

Approximations parcimonieuses et localisation de sources complexes ou en environnement réverbérant

Gilles Chardon

Peyresq 2017

Plan

- 1 Rappels de physique et de mathématique des ondes
- 2 Échantillonnage de champs acoustiques

1 Rappels de physique et de mathématique des ondes

- Équation des ondes, équation d'Helmholtz
- Sources et réverbération
- Approximation des solutions et résolution numérique des EDP

2 Échantillonnage de champs acoustiques

Équation des ondes, équation d'Helmholtz

Équation des ondes :

$$\Delta^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = s(t, x)$$

Laplacien :

$$\Delta p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \left(+ \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right)$$

Équation des ondes, équation d'Helmholtz

Équation des ondes :

$$\Delta^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = s(t, x)$$

Laplacien :

$$\Delta p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \left(+ \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right)$$

Dans le domaine de Fourier, équation d'Helmholtz

$$\Delta p + k^2 p = s(x)$$

$k = \omega/c$ est le nombre d'onde.

La vitesse de propagation ne dépend pas de la fréquence, il n'y pas de dispersion.
(Faux par ex. pour les vibrations de plaques et les vagues)

Conditions aux limites

Nécessaires pour garantir l'unicité de la solution.

Dirichlet (matériau conducteur en EM) :

$$p = 0$$

Neumann (paroi rigide en acoustique) :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0$$

Robin (impédance) :

$$\frac{\partial p}{\partial n} + \gamma p = 0$$

Sommerfeld (champ libre) :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial p}{\partial r} - ikp \right) = 0$$

- 1 Rappels de physique et de mathématique des ondes
 - Équation des ondes, équation d'Helmholtz
 - Sources et réverbération
 - Approximation des solutions et résolution numérique des EDP
- 2 Échantillonnage de champs acoustiques

Source ponctuelle en champ libre

Une source ponctuelle correspond à un Dirac dans le second membre de l'équation d'Helmholtz :

$$\Delta p + k^2 p = \delta$$

Avec les conditions de Sommerfeld, la solution s'écrit

$$p \propto H_0(kr) \quad (2D) \quad (1)$$

$$p \propto h_0(kr) = \frac{e^{ikr}}{r} \quad (3D) \quad (2)$$

on l'appelle fonction de Green (G).

Source ponctuelle en champ libre

Une source ponctuelle correspond à un Dirac dans le second membre de l'équation d'Helmholtz :

$$\Delta p + k^2 p = \delta$$

Avec les conditions de Sommerfeld, la solution s'écrit

$$p \propto H_0(kr) \quad (2D) \quad (1)$$

$$p \propto h_0(kr) = \frac{e^{ikr}}{r} \quad (3D) \quad (2)$$

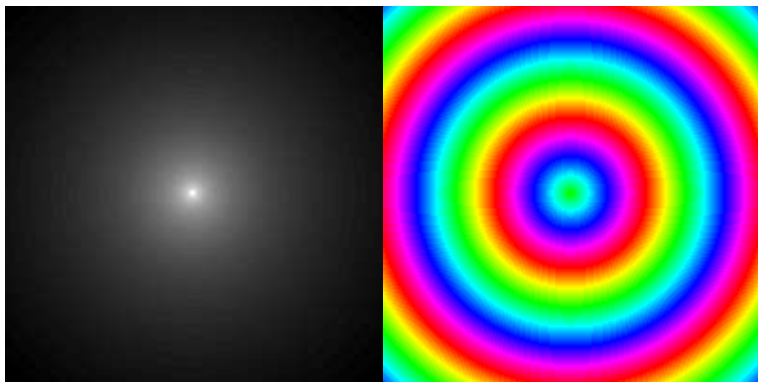
on l'appelle fonction de Green (G).

La solution pour un second membre quelconque s est la convolution de s avec la fonction de Green :

$$p = G \star s.$$

Source ponctuelle en champ libre

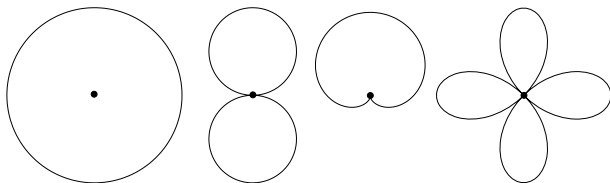
- Décroissance en $1/\sqrt{r}$ (2D) ou $1/r$ (3D)
- Phase $\phi = kr$ (approx en 2D, exact en 3D).



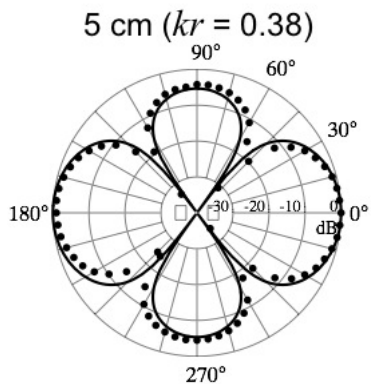
Sources complexes, directivité

Toutes les sources ne sont pas ponctuelles. Ex :

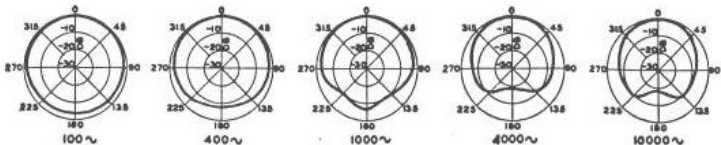
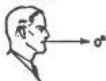
- haut-parleur non bafflé
- diapason
- voix humaine, etc.



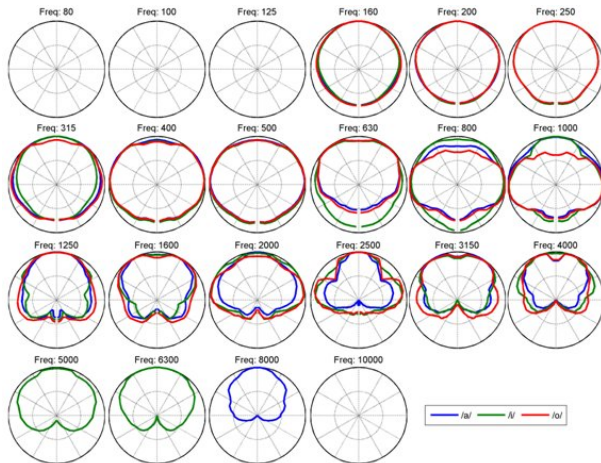
Diapason



Voix humaine



Voix humaine



Sources complexes, directivité

On peut modéliser ces sources par des combinaisons de Dirac et de ses dérivées.

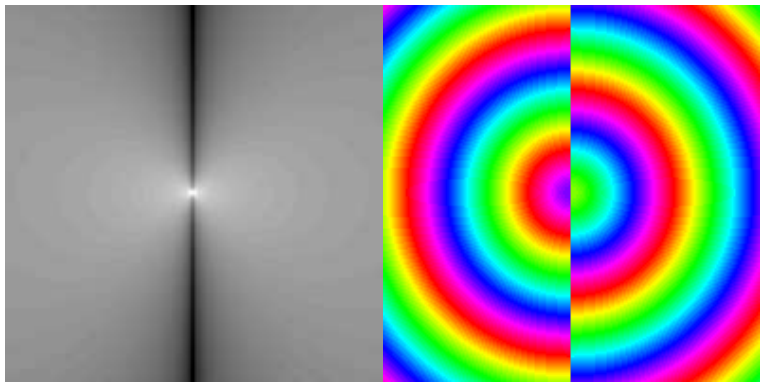
Le champ rayonné peut se décomposer en somme de Fourier-Bessel (2D) ou d'harmoniques sphériques.

$$p = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \alpha_l H_l(kr) e^{in\theta} \quad (2D) \quad (3)$$

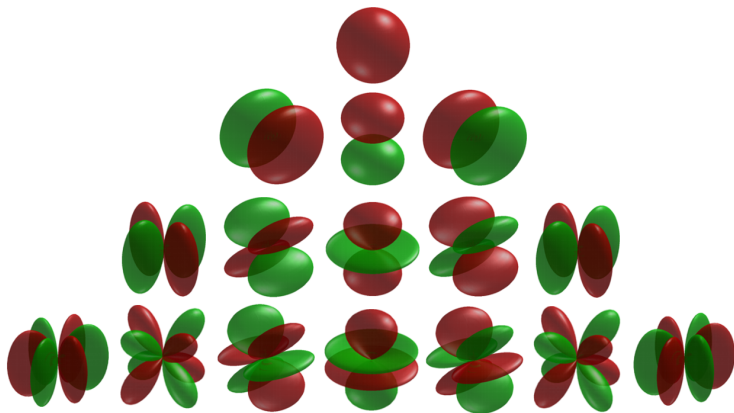
$$p = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \alpha_{lm} h_l(kr) Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (3D) \quad (4)$$

Multipoles 2D

Dipole



Multipoles 3D



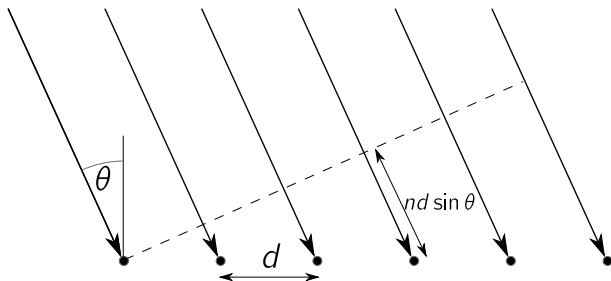
Sources en champ lointain

En champ lointain (distance source-réseau plus grande que longueur d'onde et taille du réseau)

- le front d'onde est quasiment plan
- la décroissance de la fonction de Green n'est plus visible.
- l'angle d'observation de la source est constant pour tout le réseau.

On approxime alors le champ rayonné par une source par une onde plane :

$$p = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$



Réverbération, modes propres

On se place maintenant dans un domaine fini, avec des conditions aux bords rigides.

$$\begin{cases} \Delta p + k^2 p = s \\ \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \end{cases}$$

On ne peut plus écrire la solution comme une convolution (perte de l'invariance par translation).

Réverbération, modes propres

On se place maintenant dans un domaine fini, avec des conditions aux bords rigides.

$$\begin{cases} \Delta p + k^2 p = s \\ \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \end{cases}$$

On ne peut plus écrire la solution comme une convolution (perte de l'invariance par translation).

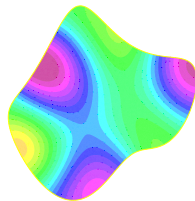
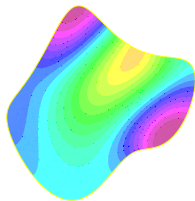
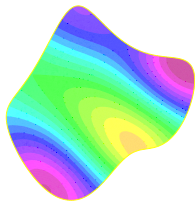
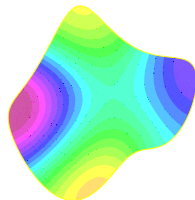
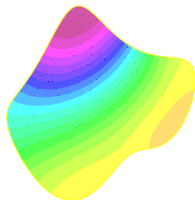
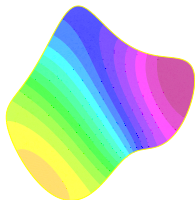
Mais on peut décomposer en modes propres. Pour certaines fréquences, il existe des solutions non nulles de

$$\begin{cases} \Delta p + k^2 p = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \end{cases}$$

Sous ces conditions, le laplacien est un opérateur symétrique, et ces solutions forment une base de L^2 .

Réverbération, modes propres

Premiers modes propres d'une cavité 2D.



Réverbération, modes propres

On peut décomposer la source et la pression dans la base des modes propres :

$$p = \sum_n p_n u_n \quad (5)$$

$$s = \sum_n s_n u_n \quad (6)$$

Réécriture de l'équation d'Helmholtz dans la base des modes propres :

$$\Delta p + k^2 p = s \quad (7)$$

$$\Delta \sum_n p_n u_n + k^2 \sum_n p_n u_n = \sum_n s_n u_n \quad (8)$$

$$p_n = \frac{s_n}{k^2 - k_n^2} \quad (9)$$

Si la source est ponctuelle au point x_s ($s_n = \langle \delta_{x_s}, u_n \rangle = u_n(x_s)$),

$$p(x) = \sum_n \frac{u_n(x_s) u(x)}{k^2 - k_n^2}$$

Conclusion de la physique

L'approximation d'une source par une onde plane est valable seulement en champ lointain.

En général, il faut tenir compte

- de la directivité des sources,
- des conditions aux limites (réverbération)

- 1 Rappels de physique et de mathématique des ondes
 - Équation des ondes, équation d'Helmholtz
 - Sources et réverbération
 - Approximation des solutions et résolution numérique des EDP
- 2 Échantillonnage de champs acoustiques

Problème direct

La localisation de source est le problème inverse associé au problème direct suivant :

Étant données :

- une distribution de sources de position, puissance, et directivité connues
- des conditions aux limites,

calculer le champ rayonné par les sources.

C'est, en dehors des cas simples (champ libre, ou domaine et conditions aux bords simples), impossible analytiquement.

Décomposition de la solution

Une solution d'une EDP linéaire peut se décomposer en

$$p = p_s + p_h$$

- une solution p_s de l'EDP avec second membre, sans conditions aux limites,
- une solution p_h de l'EDP sans second membre, telle que la somme vérifie les conditions aux limites.

Décomposition de la solution

Une solution d'une EDP linéaire peut se décomposer en

$$p = p_s + p_h$$

- une solution p_s de l'EDP avec second membre, sans conditions aux limites,
- une solution p_h de l'EDP sans second membre, telle que la somme vérifie les conditions aux limites.

On peut prendre pour p_s la solution en champ libre ($p_s = G \star s$).

Reste à calculer la solution homogène :

$$\begin{cases} \Delta p_h + k^2 p_h = 0 \\ \frac{\partial p_h}{\partial n} = -\frac{\partial p_s}{\partial n} \end{cases} \quad \text{sur la frontière}$$

Méthode des éléments finis

La méthode standard pour la résolution des EDP elliptiques.

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = f \end{cases} \quad \text{sur la frontière}$$

Méthode des éléments finis

La méthode standard pour la résolution des EDP elliptiques.

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = f \end{cases} \quad \text{sur la frontière}$$

Première étape : formulation faible de l'EDP :

$$\forall v, \quad \int_{\Omega} (\Delta u)v + k^2 \int_{\Omega} uv = 0$$

Méthode des éléments finis

La méthode standard pour la résolution des EDP elliptiques.

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = f \end{cases} \quad \text{sur la frontière}$$

Première étape : formulation faible de l'EDP :

$$\forall v, \quad \int_{\Omega} (\Delta u)v + k^2 \int_{\Omega} uv = 0$$

On applique la formule de Green :

$$\int_{\Omega} (\Delta u)v = - \int_{\Omega} \text{grad } u \cdot \text{grad } v + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n}$$

Méthode des éléments finis

La méthode standard pour la résolution des EDP elliptiques.

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = f \end{cases} \quad \text{sur la frontière}$$

Première étape : formulation faible de l'EDP :

$$\forall v, \quad \int_{\Omega} (\Delta u)v + k^2 \int_{\Omega} uv = 0$$

On applique la formule de Green :

$$\int_{\Omega} (\Delta u)v = - \int_{\Omega} \text{grad } u \cdot \text{grad } v + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n}$$

On obtient :

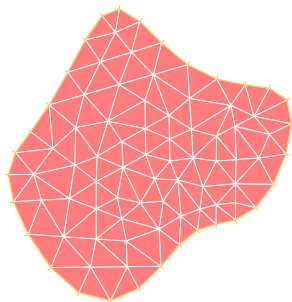
$$-k^2 \int_{\Omega} uv + \int_{\Omega} \text{grad } u \cdot \text{grad } v = \int_{\partial\Omega} vf$$

Méthode des éléments finis

Deuxième étape : on discrétise l'espace. On approxime par des fonctions linéaires par morceaux (espace V_h).

En prenant pour v_h les vecteurs d'une base de V_h , on ramène la résolution de l'EDP à la résolution d'un système linéaire.

$$-k^2 \int_{\Omega} u_h v_h + \int_{\Omega} \text{grad } u_h \cdot \text{grad } v_h = \int_{\partial\Omega} v_h f_h$$



Méthode des éléments finis

Simulation d'une source ponctuelle dans une cavité avec Freefem++.



Méthode des solutions particulières

La méthode des éléments finis n'utilise l'EDP que pour la construction du système linéaire, pas pour l'approximation.

Une autre famille de méthodes consiste à utiliser l'EDP pour la construction des approximations des solutions :

- méthode des éléments de frontière (BEM)
- méthodes des solutions fondamentales (MFS)
- méthodes des solutions particulières (MPS)

Ces approximations donnent une représentation des champs acoustiques de basse dimension.

Harmoniques sphériques dans une boule

Résultat classique :

Une solution de l'équation d'Helmholtz

$$\Delta p + k^2 p = 0$$

peut se développer comme une série d'harmoniques sphériques

$$p = \sum_{l \in \mathbf{N}} \sum_{-l \leq m \leq l} p_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) j_l(kr)$$

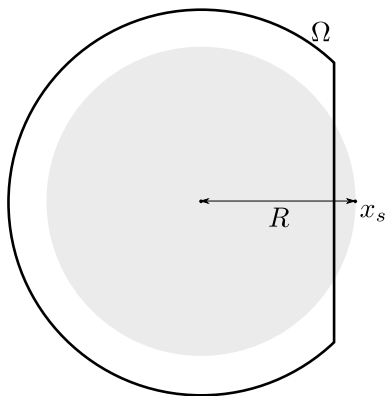
- Y_{lm} harmoniques sphériques, fonctions propres de Δ sur la sphère
- j_l l -ième fonction de Bessel sphérique

Dans un disque :

$$p = \sum_{n \in \mathbf{Z}} p_n J_n(kr) e^{in\theta}$$

Domaine arbitraire

C'est faux en général



Théorème de Graf :

$$p = H_0(k\|x - x_s\|) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} H_n(kR) J_n(kr) e^{in\theta}$$

ne converge pas pour $r > R$:
 $H_n(kR) J_n(kr) \sim (r/R)^n$.

Solution : on approxime p par une suite.

Théorie de Vekua

La théorie de Vekua construit des opérateurs inversibles et continus entre fonctions holomorphes (ou harmoniques), et solutions de l'équation d'Helmholtz

$$V_1[\phi](x) = \phi(x) - \frac{k|x|}{2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}} J_1(k|x|\sqrt{1-t}) dt$$

$$V_2[\phi](x) = \phi(x) + \frac{k|x|}{2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} h_1(k|x|\sqrt{1-t}) dt$$

Une méthode d'approximation pour les fonctions holomorphes (par ex. le théorème de Runge) peut être convertie en approximation pour l'équation d'Helmholtz.

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

$$\bar{\partial}f = 0$$



$$\Delta u + k^2 u = 0$$

$$\bar{\partial}f = 0 \quad \approx \sum_{n=0}^L a_n z^n$$



$$\Delta u + k^2 u = 0$$

Théorie de Vekua

$$\bar{\partial}f = 0 \quad \approx \quad \sum_{n=0}^L a_n z^n$$



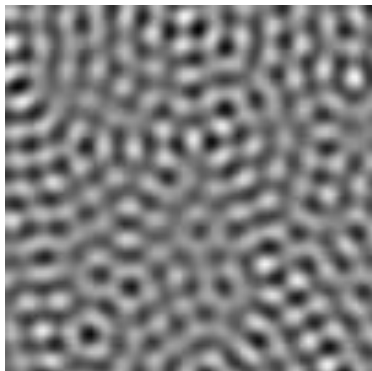
$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad \approx \quad \sum_{n=-L}^L b_n J_n(kr) e^{in\theta}$$

$$\bar{\partial}f = 0 \quad \approx \quad \sum_{n=0}^L a_n z^n$$

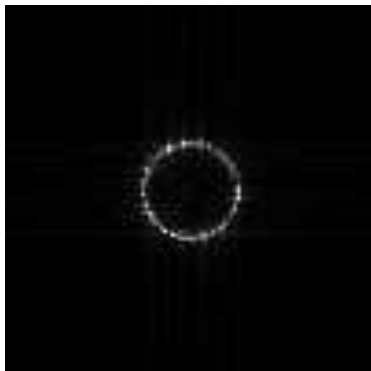


$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad \approx \quad \sum_{n=-L}^L b_n J_n(kr) e^{in\theta} \quad \approx \quad \sum_{m=-L}^L c_n e^{i\vec{k}_m \cdot \vec{x}}$$

Approximation en ondes planes et FFT2



soundfield



FFT2

Approximation dans les espaces de Sobolev

La convergence de l'approximation u_N de u est donnée par¹

Theorem (Moiola et al., 2011)

Si $u \in H^q(\Omega)$, et Ω est convexe, alors il existe une suite u_N telle que

$$u_N = \sum_{-N \leq n \leq N} u_n^N J_n(kr) e^{in\theta}$$

et $\forall p \leq q, \epsilon > 0$;

$$\|u - u_N\|_{H^p} \leq CN^{p-q-\epsilon} \|u\|_{H^q}$$

Traduction : si u et ses dérivées jusqu'à l'ordre q sont d'énergie finie, on peut approximer u et ses dérivées jusqu'à l'ordre p par des sommes de Fourier-Bessel. Résultat similaire, un peu plus faible, en 3D avec les harmoniques sphériques.

1. A. MOIOLA, R. HIPTMAIR et I. PERUGIA. "Plane wave approximation of homogeneous Helmholtz solutions". In : *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)* 62 (5 2011), p. 809–837. ISSN : 0044-2275.

Autres modèles

Cette méthode se généralise à d'autres modèles physiques :

- électromagnétisme (Maxwell, Moiola)
- élasticité (Moiola)
- vibrations de plaques (Kirchhoff-Love, Reissner-Mindlin)²

On décompose les solutions de ces modèles comme somme de solutions de l'équation d'Helmholtz avec différents k .

2. G. CHARDON et L. DAUDET. "Low-complexity computation of plate eigenmodes with Vekua approximations and the Method of Particular Solutions". In : *Computational Mechanics* 52 (5 2013), p. 983–992.

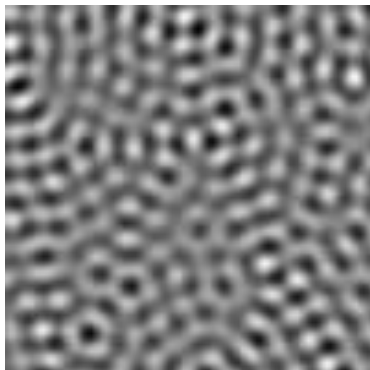
1 Rappels de physique et de mathématique des ondes

2 Échantillonnage de champs acoustiques

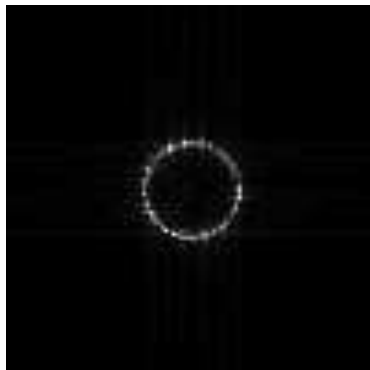
- Résultats théoriques
- Conception de réseaux de microphones
- Exemples

Échantillonnage de champs acoustiques

On veut mesurer le champ acoustique dans un domaine fini donné.
Combien de microphones, où ?



soundfield



FFT2

On peut appliquer Shannon, mais il y a un gros trou dans le spectre, comment l'utiliser ?

Estimation d'approximations en ondes planes ou en harmoniques sphériques

Pour mesurer un champ acoustique, on estime les coefficients p_{lm} de sa décomposition en harmoniques sphériques pour un ordre fixé :

$$\begin{aligned} p &\approx p_N = \sum_{l \in \mathbf{Z}} \sum_{-l \leq m \leq l} p_{lm}^N Y_{lm}(\theta, \phi) j_l(kr) \\ &\approx \sum_{l \in \mathbf{Z}} \sum_{-l \leq m \leq l} \tilde{p}_{lm}^N Y_{lm}(\theta, \phi) j_l(kr) = \tilde{p}_N \end{aligned}$$

Combien d'échantillons ? Où les mesurer ?

1 Rappels de physique et de mathématique des ondes

2 Échantillonnage de champs acoustiques

- Résultats théoriques
- Conception de réseaux de microphones
- Exemples

Deux outils

$K(m)$ (Cohen et al.)

Étant donné une approximation et un échantillonnage, estime le nombre minimum d'échantillons pour estimer de façon stable les coefficients. ^a

a. A. COHEN, M. A. DAVENPORT et D. LEVIATAN. "On the Stability and Accuracy of Least Squares Approximations". In : *Foundations of Computational Mathematics* 13.5 (2013), p. 819–834.

Magic points (Maday et al.)

Étant donnée une approximation, donne des points d'interpolation. ^a

a. Y. MADAY et al. "A general multipurpose interpolation procedure: The magic points". In : *Comm. Pure Appl. Math.* 8.1 (2009), p. 383–404.

Approximation moindres carrés

On veut échantillonner la fonction f

On fixe

- une approximation V_m (suite d'espaces de dimension m), où f est approchée par f_m ,
- une densité μ qu'on utilise pour tirer les points d'échantillonnage
- un ordre d'approximation m
- un nombre d'échantillons n ($\geq m$)

On estime \tilde{f}_m par les moindres carrés.

Combien faut-il d'échantillons pour assurer la stabilité de l'interpolation ?

$$\|f - f_m\| \approx \|f - \tilde{f}_m\|$$

On calcule

$$K(m) = \sup_{x \in \Omega} \sum_{i=1}^m |e_i(x)|^2$$

où (e_i) est une base orthogonale de V_m avec pour mesure μ .

Theorem (Cohen, Davenport, Leviatan)

Si

$$K(m) \leq c \frac{n}{\log n},$$

alors l'espérance de l'erreur d'estimation vérifie

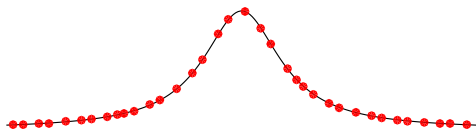
$$E(\|f - \tilde{f}_m\|_{2,\mu}^2) \leq c' \|f - f_m\|_{2,\mu}^2$$

En pratique, $n \approx K(m)$ est suffisant pour garantir $\|f - \tilde{f}_m\|_2 \approx \|f - f_m\|_2$.

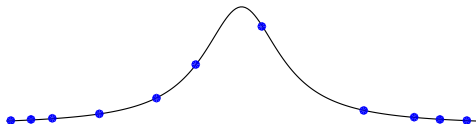
Exemple simple

Approximation polynomiale sur $[-1, 1]$: $V_n = \text{span}_{0 \leq k \leq n} x^k$

Densité uniforme, $\mu = \frac{1}{2} \mathbf{1}$: $K(m) = m^2$

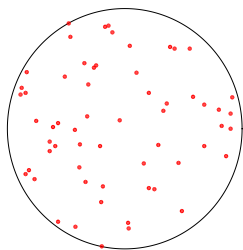


Densité Tchebychev, $\mu = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$: $K(m) = 2m - 1$



Application aux solutions de l'équation d'Helmholtz

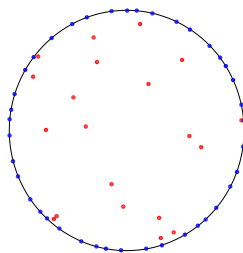
Fourier-Bessel (K_2) ou harmoniques sphériques (K_3)³



Densité uniforme

$$K_2(m) = O(m^2)$$

$$K_3(m) = O(m^{3/2})$$



Densité mixte

$(1 - \alpha)$ à l'intérieur + α sur le bord

$$K_{2,3}(m) \sim \frac{1}{\alpha} m.$$

3. G. CHARDON, A. COHEN et L. DAUDET. "Reconstruction of solutions to the Helmholtz equation from punctual measurements". In : *10th International Conference on Sampling Theory and Applications*. Bremen, Germany, juil. 2013.

1 Rappels de physique et de mathématique des ondes

2 Échantillonnage de champs acoustiques

- Résultats théoriques
- Conception de réseaux de microphones
- Exemples

Méthode de conception

On décompose le réseau en deux sous-réseaux

- un sous-réseau extérieur (Magic points sur les traces des harmoniques sphériques sur le bord du domaine)
- un sous-réseau intérieur.

Pour concevoir le sous-réseau intérieur, il faut comprendre pourquoi les points intérieurs sont nécessaires⁴.

4. G. CHARDON, W. KREUZER et M. NOISTERNIG. "Design of Spatial Microphone Arrays for Sound Field Interpolation". In : *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing* 9.5 (août 2015), p. 780–790. ISSN : 1932-4553. DOI : 10.1109/JSTSP.2015.2412097.

Magic points

Étant donnée une base u_n de N fonctions, on identifie N points d'échantillonnage x_n .

$$x_0 = \operatorname{argmax}_x |u_0(x)|$$

et

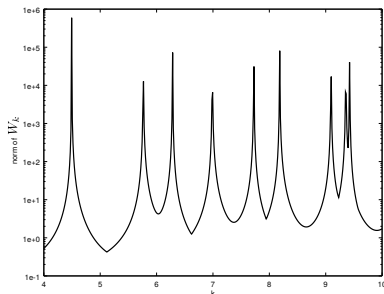
$$x_n = \operatorname{argmax}_x |v_n(x)|$$

où v_n est une combinaison linéaire des u_m pour $m \leq n$, telle que $v_n(x_m) = 0$ pour $m < n$.

Mesures intérieures

Les instabilités proviennent des fréquences propres.

Norme de l'opérateur d'interpolation :



À une fréquence propre k_n , il existe un espace de dimension d_n de fonctions nulles sur le bord, invisibles pour le réseau extérieur.

On capture ces modes avec les points intérieurs.

Le nombre de points intérieurs est $\max d_n$.

Optimisation des points intérieurs

On trouve les points intérieurs par une adaptation des Magic points : à chaque itération, le prochain point est choisi en utilisant tous les espaces propres E_j :

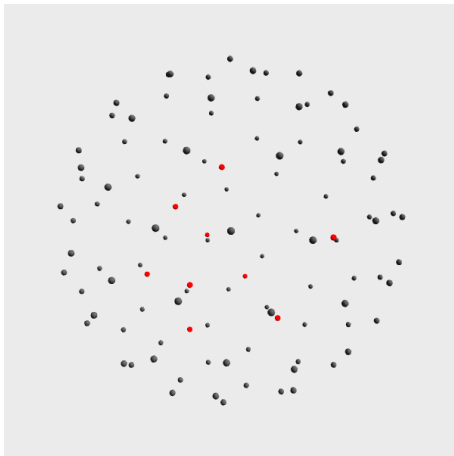
$$x_k = \operatorname{argmax}_{x \in \Omega} \min_j \max_{\substack{p \in E_j \\ \|p\|=1 \\ (p(x_i)=0)_{0 < i < k}}} |p(x)|.$$

1 Rappels de physique et de mathématique des ondes

2 Échantillonnage de champs acoustiques

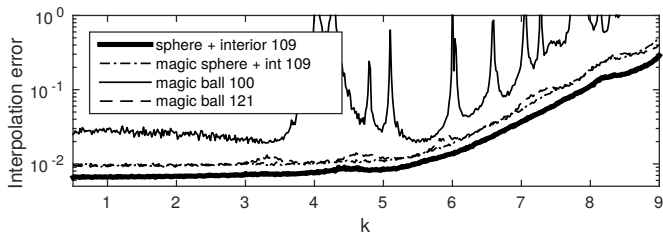
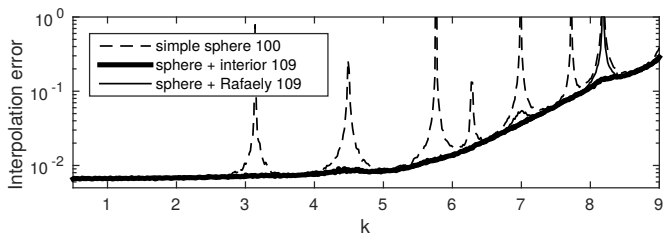
- Résultats théoriques
- Conception de réseaux de microphones
- Exemples

Réseau sphérique

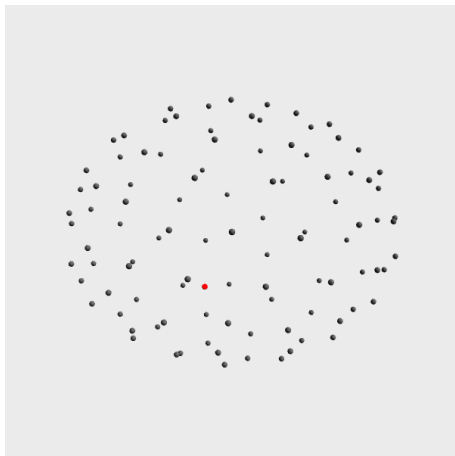


100 microphones extérieurs, 9 microphones intérieurs

Réseau sphérique

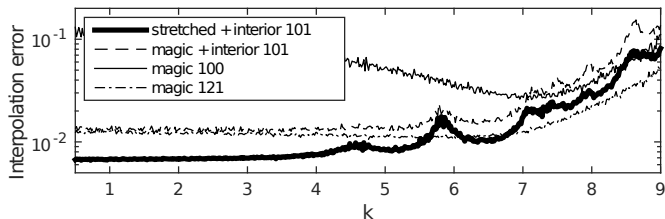
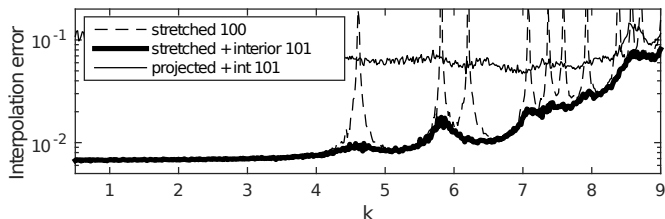


Réseau ellipsoïdal

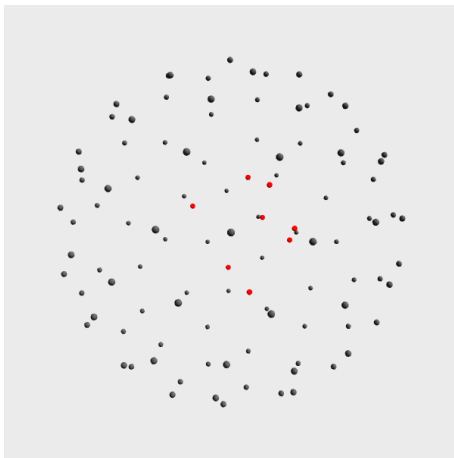


Les espaces propres sont de dimension 1 : un point intérieur suffit.

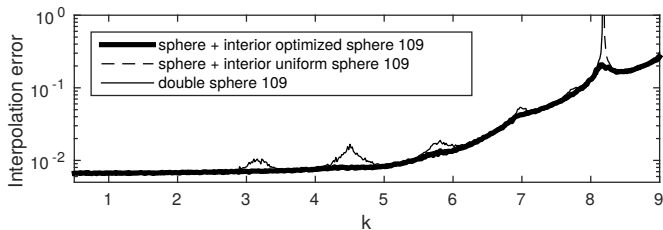
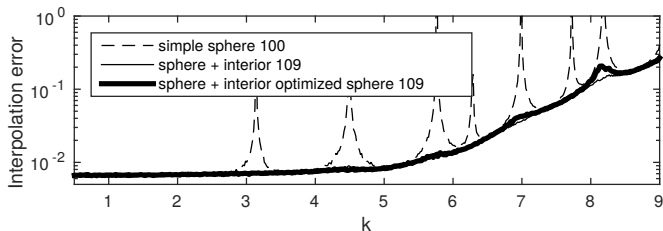
Réseau ellipsoidal

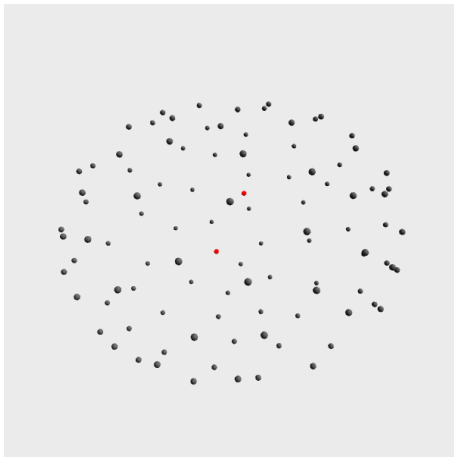


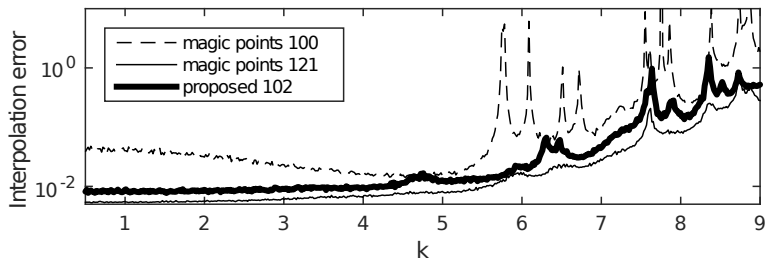
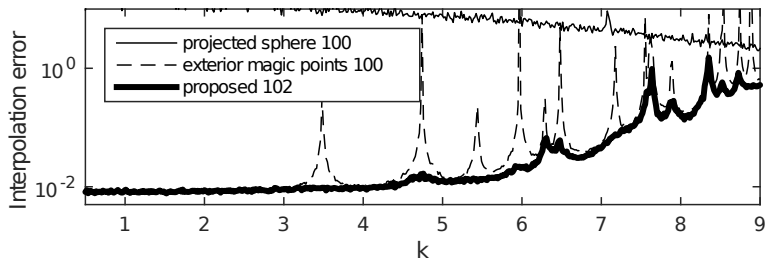
Sphère double



Sphère double







Échantillonnage - Conclusion

Pour l'échantillonnage de solutions de l'équation d'Helmholtz :

- la plupart des mesures sont sur le bord du domaine
- les points intérieurs servent à capturer les modes propres
- la distribution de points sur le bord est non-uniforme
- on peut essayer de réintroduire de la structure (mécanique ou mathématique)