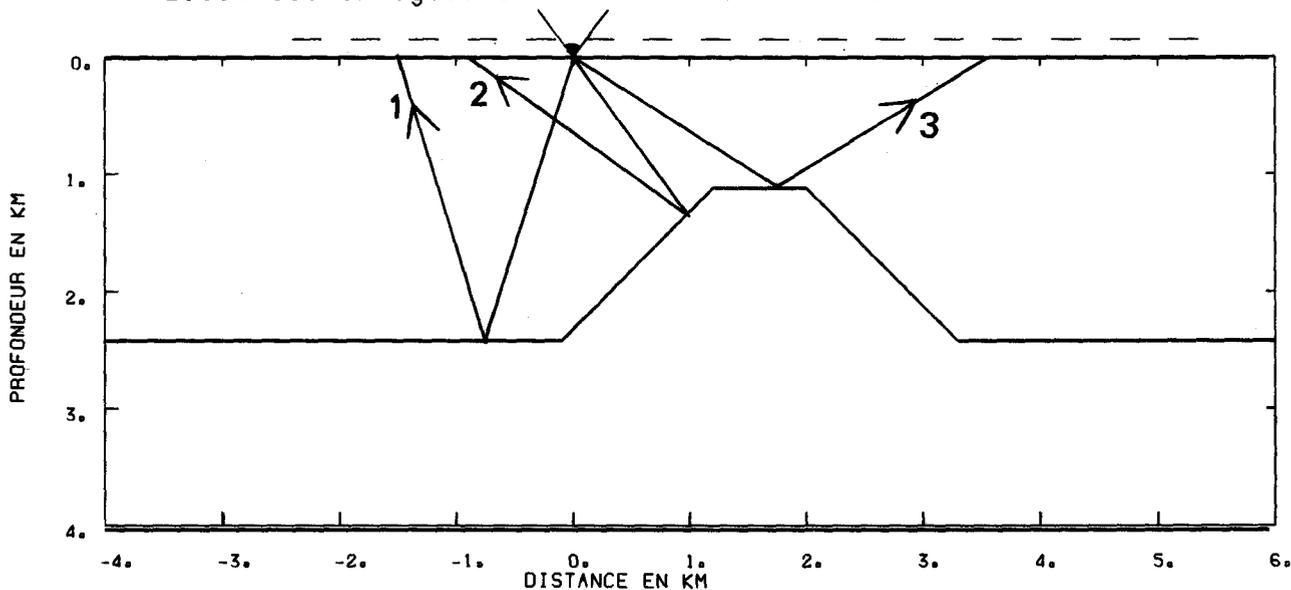


Fig. 4. — Géométrie du milieu, tracé des rais et identification des phases.

62,5 km où on observe les plus fortes amplitudes. La construction du signal à 70 km de distance par sommation de faisceaux est montrée dans la figure 3 où chaque ligne représente la contribution d'un faisceau. Chaque contribution est une fonction rationnelle dont l'évaluation est exacte et rapide.

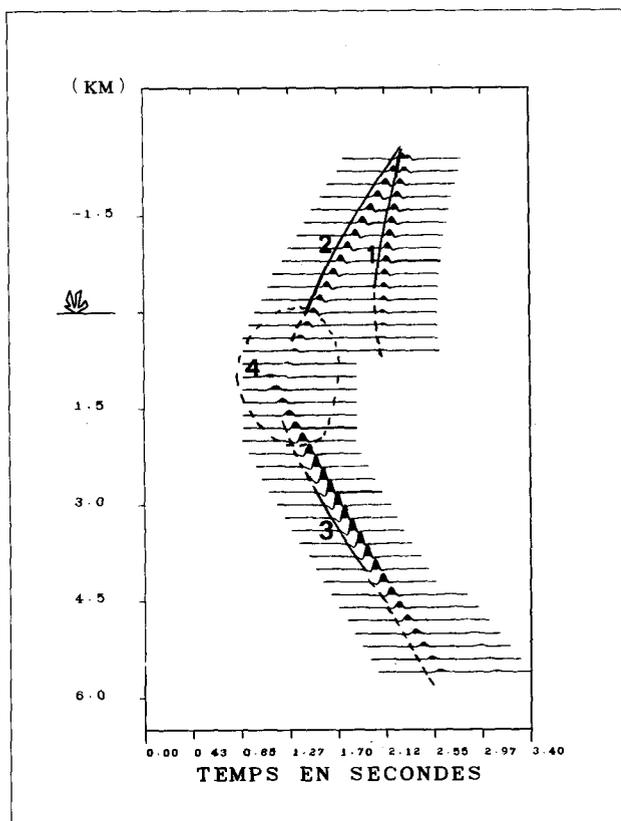


Fig. 5. — Profil obtenu pour la modélisation définie à la figure 4, les surlignements en traits pleins sont relatifs aux arrivées spéculaires tandis que les tiretés définissent des zones de diffraction.

#### 4. 1. DÔME DE SEL

On modélise la propagation des ondes de cisaillement (SH) à travers le modèle décrit par la figure 4 : deux milieux élastiques homogènes séparés par une interface à géométrie complexe. La vitesse est 2,5 km/s pour la couche supérieure et 4 km/s pour le demi-espace inférieur, les densités sont respectivement 2,6 kg/dm<sup>3</sup> et 3,1 kg/dm<sup>3</sup>. La fonction source est  $H(t - .2) \cdot (t - .2) \cdot \text{Exp}(-1000(t - .2)^2)$  : la longueur d'onde de la source est quatre fois moins grande que la plus petite longueur du milieu — le toit du dôme —.

Du profil (fig. 5), on a distingué les réflexions spéculaires subcritiques : (1) sur le substrat et (2) sur le mur du dôme —, surcritique —; (3) sur le toit du dôme — et des zones qui ne sont pas atteintes par les rais —; (4) et (5). Les trajectoires des rais correspondants sont indiquées sur la figure 4. On observe un bon accord autant en phase qu'en amplitude pour toutes les réflexions spéculaires mais les diffractions — indiquées par les lignes hachurées — sont mal représentées. Néanmoins, les arrivées significatives sont bien modélisées avec un temps de calcul qui est de l'ordre du centième de celui nécessaire à la méthode des différences finies (Virieux, 1984) (Contribution IPG 831).

#### BIBLIOGRAPHIE

- V. CERVENY, M. POPOV et I. PSENCIK, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 70, 1982, p. 109-128.  
 V. CERVENY et I. PSENCIK, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 78, 1984, p. 65-91.  
 G. DESCHAMPS, *Proc. IEEE*, 60, 1972, p. 1022-1035.  
 R. MADARIAGA, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 79, 1984, p. 589-612.  
 J. VIRIEUX, *Geophysics*, 49, 1984, p. 1933-1957.