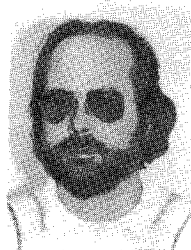


# La tomographie d'impédance acoustique

Acoustic impedance tomography



Jean-Pierre LEFEBVRE

Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, CNRS, BP n° 71, 31, chemin Joseph-Aiguier, 13277 MARSEILLE CEDEX 9

Jean-Pierre LEFEBVRE est ingénieur ENSP, Docteur de Spécialité en Acoustique, Diplômé d'Etudes et Recherches en Biologie humaine, Docteur d'État. Il est actuellement Chargé de Recherches au CNRS, Laboratoire de Mécanique et d'acoustique, Groupe Ultrasons. Son domaine d'activité est le sondage acoustique, appliqué à la Géophysique et au Génie Biologique et Médical. Ses travaux actuels portent sur l'échographie et ses prolongements quantitatifs : l'Impédographie Acoustique et la Tomographie d'Impédance Acoustique.

## RÉSUMÉ

On propose une méthode quantitative d'imagerie acoustique, synthèse des travaux actuels sur l'impédographie ultrasonore (modélisation unidimensionnelle de l'échographie) et sur la Tomographie Ultrasonore. Le résultat attendu est une imagerie en coupes d'impédance acoustique. On expose la théorie de la méthode, basée sur une modélisation adaptée du milieu en termes d'impédance acoustique. On propose deux balayages particuliers et leurs algorithmes de reconstruction associés, permettant de n'avoir à effectuer que des transformées de Fourier unidimensionnelles. L'un est à large bande et ne nécessite qu'un balayage spatial; l'autre est à bande étroite et nécessite un double balayage spatial.

## MOTS CLÉS

Imagerie acoustique, échographie tomographie ultrasonore, impédance acoustique.

## SUMMARY

*We propose a quantitative acoustical imaging method, synthesis of present works on ultrasonic impediography (one dimensional modelization of echography) and on ultrasonic tomography. The waited result is an acoustic impedance imagery. We expose two particular scannings, with their specific reconstruction algorithms, needing only one dimensional Fourier Transforms. One needs wide band signals and a simple spatial scanning. The other needs narrow-band signals and a double spatial scanning.*

## KEY WORDS

*Acoustical imaging, echography ultrasonic tomography, acoustic impedance.*

**TABLE DES MATIÈRES**

**Introduction**

**1. La modélisation**

**2. Le problème direct**

**3. Comparaison aux autres formulations**

**4. Le problème inverse**

4.1. Reconstruction par balayage spatio-fréquentiel

4.2. Reconstruction par double balayage spatial

**5. Perspectives, conclusions**

**Remerciements**

**Bibliographie**

**Introduction**

Les recherches actuelles sur l'imagerie ultrasonore portent sur la quantification d'image. L'échographie est en effet une technique qualitative en ce sens que les niveaux de gris ou de couleur utilisés sont arbitraires, et dépourvus de toute interprétation physique. On sait en effet que le paramètre significatif est la « réflectivité » du milieu, c'est-à-dire son pouvoir écho-gène, qui est non seulement fonction de ses caractéristiques physiques, mais également de l'angle de vue, du signal utilisé, etc. Vouloir aller plus loin, et affecter à chaque point ou « pixel » d'une image une certaine valeur d'un certain paramètre physique caractéristique du milieu (comme le fait la tomodynamométrie en rayons X), nécessite de poser le problème en termes physiques, à savoir en terme de problème inverse de diffusion acoustique. Ce qui pose avec acuité le problème de la modélisation acoustique en elle-même. Il faut en effet trouver une formulation à la fois suffisamment réaliste et synthétique, c'est-à-dire réduite au plus petit nombre de paramètres, afin de conduire à une inversion praticable.

Nous avons réussi à réduire ce nombre à l'unité en focalisant notre attention sur la réflexion des ondes, au détriment de la transmission. On montre alors qu'un seul paramètre joue un rôle significatif, l'Impédance Acoustique. La résolution du problème inverse de diffusion conduira donc à une imagerie d'impédance. Nous ne résoudrons en fait que le problème inverse linéarisé, par des algorithmes de reconstruction tomographique inspirés de ceux de la tomodynamométrie en rayons X. Par analogie nous dénommerons donc, la technique, tomo-impédométrie ultrasonore, ou tomographie d'impédance acoustique.

**1. La modélisation**

On néglige en un premier temps les phénomènes d'absorption-diffusion dus aux processus dissipatifs pour se centrer sur le seul phénomène de diffusion par les inhomogénéités du milieu. Une étude à une dimension montre que l'effet des fluctuations du coefficient d'absorption sur la diffusion est négligeable, dans le cas des milieux biologiques et aux fréquences usuelles de l'échographie (gamme 1-10 MHz). L'erreur commise en négligeant l'absorption est de l'ordre de  $\alpha\lambda$  (absorption par longueur d'onde), c'est-à-dire moins de  $10^{-2}$  [1].

On décrit donc le milieu inhomogène, du point de vue acoustique, par ses seules fluctuations de densité  $\rho$  et de célérité  $C$ . L'équation de propagation de la pression acoustique  $P$  s'écrit donc [2] :

$$-\frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \rho \operatorname{div} \left( \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} P \right) = 0.$$

En pratique les ultrasons sont émis par une sonde qui est soit en contact avec la peau par l'intermédiaire d'un gel de couplage (caractérisation *in vivo*), soit immergée dans une cuve d'eau assurant le couplage (caractérisation *in vitro*). Il est commode de considérer le fluide de couplage comme une référence homogène, de caractéristiques connues  $\rho_0, C_0$ .

L'équation de propagation s'écrit alors :

$$-\frac{1}{C_0^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \Delta P = \left( \frac{1}{C^2} - \frac{1}{C_0^2} \right) \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \frac{\operatorname{grad} \rho}{\rho} \cdot \operatorname{grad} P.$$

En introduisant les quantités  $\alpha = (C^2 - C_0^2)/C^2$  et  $\zeta = \operatorname{Log}(Z/Z_0)$  caractérisant respectivement les fluctuations quadratiques de célérité  $C$  et les fluctuations logarithmiques d'impédance  $Z = \rho C$  :

$$-\frac{1}{C_0^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \Delta P = -\frac{\alpha}{C_0^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \operatorname{grad}(\operatorname{Log}(1-\alpha)) \cdot \operatorname{grad} P + \operatorname{grad} \zeta \cdot \operatorname{grad} P.$$

Les tissus biologiques se caractérisant par leur faible inhomogénéité ( $\alpha \sim \zeta \sim 10^{-2}$ ), on peut écrire, à l'ordre un en  $\alpha$  :

$$-\frac{1}{C_0^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \Delta P = -\frac{\alpha}{C_0^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \frac{1}{2} \operatorname{grad} \alpha \cdot \operatorname{grad} P + \operatorname{grad} \zeta \cdot \operatorname{grad} P.$$

C'est la modélisation que nous avons choisie pour caractériser, du point de vue acoustique, les milieux biologiques. On se propose maintenant de résoudre le problème inverse de la diffusion, c'est-à-dire l'identification des paramètres  $\alpha$  et  $\zeta$  à partir de mesures de diffusion. Ayant fait l'hypothèse que ces paramètres sont petits pour les milieux biologiques, on peut se

contenter de résoudre le problème inverse linéarisé en faisant appel à une approximation de monodiffusion pour le problème direct, qu'on inverse ensuite.

## 2. Le problème direct

On suppose qu'on émet, dans le fluide de couplage, une onde plane unitaire de direction  $\mathbf{n}_0$  (vecteur unitaire) et pulsation  $\omega$  :

$$P_0 = p_0 e^{i\omega t} = e^{i(\omega t - k \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{x})}$$

où  $k = \omega/C_0$  est le nombre d'onde dans la partie homogène.

En cherchant une solution également de type harmonique  $P = p e^{i\omega t}$ ,  $p$  devra satisfaire à l'équation aux dérivées partielles :

$$\Delta p + k^2 p = k^2 \alpha p - \frac{1}{2} \mathbf{grad} \alpha \cdot \mathbf{grad} p + \mathbf{grad} \zeta \cdot \mathbf{grad} p$$

et donc à l'équation intégrale équivalente :

$$p(\mathbf{x}, \omega) = p_0(\mathbf{x}, \omega) \int_{\mathbb{R}^3} + \int g(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) \cdot \left\{ k^2 \alpha p - \frac{1}{2} \mathbf{grad} \alpha \cdot \mathbf{grad} p + \mathbf{grad} \zeta \cdot \mathbf{grad} p \right\}_{\mathbf{x}'} d^3 x'$$

où :

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) = - \frac{e^{-ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$$

$g$  est la fonction de Green de l'opérateur de Helmholtz, caractérisant la propagation en milieu indéfini :

$$\Delta g + k^2 g = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

Les paramètres d'inhomogénéité  $\alpha$ ,  $\zeta$  étant petits ( $\sim 10^{-2}$ ) pour les milieux biologiques, (ceux-ci étant essentiellement constitués par de l'eau); on peut se contenter d'une approximation de monodiffusion (approximation de Born), c'est-à-dire du premier itéré de l'équation intégrale. Le champ diffusé s'écrit ainsi, à l'ordre un :

$$p_d^{(1)}(\mathbf{x}, \omega) = p^{(1)}(\mathbf{x}, \omega) - p_0(\mathbf{x}, \omega) = \int_{\mathbb{R}^3} g(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) \cdot \left\{ k^2 \alpha p_0 - \frac{1}{2} \mathbf{grad} \alpha \cdot \mathbf{grad} p_0 + \mathbf{grad} \zeta \cdot \mathbf{grad} p_0 \right\}_{\mathbf{x}'} d^3 x'$$

Enfin, pour simplifier les calculs, on s'arrange pour travailler à grande distance des transducteurs, de façon à pouvoir s'affranchir de la structure en général très complexe du champ proche des transducteurs. Ce mode de travail ne pose actuellement aucun problème pratique, que ce soit pour des mesures *in vitro* (cuve suffisamment grande) ou *in vivo* (cales d'épaisseur souples pour échographie).

On suppose donc que la distance de travail est grande par rapport à l'étendue de la zone diffusante :

$$\frac{|\mathbf{x}|}{|\mathbf{x}'|} \gg 1, \quad \forall \mathbf{x}' \in \text{Supp}(\alpha, \zeta),$$

support des inhomogénéités.

Alors :

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) \approx g_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) = - \frac{e^{-ik|\mathbf{x}|}}{4\pi|\mathbf{x}|} e^{ik\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'},$$

où  $\mathbf{n} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$  est le vecteur unitaire caractérisant la direction d'observation.

Dans ces conditions, le champ (asymptotique) diffusé s'écrit :

$$p_{d\infty}^{(1)}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{e^{-ik|\mathbf{x}|}}{4\pi|\mathbf{x}|} h^{(1)}(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}, \omega),$$

avec :

$$h^{(1)}(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}, \omega) =$$

$$-k^2 \left[ (1 + \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{n}) \frac{\hat{\alpha}(\mathbf{K})}{2} + (1 - \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{n}) \hat{\zeta}(\mathbf{K}) \right]_{\mathbf{K} = k(\mathbf{n}_0 - \mathbf{n})},$$

où  $\hat{\alpha}(\mathbf{K})$  et  $\hat{\zeta}(\mathbf{K})$  sont les transformées de Fourier spatiales des quantités  $\alpha(\mathbf{x})$  et  $\zeta(\mathbf{x})$  qui caractérisent l'inhomogénéité du milieu, et que nous nommerons par la suite « objets » selon la terminologie des opticiens :

$$\hat{\alpha}(\mathbf{K}) = \int_{\mathbb{R}^3} \alpha(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{x}} d^3 x;$$

$$\hat{\zeta}(\mathbf{K}) = \int_{\mathbb{R}^3} \zeta(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{x}} d^3 x,$$

$h$  est la réponse fréquentielle en diffusion (asymptotique) du milieu, pour une direction d'incidence  $\mathbf{n}_0$  et une direction d'observation  $\mathbf{n}$ .

A ce niveau, des calculs, on voit que les fluctuations de célérité et d'impédance déterminent, d'une manière unique, la réponse fréquentielle en diffusion. Par contre il n'y a pas, *a priori*, unicité du problème inverse.

Cependant, si l'on étudie plus en détail les diagrammes de directivité de la diffusion par les fluctuations de célérité  $\alpha$  et par les fluctuations d'impédance  $\zeta$ , on se rend compte que les premières produisent une diffusion avant (c'est-à-dire maximale pour  $\mathbf{n} = \mathbf{n}_0$ ) et les secondes une diffusion arrière (c'est-à-dire maximale pour  $\mathbf{n} = -\mathbf{n}_0$ ). Les deux diagrammes présentent des caractéristiques cardioïdes, symétriques l'une par rapport à l'autre à l'autre. Cet effet fortement directif fait que seule l'impédance joue un rôle significatif en réflexion, et seule la célérité en transmission. On peut donc adopter une modélisation à un seul paramètre : l'impédance pour la réflexion et la célérité pour la transmission :

en réflexion :

$$h^{(1)}(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}, \omega) = -k^2 (1 - \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{n}) \hat{\zeta}(k(\mathbf{n}_0 - \mathbf{n})),$$

en transmission :

$$h^{(1)}(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}, \omega) = -k^2 (1 + \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{n}) \frac{\hat{\alpha}}{2} (k(\mathbf{n}_0 - \mathbf{n})).$$

On montre que cette modélisation à un seul paramètre (impédance en réflexion, célérité en transmission) n'introduit qu'une erreur sur la mesure du champ diffusé de l'ordre de 1% pour des décalages de  $\pm 12^\circ$  par rapport à la réflexion pure ( $\mathbf{n} = -\mathbf{n}_0$ ) ou par rapport à la transmission pure ( $\mathbf{n} = \mathbf{n}_0$ ); de l'ordre de 10% pour des décalages de  $\pm 37^\circ$ .

Par la suite, on ne s'intéressera qu'à la zone de réflexion qui correspond à la modélisation de l'échographie. On n'aura donc affaire qu'au seul paramètre  $\zeta = \text{Log}(Z/Z_0)$  qui caractérise les fluctuations d'impédance :

$$h^{(1)}(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}, \omega) = -k^2 (1 - \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{n}) \hat{\zeta}(k(\mathbf{n}_0, \mathbf{n})).$$

C'est cette modélisation à un seul paramètre qui assurera l'unicité de la solution du problème inverse linéarisé. La solution de ce problème est simple : il suffit d'effectuer une simple inversion de Fourier de données de diffusion adéquates pour recouvrir l'« objet »  $\zeta$ , fluctuations logarithmiques d'impédances, c'est la tomographie d'impédance acoustique.

Auparavant nous allons comparer notre formulation aux deux formulations les plus couramment utilisées dans ce domaine.

### 3. Comparaison aux autres formulations

Les deux formulations les plus utilisées sont :

— la formulation en termes de fluctuations de compressibilité et de densité [2], particulièrement utilisée en Génie Biologique et Médical [3, 4], en négligeant généralement sans argumentation satisfaisante les fluctuations de densité [4] :

$$-\frac{1}{C_0^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \Delta P = \frac{\mu}{C_0^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \text{div}(\gamma \text{grad } P),$$

avec :

$$\mu = \frac{\chi - \chi_0}{\chi_0}, \quad \chi = \frac{1}{\rho C^2} \text{ étant la compressibilité}$$

$$\gamma = \frac{\rho - \rho_0}{\rho}, \quad \rho \text{ étant la densité.}$$

Elle conduit à la réponse fréquentielle en diffusion à l'ordre un (approximation de Born) :

$$h^{(1)}(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}, \omega) = k^2 (\hat{\mu}(\mathbf{K}) + \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{n} \hat{\gamma}(\mathbf{K}))_{\mathbf{K} = k(\mathbf{n}_0 - \mathbf{n})}$$

— La formulation en termes de fluctuations de célérité et de densité utilisée particulièrement en géophysique [5] et en propagation aléatoire [6], en négligeant également sans argumentation réelle les fluctuations de densité [5] :

$$-\frac{1}{C_0^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \Delta P = -\frac{\alpha}{C_0^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \text{grad } \eta \cdot \text{grad } P,$$

avec :

$$\alpha = \frac{C^2 - C_0^2}{C^2}, \quad C \text{ étant la célérité,}$$

$$\eta = \text{Log}(\rho/\rho_0), \quad \rho \text{ étant la densité.}$$

Elle conduit à la réponse fréquentielle en diffusion à l'ordre un (approximation de Born) :

$$h^{(1)}(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}, \omega) = -k^2 (\hat{\alpha}(\mathbf{K}) + (1 - \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{n}) \hat{\eta}(\mathbf{K}))_{\mathbf{K} = k(\mathbf{n}_0 - \mathbf{n})}$$

Les trois formulations peuvent être testées sur le cas académique de la diffusion par une sphère fluide. Il existe en effet une solution analytique exacte du problème [2] qui peut servir de référence. Dans le cas particulier de la sphère de petites dimensions par rapport à la longueur d'onde, la formulation asymptotique exacte et les trois formulations approchées (milieu faiblement inhomogène, approximation de Born) donnent :

solution exacte :

$$h(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}, \omega) = k^2 V \left[ \mu + \frac{\gamma}{1 - \gamma/3} \cos \theta \right],$$

solution approchée en  $(\alpha, \zeta)$  :

$$h^{(1)}(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}, \omega) = -k^2 V \left[ \frac{\alpha}{2} (1 + \cos \theta) + \zeta (1 - \cos \theta) \right],$$

solution approchée en  $(\mu, \gamma)$  :

$$h^{(1)}(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}, \omega) = k^2 V [\mu + \gamma \cos \theta],$$

solution approchée en  $(\alpha, \eta)$  :

$$h^{(1)}(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}, \omega) = -k^2 V [\alpha + \eta (1 - \cos \theta)],$$

où  $V = (4/3) \pi a^3$  est le volume de la sphère (et  $a$  son rayon) et  $\theta = (\mathbf{n}_0, \mathbf{n})$  l'angle de diffusion.

On montre que les trois formulations approchées ont des performances identiques et sont bien des approximations d'ordre un de la formulation exacte. Leur précision est la même : l'erreur relative est du même ordre de grandeur que les petits paramètres qui caractérisent l'inhomogénéité.

L'intérêt essentiel de notre formulation est donc, comme nous l'avons déjà mentionné, d'être réduite à un seul paramètre sur une large plage angulaire autour de la réflexion pure ou de la transmission pure :  $\pm 12^\circ$  pour une erreur de 1%,  $\pm 37^\circ$  pour une erreur de 10%.

Par la suite, on se limitera à la zone de réflexion, pour laquelle la modélisation fait appel au seul paramètre impédance.

On se propose donc de reconstruire l'« objet »  $\zeta = \text{Log}(Z/Z_0)$  profil logarithmique d'impédance, à partir de mesures de diffusion  $h(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}, \omega)$ .

### 4. Le problème inverse

La relation établie entre la réponse fréquentielle en diffusion  $h(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}, \omega)$ , et la transformée de Fourier spatiale de l'« objet »  $\zeta$  montre que l'on peut, en

pratiquant un grand nombre de mesures de diffusion pour diverses incidences  $\mathbf{n}_0$ , diverses directions d'observation  $\mathbf{n}$  et diverses fréquences  $\omega$ , « remplir » l'espace de Fourier de l'objet. Chaque mesure  $h(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}, \omega)$ , donnant accès à la valeur de  $\zeta$  au point :

$$\mathbf{K} = k(\mathbf{n}_0 - \mathbf{n}) = \frac{\omega}{C_0}(\mathbf{n}_0 - \mathbf{n}).$$

A partir de ce point de vue, on pourrait envisager un remplissage plus ou moins empirique, en pratiquant une interpolation pour remplir les vides, et un moyennage pour les mesures redondantes [7].

C'est un point de vue que nous n'avons pas adopté car sa mise en œuvre nécessite, pour recouvrer l'objet, de procéder à des transformées de Fourier (inverses) multidimensionnelles, et donc de disposer de calculateurs suffisamment puissants, incompatibles avec la légèreté traditionnelle des techniques d'imagerie ultrasonore.

Dans ce même souci d'alléger les procédures numériques, nous nous ramenons à un problème bidimensionnel par focalisation acoustique dans un plan de coupe. Diverses techniques sont pour cela utilisables; focalisation par lentille cylindrique, focalisation par antenne... Nous préconisons donc une technique hybride de focalisation classique dans un plan et de reconstruction numérique dans ce plan; bien que rien ne s'oppose dans le principe à étendre à trois dimensions les procédures que nous allons proposer.

Nous proposons deux méthodes :

— la première, à base de balayage mixte, spatial et fréquentiel, (le balayage spatial devrait être double si on voulait travailler à 3 dimensions).

— La deuxième, à base de double balayage spatial (triple à 3 dimensions).

Toutes deux évitent d'avoir à pratiquer des transformées de Fourier multidimensionnelles.

La première méthode fait appel à la technique désormais classique de reconstruction par sommation des rétroprojections filtrées; la seconde a une technique plus récente de reconstruction par sommation des rétropropagations filtrées.

Les deux techniques proposées ne sont donc pas à proprement parler originales. Ce qui l'est plus, c'est la nature du paramètre reconstruit qui est ici l'Impédance Acoustique, et les données qui sont d'habitude des mesures en transmission, avec des balayages purement spatiaux.

#### 4.1. RECONSTRUCTION PAR BALAYAGE SPATIO-FRÉQUENTIEL

Si l'on garde l'angle de diffusion  $\theta = (\mathbf{n}_0, \mathbf{n})$  fixe et procède à un double balayage :

- fréquentiel entre  $\omega_{\min}$  et  $\omega_{\max}$ ;
- spatial de l'angle d'incidence  $\varphi = (\mathbf{Ox}, \mathbf{n}_0)$  entre  $-\pi$  et  $+\pi$  (en faisant par exemple tourner l'ensemble émetteur-récepteur autour de l'objet, ou l'objet lui-même); on montre (fig. 1) qu'on remplit le plan de Fourier de l'objet  $\zeta$ , par segments successifs de

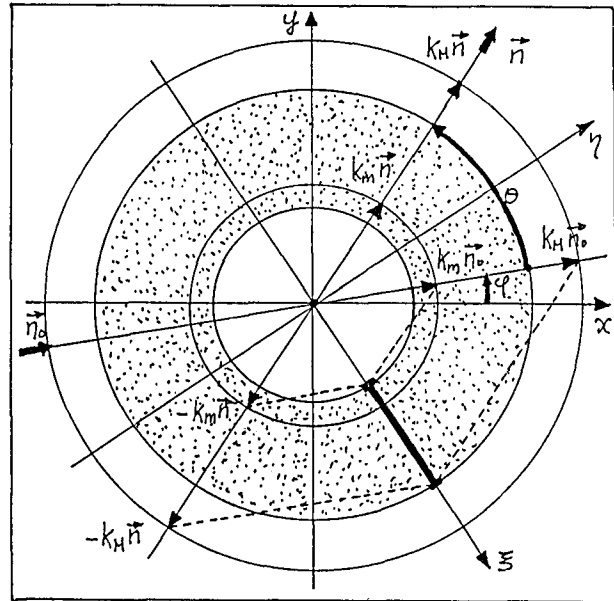


Fig. 1. — Couverture spectrale par balayage spatio fréquentiel.  
Fig. 1. — Spectral cover by space-frequency scanning.

centre 0, selon une couronne de centre 0 et rayons intérieurs et extérieurs  $2k_{\min} \sin(\theta/2)$  et  $2k_{\max} \sin(\theta/2)$ .

(Pour plus de clarté, les figures représentent des montages en transmission.)

On procède donc à un filtrage spatial de bande :

$$B = \left[ 2k_{\min} \sin \frac{\theta}{2}, 2k_{\max} \sin \frac{\theta}{2} \right].$$

Soit  $\zeta^B$  l'objet filtré à reconstruire (des procédures de déconvolution [8] devraient permettre d'étendre au maximum cette bande).

Il faut procéder à la transformée de Fourier inverse :

$$\zeta^B(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \hat{\zeta}^B(\mathbf{K}) e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{x}} d^2 \mathbf{K},$$

à partir des mesures de  $\hat{\zeta}^B(\mathbf{K})$  aux points  $\mathbf{K} = k(\mathbf{n}_0 - \mathbf{n})$ , c'est-à-dire aux points :

$$\mathbf{K} = \begin{cases} K_x = k [\cos \varphi - \cos(\theta + \varphi)], \\ K_y = k [\sin \varphi - \sin(\theta + \varphi)], \end{cases}$$

couverts par un balayage  $k \in [k_{\min}, k_{\max}]$ ,  $\varphi \in [-\pi, +\pi]$ . Soient  $\hat{\zeta}_\varphi^B(\theta, k)$  ces mesures ( $\theta$  étant fixe).

Le jacobien de la transformation qui permet de passer du système  $[K_x, K_y]$  au système  $[k, \varphi]$  est :

$$J = 2k(1 - \cos \theta) = 4k \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

L'intégrale de Fourier s'écrit donc :

$$\zeta^B(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} dk \times 4k \sin^2 \frac{\theta}{2} \cdot \hat{\zeta}_\varphi^B(\theta, k) \times e^{i 2k \sin(\theta/2) [x \sin(\varphi + (\theta/2)) - y \cos(\varphi + (\theta/2))]}.$$

Soit, en procédant au changement de variable  $k \rightarrow \chi = 2k \sin(\theta/2)$ , en notant :

$$\tilde{P}_\varphi^B(\theta, \chi) = \tilde{\zeta}_\varphi^B(\theta, k) = -\frac{h_\varphi(\theta, \omega)}{k^2(1-\cos\theta)} = -\frac{h_\varphi(\theta, \omega)}{2k^2 \sin^2(\theta/2)}$$

et en remarquant que :

$$\xi = x \sin\left(\varphi + \frac{\theta}{2}\right) - y \cos\left(\varphi + \frac{\theta}{2}\right)$$

est l'abscisse du point  $(x, y)$  dans le repère  $[\mathbf{O}\xi, \mathbf{O}\eta]$  obtenu par rotation du repère  $[\mathbf{O}x, \mathbf{O}y]$  d'un angle :

$$(\mathbf{O}x, \mathbf{O}\xi) = \varphi + \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2} \quad (\text{fig. 1}),$$

$$\zeta^B(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \pi_\varphi^B(\xi, \eta) d\varphi$$

où :

$$\xi = x \sin\left(\varphi + \frac{\theta}{2}\right) - y \cos\left(\varphi + \frac{\theta}{2}\right),$$

$$\eta = x \cos\left(\varphi + \frac{\theta}{2}\right) + y \sin\left(\varphi + \frac{\theta}{2}\right),$$

avec :

$$\pi_\varphi^B(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\chi_{\min}}^{\chi_{\max}} d\chi \chi \tilde{P}_\varphi^B(\theta, \chi) e^{i x \xi},$$

$$\text{ou : } \chi_{\min} = 2k_{\min} \sin \frac{\theta}{2}; \quad \chi_{\max} = 2k_{\max} \sin \frac{\theta}{2},$$

$$\text{ou : } \pi_\varphi^B(\xi, \eta) = P_\varphi^B(\theta, \xi) *_{\xi} H(\xi),$$

avec :

$$P_\varphi^B(\theta, \xi) = \text{TF}^{-1}(\tilde{P}_\varphi^B(\theta, \chi)) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \tilde{P}_\varphi^B(\theta, \chi) e^{i x \xi} d\chi$$

$$H(\xi) = \text{TF}^{-1}(\chi Y(\chi))$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \chi Y(\chi) e^{i x \xi} d\chi = -P f\left(\frac{1}{\xi^2}\right).$$

$P_\varphi^B(\theta, \xi)$ , transformée de Fourier inverse de  $\tilde{P}_\varphi^B(\theta, \chi) = \tilde{\zeta}_\varphi^B(\theta, k)$  « coupe » de la transformée de Fourier bidimensionnelle de l'« objet »  $\zeta$  suivant  $\mathbf{O}\xi$ . est la projection de  $\zeta$  sur  $\mathbf{O}\xi$  (Projection-slice Theorem [9]).

C'est la formulation classique de la reconstruction tomographique par sommation des rétroprojections (ou projections inverses) filtrées  $\pi_\varphi(\xi, \eta)$  [9].

On appelle en effet rétroprojection l'opération qui consiste à faire correspondre à une projection  $P_\varphi(\xi)$  la quantité  $R_\varphi(\xi, \eta) = P_\varphi(\xi)$  (donc indépendante de  $\eta$ ). Son noyau est  $G(\xi, \eta) = \delta(\xi)$ .

On peut donc écrire :

$$\pi_\varphi^B(\xi, \eta) = -P_\varphi^B(\theta, \xi) *_{\xi} \left(\frac{1}{\xi^2}\right),$$

ou aussi :

$$\pi_\varphi^B(\xi, \eta) = \frac{\partial P_\varphi^B}{\partial \xi}(\theta, \xi) *_{\xi} \frac{1}{\xi}.$$

Le moyen le plus commode de calculer ces rétroprojections filtrées  $\pi_\varphi$  est le calcul fréquentiel.

On peut passer par :

$$\tilde{P}_\varphi^B(\theta, \chi) = \tilde{\zeta}_\varphi^B(\theta, k) = -\frac{h_\varphi(\theta, \omega)}{2k^2 \sin^2(\theta/2)}$$

et l'intégrale en  $\chi = 2k \sin(\theta/2)$ .

On peut aussi calculer directement  $\pi_\varphi$  en fonction de  $h$ , sans passer non plus par  $\chi$ . On trouve :

$$\pi_\varphi^B(\xi, \eta) = -\frac{1}{\pi} \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} \frac{dk}{k} h_\varphi(\theta, \omega) e^{i 2k \sin(\theta/2) \xi}.$$

L'algorithme est simple : pour chaque angle d'incidence  $\varphi$ , on fait une acquisition à aussi large bande que possible, soit par balayage fréquentiel, soit par excitation pseudo-aléatoire, soit encore plus simplement en impulsions. On recueille alors la réponse impulsionnelle après échantillonnage. On utilise la transformée de Fourier pour trouver la réponse fréquentielle, on calcule la rétroprojection filtrée qu'on ajoute aux précédentes.

La bande maximale  $[2k_{\min}, 2k_{\max}]$  est couverte en position de rétrodiffusion ( $\theta = \pi$ ). C'est cette position qui offre la meilleure résolution d'image  $1/2k_{\max}$ . C'est malheureusement aussi celle qui filtre le plus les basses fréquences. Or ce sont celles-ci qui sont généralement porteuses de l'information quantitative. Pour accéder à cette information il vaut mieux s'écartier au maximum de la rétrodiffusion, dans la limite de validité déjà précisée de la modélisation à un seul paramètre : l'impédance.

La plus basse fréquence couverte est alors  $2k_{\min} \sin(\theta/2)$ . Le mieux semble donc de procéder à une superposition d'images effectuées pour divers angles de diffusion.

#### 4.2. RECONSTRUCTION PAR DOUBLE BALAYAGE SPATIAL

Si l'on garde la fréquence  $\omega$  fixe et procède à un double balayage spatial :

— de l'angle de diffusion  $\theta = (\mathbf{n}_0, \mathbf{n})$  entre  $\theta_{\min}$  et  $\theta_{\max}$ , (tous deux compris entre 0 et  $\pi$ );

— de l'angle d'incidence  $\varphi = (\mathbf{O}x, \mathbf{n}_0)$  entre  $-\pi$  et  $+\pi$ ; on montre (fig. 2) qu'on remplit le plan de Fourier de l'objet  $\zeta$ , par arcs de cercles successifs de centre  $k \mathbf{n}_0$  et rayon  $k$ , une couronne de centre 0 et rayons intérieurs et extérieurs  $2k \sin \theta_{\min}/2$ ,  $2k \sin \theta_{\max}/2$ .

On effectue donc un filtrage de bande :

$$B = [2k \sin \theta_{\min}/2, 2k \sin \theta_{\max}/2].$$

Soit  $\zeta^B$  l'objet filtré à reconstruire. Il faut procéder à la transformée de Fourier inverse :

$$\zeta^B(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \zeta^B(\mathbf{K}) e^{i \mathbf{K} \cdot \mathbf{x}} d^2 \mathbf{K}$$

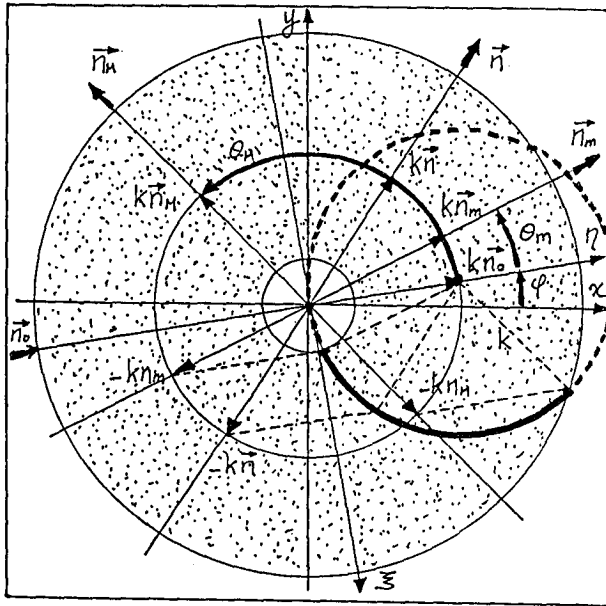


Fig. 2. - Couverture spectrale par double balayage spatial.  
Fig. 2. - Spectral cover by double spatial scanning.

à partir de mesures de  $\hat{\zeta}^B(\mathbf{K})$  aux points :

$$\mathbf{K} = k(\mathbf{n}_0 - \mathbf{n}),$$

c'est-à-dire aux points :

$$\mathbf{K} = \begin{cases} K_x = k [\cos \varphi - \cos(\theta + \varphi)], \\ K_y = k [\sin \varphi - \sin(\theta + \varphi)], \end{cases}$$

couverts par un balayage  $\theta \in [\theta_{\min}, \theta_{\max}]$ ,  $\varphi \in [-\pi, +\pi]$ . Soient  $\hat{\zeta}_\varphi^B(\theta, k)$  ces mesures.

Le jacobien de la transformation qui permet de passer du système  $[K_x, K_y]$  au système  $[\theta, \varphi]$  est  $J = k^2 \sin \theta$ .

L'intégrale de Fourier s'écrit donc :

$$\zeta^B(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} d\theta k^2 \sin \theta \cdot \hat{\zeta}_\varphi^B(\theta, k) \times e^{ik(x \sin \varphi - y \cos \varphi) \sin \theta + (x \cos \varphi + y \sin \varphi)(1 - \cos \theta)}.$$

Soit, en procédant au changement de variable  $\theta \rightarrow \chi = k \sin \theta$ , en notant :

$$\tilde{\Gamma}_\varphi^B(\chi, k) = \frac{1}{\cos \theta} \hat{\zeta}_\varphi^B(\theta, k) = - \frac{1}{\cos \theta (1 - \cos \theta) k^2} h_\varphi(\theta, \omega)$$

et en utilisant le changement de variable d'espace  $[x, y] \rightarrow [\xi, \eta]$  obtenu par rotation du repère  $[\mathbf{Ox}, \mathbf{Oy}]$  d'un angle :

$$(\mathbf{Ox}, \mathbf{O\xi}) = \varphi - \frac{\pi}{2} \quad (\text{fig. 2}),$$

$$\zeta^B(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \pi_\varphi^B(\xi, \eta) d\varphi, \begin{cases} \xi = x \sin \varphi - y \cos \varphi, \\ \eta = x \cos \varphi + y \sin \varphi, \end{cases}$$

$$\pi_\varphi^B(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\chi_{\min}}^{\chi_{\max}} d\chi \chi \tilde{\Gamma}_\varphi^B(\chi, k) e^{i(\chi \xi + [k - (k^2 - \chi^2)^{1/2}] \eta)},$$

$$\chi_{\min} = k \sin \theta_{\min}, \quad \chi_{\max} = k \sin \theta_{\max},$$

$$\pi_\varphi^B(\xi, \eta) = \Gamma_\varphi^B(\xi, k) *_{\xi} H(\xi) *_{\xi} G(\xi, \eta),$$

avec :

$$\Gamma_\varphi^B(\xi, k) = \text{TF}^{-1}(\tilde{\Gamma}_\varphi^B(\chi, k)) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \tilde{r}_\varphi^B(\chi, k) e^{i \chi \xi} d\chi,$$

$$H(\xi) = \text{TF}^{-1}(\chi Y(\chi))$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \chi Y(\chi) e^{i \chi \xi} d\chi = -P f\left(\frac{1}{\xi^2}\right),$$

$$G(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i(\chi \xi + [k - (k^2 - \chi^2)^{1/2}] \eta)} d\chi.$$

Par analogie avec la formulation précédente, et en reprenant la terminologie de Devaney [4] (qui a résolu un problème comparable, mais avec des fluctuations de compressibilité et en champ proche), on dit qu'on a résolu le problème inverse linéarisé de la reconstruction tomographique par sommation des rétropropagations filtrées  $\pi_\varphi^B(\xi, \eta)$ .

Le filtre H est le même que précédemment.

L'opérateur de rétroprojection de noyau  $\delta(\xi)$  est remplacé par l'opérateur de rétropropagation de noyau  $G(\xi, \eta)$ .

On remarque qu'en hautes fréquences ( $k \rightarrow \infty$ ):  $G(\xi, \eta) \rightarrow \delta(\xi)$  c'est-à-dire que l'opérateur de rétropropagation tend vers l'opérateur de rétroprojection. (On est alors dans le domaine de l'acoustique géométrique.)

Comme précédemment, le moyen de calcul des rétropropagations filtrées  $\pi_\varphi^B(\xi, \eta)$  le plus commode est l'intégrale fréquentielle.

On peut passer, comme indiqué, par :

$$\tilde{\Gamma}_\varphi^B(\chi, k) = - \frac{1}{\cos \theta (1 - \cos \theta) k^2} h_\varphi(\theta, \omega)$$

et :  $\chi = k \sin \theta$ .

On peut aussi les calculer directement à partir de  $h$ , et sans passer non plus par  $\chi$  :

$$\pi_\varphi^B(\xi, \eta) = - \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} d\theta \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} h_\varphi(\theta, \omega) \times e^{ik[\xi \sin \theta + \eta(1 - \cos \theta)]},$$

$$\pi_\varphi^B(\xi, \eta) = - \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} d\theta \cotg \frac{\theta}{2} h_\varphi(\theta, \omega) \times e^{2ik \sin(\theta/2) [\xi \cos(\theta/2) + \eta \sin(\theta/2)]}.$$

Comme précédemment la procédure est simple : pour chaque angle d'incidence  $\varphi$ , on procède à un balayage de l'angle de diffusion. Ce balayage peut être obtenu soit directement par rotation du récepteur, soit indirectement par un balayage transversal, selon  $P_0 \xi'$  à une distance  $OP_0 = r_0$  (fig. 3).

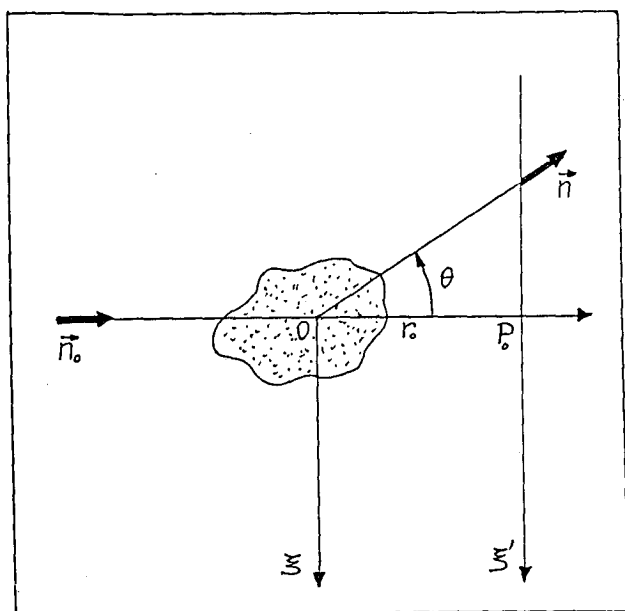


Fig. 3. — Liaison balayage linéaire-balayage angulaire.  
Fig. 3. — Joint between linear and angular scanning.

On mesure alors, par balayage linéaire :

$$P_{d\varphi}(\xi, r_0) = \frac{e^{-ik(r_0^2 + \xi^2)^{1/2}}}{4\pi(r_0^2 + \xi^2)^{1/2}} h_\varphi(\theta, \omega),$$

d'où  $h_\varphi(\theta, \omega)$  aux points  $\theta = \text{Arc tg}(\xi/r_0)$ .

On calcule ensuite la rétropropagation filtrée  $\pi_\varphi(\xi, \eta)$  qu'on ajoute aux précédentes.

## 5. Perspectives, conclusions

Un banc de tomographie ultrasonore est en cours de réalisation. Il permettra de travailler aussi bien en réflexion, pour tester nos deux algorithmes de tomographie d'impédance, qu'en transmission pour mettre en œuvre les algorithmes plus classiques de tomographie de célérité [10]. Il permettra également de simuler les imageurs échographiques usuels à balayage linéaire ou sectoriel. On aura donc un outil qui permettra non seulement de mettre au point notre technique propre d'imagerie, mais également de la comparer à pratiquement toutes les autres.

C'est sur la réalisation de ce banc que porte actuellement notre effort, mais on peut d'ores et déjà imaginer les prolongements scientifiques du travail. Ceux-ci porteront probablement sur la modélisation : modélisation des transducteurs (directivité), de l'atténuation (absorption) de la diffusion (diffusion multiple). Corrolairement à ce raffinement de la modélisation, la

résolution du problème inverse devra s'adapter à une complexité croissante, afin de conserver à l'étude son caractère pratique, qui est l'imagerie quantitative au moyen des ultrasons.

Manuscrit reçu le 22 novembre 1984.

## Remerciements

Ce travail fait partie de l'Action Concertée EURECH de la Communauté Européenne sur la Caractérisation Ultrasonore des Tissus et du Programme Scientifique Coordonné du Ministère de la Recherche et de la Technologie sur la Caractérisation Echographique des Tissus. Il a été soutenu par le Ministère de la Recherche et de la Technologie : conventions 82 M 1049 et 84 M 0999.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. LEEMAN, *Impediography revisited, Acoustical Imaging*, 9, K. Y. WANG éd., Plenum Press, New York, 1980.
- [2] P. M. MORSE et K. U. INGARD, *Theoretical acoustics*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1968.
- [3] S. J. NORTON, Generation of separate density and compressibility images of tissue, *Ultrasonic Imaging*, 5, n° 3, 1983.
- [4] A. J. DEVANEY, A filtered back propagation algorithm for diffraction tomography, *Ultrasonic Imaging*, 4, 1982.
- [5] S. H. GRAY, One dimensional velocity inversion for acoustic waves, numerical results, *J. Acoust. Soc. Amer.*, 69, n° 1, 1981.
- [6] L. A. CHERNOV, *Wave propagation in a random medium*, Dover Publications Inc., New York, 1967.
- [7] H. STARK et I. PAUL, An investigation of computerized tomography by direct Fourier inversion and optimum interpolation, *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, BME-28, 1981.
- [8] A. HERMENT et P. PERONNEAU, Une méthode de traitement des signaux échographiques : Amélioration de la qualité des images ultrasonores. *ITBM*, 3, n° 1, 1982.
- [9] R. M. MERSEREAU et A. V. OPPENHEIM, Digital reconstruction of multidimensional signals from their projections, *Proc. IEEE*, 62, 1974.
- [10] J. F. GREENLEAF, S. A. JONHSON, W. F. SAMOYA et F. A. DUCK, Algebraic reconstruction of spatial distributions of acoustic velocities in tissue from their time-of-flight profiles, *Acoustical Holography*, 6, N. BOOTH éd., Plenum Press, New York, 1975.