

Méthodes multilinéaires en traitement d'antenne

Sebastian MIRON, David BRIE



École d'été de Peyresq, 2017

Introduction

- Antennes de très grande dimension
- Estimation de la Direction D'Arrivée (DDA)

Traitement d'antenne fondé sur ESPRIT

- ESPRIT
- Multiple-Invariance ESPRIT

Traitement d'antenne fondé sur CANDECOMP/PARAFAC (CP)

- Antennes avec invariance translationnelle multiple (cas général)
- Antennes multi-échelle
- Antennes avec diversité de polarisation

Traitement d'antenne fondé sur la HOSVD

- Tensor-MUSIC
- Tensor-ESPRIT

Conclusions

Plan

Introduction

- Antennes de très grande dimension
- Estimation de la Direction D'Arrivée (DDA)

Traitement d'antenne fondé sur ESPRIT

- ESPRIT
- Multiple-Invariance ESPRIT

Traitement d'antenne fondé sur CANDECOMP/PARAFAC (CP)

- Antennes avec invariance translationnelle multiple (cas général)
- Antennes multi-échelle
- Antennes avec diversité de polarisation

Traitement d'antenne fondé sur la HOSVD

- Tensor-MUSIC
- Tensor-ESPRIT

Conclusions

Introduction

- Antennes de très grande dimension

- Estimation de la Direction D'Arrivée (DDA)

Traitement d'antenne fondé sur ESPRIT

- ESPRIT

- Multiple-Invariance ESPRIT

Traitement d'antenne fondé sur CANDECOMP/PARAFAC (CP)

- Antennes avec invariance translationnelle multiple (cas général)

- Antennes multi-échelle

- Antennes avec diversité de polarisation

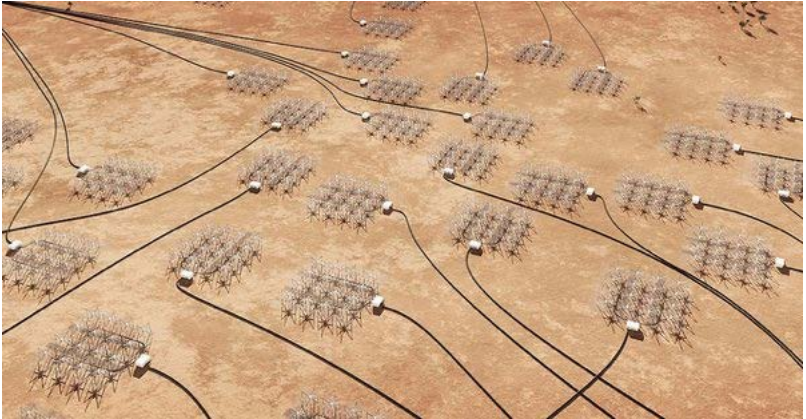
Traitement d'antenne fondé sur la HOSVD

- Tensor-MUSIC

- Tensor-ESPRIT

Conclusions

Antennes de très grande dimension



- ▶ Murchison Widefield Array - Western Australia
- ▶ 3 km d'envergure, résolution angulaire 1 min d'arc
- ▶ flux de données brutes ≈ 1 Gbyte/s

Antennes de très grande dimension



- ▶ Le grand réseau d'antennes de l'Atacama (ALMA) - les Andes chiliennes
- ▶ 16 km d'envergure, résolution angulaire 35 ms d'arc (2 fois mieux que Hubble)

Contraintes sur la conception de l'antenne et de l'algorithme d'estimation des Directions d'Arrivée (DDA) :

1. Estimation non-ambigue des DDA $\rightsquigarrow$ respect de l'échantillonnage spatial (Shannon)
2. Maillage peu dense $\rightsquigarrow$ coûts matériel et de calcul réduits
3. Prise en compte de la structure complexe des données
4. Algorithmes efficaces de traitement $\rightsquigarrow$ co-conception de l'antenne et de l'algorithme de traitement

😊 Méthodes multilinéaires 😊

Contraintes sur la conception de l'antenne et de l'algorithme d'estimation des Directions d'Arrivée (DDA) :

1. Estimation non-ambigue des DDA $\rightsquigarrow$ respect de l'échantillonnage spatial (Shannon)
2. Maillage peu dense $\rightsquigarrow$ coûts matériel et de calcul réduits
3. Prise en compte de la structure complexe des données
4. Algorithmes efficaces de traitement $\rightsquigarrow$ co-conception de l'antenne et de l'algorithme de traitement

😊 Méthodes multilinéaires 😊

Plan

Introduction

Antennes de très grande dimension

Estimation de la Direction D'Arrivée (DDA)

Traitement d'antenne fondé sur ESPRIT

ESPRIT

Multiple-Invariance ESPRIT

Traitement d'antenne fondé sur CANDECOMP/PARAFAC (CP)

Antennes avec invariance translationnelle multiple (cas général)

Antennes multi-échelle

Antennes avec diversité de polarisation

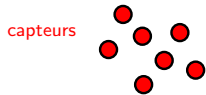
Traitement d'antenne fondé sur la HOSVD

Tensor-MUSIC

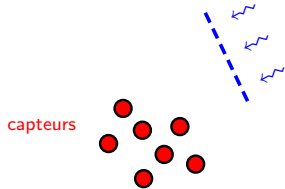
Tensor-ESPRIT

Conclusions

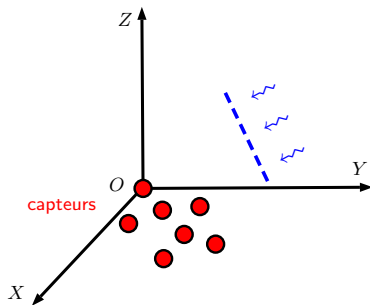
Estimation de la Direction D'Arrivée (DDA)



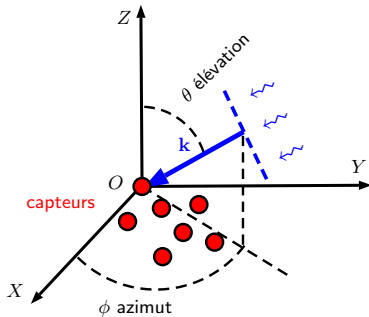
Estimation de la Direction D'Arrivée (DDA)



Estimation de la Direction D'Arrivée (DDA)



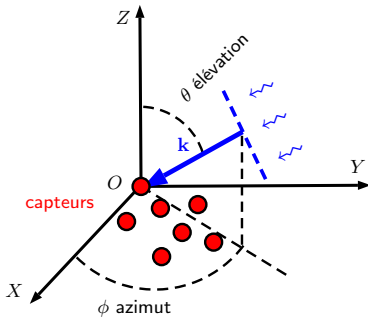
Estimation de la Direction D'Arrivée (DDA)



Vecteur unité de la DDA :

$$\mathbf{k} = [\sin \theta \cos \phi \quad \sin \theta \sin \phi \quad \cos \theta]^T$$

Estimation de la Direction D'Arrivée (DDA)



Vecteur unité de la DDA :

$$\mathbf{k} = [\sin \theta \cos \phi \quad \sin \theta \sin \phi \quad \cos \theta]^T$$

Hypothèses :

- ▶ sources bande-étroite
- ▶ front d'onde plan
- ▶ capteurs omnidirectionnels
- ▶ bruit gaussien de moyenne nulle, additif, blanc (spatialement et temporellement)
- ▶ sources spatialement cohérentes, décorréées du bruit

Estimation de la DDA (problème direct)

P sources bande-étroite ; L capteurs ($P < L$) ; K échantillons temporels

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{p=1}^P \mathbf{a}(\mathbf{k}_p) s_p(t) + \mathbf{b}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t)$$

- ▶ $\mathbf{y}(t)$ ($L \times 1$) : vecteur de données acquises par l'antenne
- ▶ $\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\mathbf{k}_1), \dots, \mathbf{a}(\mathbf{k}_P)]$ ($L \times P$) : matrice de vecteurs directionnels
- ▶ $s_p(t)$: signal temporel de la source p
- ▶ $\mathbf{x}(t) = [s_1(t), \dots, s_P(t)]$ ($P \times 1$) : vecteur de signaux source
- ▶ $\mathbf{b}(t)$ ($L \times 1$) : vecteur de bruit

Considérons K échantillons temporels $t_1, t_2, \dots, t_K$

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{y}(t_1), \dots, \mathbf{y}(t_K)] = \mathbf{A}[\mathbf{x}(t_1), \dots, \mathbf{x}(t_K)] + \mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{S}^T + \mathbf{B}$$

- ▶ $\mathbf{Y}$ ($L \times K$) : matrice de données
- ▶ $\mathbf{S} = [\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_P]$ ($K \times P$) : matrice de sources
- ▶ $\mathbf{B} = [\mathbf{b}(t_1), \dots, \mathbf{b}(t_K)]$: matrice de bruit

Estimation de la DDA (problème direct)

P sources bande-étroite ; L capteurs ($P < L$) ; K échantillons temporels

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{p=1}^P \mathbf{a}(\mathbf{k}_p) s_p(t) + \mathbf{b}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t)$$

- ▶ $\mathbf{y}(t)$ ($L \times 1$) : vecteur de données acquises par l'antenne
- ▶ $\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\mathbf{k}_1), \dots, \mathbf{a}(\mathbf{k}_P)]$ ($L \times P$) : matrice de vecteurs directionnels
- ▶ $s_p(t)$: signal temporel de la source p
- ▶ $\mathbf{x}(t) = [s_1(t), \dots, s_P(t)]$ ($P \times 1$) : vecteur de signaux source
- ▶ $\mathbf{b}(t)$ ($L \times 1$) : vecteur de bruit

Considérons K échantillons temporels $t_1, t_2, \dots, t_K$

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{y}(t_1), \dots, \mathbf{y}(t_K)] = \mathbf{A}[\mathbf{x}(t_1), \dots, \mathbf{x}(t_K)] + \mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{S}^T + \mathbf{B}$$

- ▶ $\mathbf{Y}$ ($L \times K$) : matrice de données
- ▶ $\mathbf{S} = [\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_P]$ ($K \times P$) : matrice de sources
- ▶ $\mathbf{B} = [\mathbf{b}(t_1), \dots, \mathbf{b}(t_K)]$: matrice de bruit

Estimation de la DDA (problème inverse)

↪ Estimer les DDA : $\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_P$
(ou de façon équivalente $\mathbf{A}$) à partir des mesures $\mathbf{Y}$

Problème mal posé (non-unicité) :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{S}^T = (\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1})(\mathbf{T}\mathbf{S}^T) = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{S}}^T$$

Solutions :

- ▶ Recherche sur une grille :
 - ▶ exhaustive (e.g., formation de voies, MUSIC)
 - ▶ greedy (e.g. algorithmes d'estimation "sparse", ...)
 - ▶ ...
- ▶ Utilisation d'une diversité additionnelle :
 - ▶ invariance spatiale ↪ décompositions matricielles (2D) conjointes (e.g. ESPRIT)
 - ▶ invariance spatiale multiple, polarisation, longueur d'onde, etc. ↪ **décompositions (N -D) des tableaux multidimensionnels (tenseurs)**

Estimation de la DDA (problème inverse)

↪ Estimer les DDA : $\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_P$
(ou de façon équivalente $\mathbf{A}$) à partir des mesures $\mathbf{Y}$

Problème mal posé (non-unicité) :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{S}^T = (\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1})(\mathbf{T}\mathbf{S}^T) = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{S}}^T$$

Solutions :

- ▶ Recherche sur une grille :
 - ▶ exhaustive (e.g., formation de voies, MUSIC)
 - ▶ greedy (e.g. algorithmes d'estimation "sparse", ...)
 - ▶ ...
- ▶ Utilisation d'une diversité additionnelle :
 - ▶ invariance spatiale ↪ décompositions matricielles (2D) conjointes (e.g. ESPRIT)
 - ▶ invariance spatiale multiple, polarisation, longueur d'onde, etc. ↪ **décompositions (N -D) des tableaux multidimensionnels (tenseurs)**

Estimation de la DDA (problème inverse)

↪ Estimer les DDA : $\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_P$
(ou de façon équivalente $\mathbf{A}$) à partir des mesures $\mathbf{Y}$

Problème mal posé (non-unicité) :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{S}^T = (\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1})(\mathbf{T}\mathbf{S}^T) = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{S}}^T$$

Solutions :

- ▶ Recherche sur une grille :
 - ▶ exhaustive (e.g., formation de voies, MUSIC)
 - ▶ greedy (e.g. algorithmes d'estimation "sparse", ...)
 - ▶ ...
- ▶ Utilisation d'une diversité additionnelle :
 - ▶ invariance spatiale ↪ décompositions matricielles (2D) conjointes (e.g. ESPRIT)
 - ▶ invariance spatiale multiple, polarisation, longueur d'onde, etc. ↪ **décompositions (N -D) des tableaux multidimensionnels (tenseurs)**

Introduction

- Antennes de très grande dimension
- Estimation de la Direction D'Arrivée (DDA)

Traitement d'antenne fondé sur ESPRIT

- ESPRIT
- Multiple-Invariance ESPRIT

Traitement d'antenne fondé sur CANDECOMP/PARAFAC (CP)

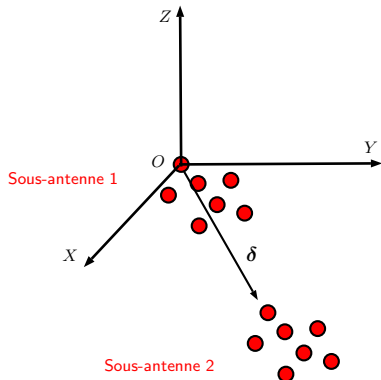
- Antennes avec invariance translationnelle multiple (cas général)
- Antennes multi-échelle
- Antennes avec diversité de polarisation

Traitement d'antenne fondé sur la HOSVD

- Tensor-MUSIC
- Tensor-ESPRIT

Conclusions

Invariance translationnelle unique



Déphasage d'une source incidente entre la sous-antenne 1 et la sous-antenne 2 :

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{k}^T \boldsymbol{\delta}$$

$\mathbf{k}$: la DDA de la source

$\boldsymbol{\delta}$: déplacement entre les sous-antennes

λ : longueur d'onde

ESPRIT - Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques [Roy *et al.*, 86]

Vecteur de données sous-antenne 1 :

$$\mathbf{y}_1(t) = \sum_{p=1}^P \mathbf{a}(\mathbf{k}_p) s_p(t) + \mathbf{b}_1(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_1(t) \quad (L \times 1)$$

Vecteur de données sous-antenne 2 :

$$\mathbf{y}_2(t) = \sum_{p=1}^P \mathbf{a}(\mathbf{k}_p) e^{j \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{k}_p^T \boldsymbol{\delta}} s_p(t) + \mathbf{b}_2(t) = \mathbf{A} \boldsymbol{\Phi} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_2(t) \quad (L \times 1)$$

avec :

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} e^{j \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{k}_1^T \boldsymbol{\delta}} & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & e^{j \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{k}_P^T \boldsymbol{\delta}} \end{bmatrix}$$

Objectif : estimer $\boldsymbol{\Phi} \rightsquigarrow \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_P$ (DDAs)

ESPRIT - Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques [Roy *et al.*, 86]

Vecteur de données sous-antenne 1 :

$$\mathbf{y}_1(t) = \sum_{p=1}^P \mathbf{a}(\mathbf{k}_p) s_p(t) + \mathbf{b}_1(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_1(t) \quad (L \times 1)$$

Vecteur de données sous-antenne 2 :

$$\mathbf{y}_2(t) = \sum_{p=1}^P \mathbf{a}(\mathbf{k}_p) e^{j \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{k}_p^T \boldsymbol{\delta}} s_p(t) + \mathbf{b}_2(t) = \mathbf{A} \boldsymbol{\Phi} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_2(t) \quad (L \times 1)$$

avec :

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} e^{j \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{k}_1^T \boldsymbol{\delta}} & & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & 0 \\ & & & e^{j \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{k}_P^T \boldsymbol{\delta}} \end{bmatrix}$$

Objectif : estimer $\boldsymbol{\Phi} \rightsquigarrow \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_P$ (DDAs)

ESPRIT - Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques [Roy *et al.*, 86]

Vecteur de données sous-antenne 1 :

$$\mathbf{y}_1(t) = \sum_{p=1}^P \mathbf{a}(\mathbf{k}_p) s_p(t) + \mathbf{b}_1(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_1(t) \quad (L \times 1)$$

Vecteur de données sous-antenne 2 :

$$\mathbf{y}_2(t) = \sum_{p=1}^P \mathbf{a}(\mathbf{k}_p) e^{j \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{k}_p^T \boldsymbol{\delta}} s_p(t) + \mathbf{b}_2(t) = \mathbf{A} \boldsymbol{\Phi} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_2(t) \quad (L \times 1)$$

avec :

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} e^{j \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{k}_1^T \boldsymbol{\delta}} & & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & 0 \\ & & & e^{j \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{k}_P^T \boldsymbol{\delta}} \end{bmatrix}$$

Objectif : estimer $\boldsymbol{\Phi} \rightsquigarrow \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_P$ (DDAs)

- Construction du vecteur de données de l'antenne entière :

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1(t) \\ \mathbf{y}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}\Phi \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1(t) \\ \mathbf{b}_2(t) \end{bmatrix}$$

- Calcul de la matrice de covariance des données :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{y}\mathbf{y}} = E\{\mathbf{y}(t)\mathbf{y}^H(t)\} \approx \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{y}(t_k)\mathbf{y}^H(t_k)$$

- Calcul des P premiers vecteurs propres de $\mathbf{R}_{\mathbf{y}\mathbf{y}} \rightsquigarrow \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \end{bmatrix} \quad (2L \times P)$

$$\text{span} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \end{bmatrix} = \text{span} \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}\Phi \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}\Phi \end{bmatrix} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{T} \\ \mathbf{A}\Phi\mathbf{T} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \mathbf{E}_1 = \mathbf{A}\mathbf{T}$ et $\mathbf{E}_2 = \mathbf{A}\Phi\mathbf{T}$, avec $\mathbf{T}$ une matrice régulière

- Construction du vecteur de données de l'antenne entière :

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1(t) \\ \mathbf{y}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}\Phi \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1(t) \\ \mathbf{b}_2(t) \end{bmatrix}$$

- Calcul de la matrice de covariance des données :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{y}\mathbf{y}} = E\{\mathbf{y}(t)\mathbf{y}^H(t)\} \approx \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{y}(t_k)\mathbf{y}^H(t_k)$$

- Calcul des P premiers vecteurs propres de $\mathbf{R}_{\mathbf{y}\mathbf{y}} \rightsquigarrow \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \end{bmatrix} \quad (2L \times P)$

$$\text{span} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \end{bmatrix} = \text{span} \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}\Phi \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}\Phi \end{bmatrix} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{T} \\ \mathbf{A}\Phi\mathbf{T} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \mathbf{E}_1 = \mathbf{A}\mathbf{T}$ et $\mathbf{E}_2 = \mathbf{A}\Phi\mathbf{T}$, avec $\mathbf{T}$ une matrice régulière

- Construction du vecteur de données de l'antenne entière :

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1(t) \\ \mathbf{y}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}\Phi \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1(t) \\ \mathbf{b}_2(t) \end{bmatrix}$$

- Calcul de la matrice de covariance des données :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{y}\mathbf{y}} = E\{\mathbf{y}(t)\mathbf{y}^H(t)\} \approx \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{y}(t_k)\mathbf{y}^H(t_k)$$

- Calcul des P premiers vecteurs propres de $\mathbf{R}_{\mathbf{y}\mathbf{y}} \rightsquigarrow \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \end{bmatrix} \quad (2L \times P)$

$$\text{span} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \end{bmatrix} = \text{span} \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}\Phi \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}\Phi \end{bmatrix} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{T} \\ \mathbf{A}\Phi\mathbf{T} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \mathbf{E}_1 = \mathbf{A}\mathbf{T}$ et $\mathbf{E}_2 = \mathbf{A}\Phi\mathbf{T}$, avec $\mathbf{T}$ une matrice régulière

ESPRIT

- Invariance translationnelle $\rightsquigarrow \text{span}\{\mathbf{A}\} = \text{span}\{\mathbf{E}_1\} = \text{span}\{\mathbf{E}_2\}$
- $\exists \Psi$ régulière, tel que

$$\mathbf{E}_1 \Psi = \mathbf{E}_2$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathbf{A} \mathbf{T} \Psi = \mathbf{A} \Phi \mathbf{T}$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathbf{T} \Psi \mathbf{T}^{-1} = \Phi$$

$$\Updownarrow$$

Φ peut être obtenu par la EVD de Ψ

LS-ESPRIT (ESPRIT classique) : $\Psi = \mathbf{E}_1^\dagger \mathbf{E}_2$

Biaisé !

- Invariance translationnelle $\rightsquigarrow \text{span}\{\mathbf{A}\} = \text{span}\{\mathbf{E}_1\} = \text{span}\{\mathbf{E}_2\}$
- $\exists \Psi$ régulière, tel que

$$\mathbf{E}_1 \Psi = \mathbf{E}_2$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathbf{A} \mathbf{T} \Psi = \mathbf{A} \Phi \mathbf{T}$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathbf{T} \Psi \mathbf{T}^{-1} = \Phi$$

$$\Updownarrow$$

Φ peut être obtenu par la EVD de Ψ

LS-ESPRIT (ESPRIT classique) : $\Psi = \mathbf{E}_1^\dagger \mathbf{E}_2$

Biaisé !

Total Least Squares ESPRIT : TLS-ESPRIT [Roy '87]

Dans $\mathbf{E}_1 \Psi = \mathbf{E}_2$, les deux matrices $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ sont « bruitées »

$$\text{TLS-ESPRIT : } \min_{\Psi, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2} \|\mathbf{R}_1 | \mathbf{R}_2\|_F^2 \quad \text{s. c.} \quad \underbrace{(\mathbf{E}_1 + \mathbf{R}_1)}_{\mathbf{B}} \Psi = \mathbf{E}_2 + \mathbf{R}_2$$

$$\begin{array}{c} \Updownarrow \\ \min_{\Psi, \mathbf{B}} \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{B}\Psi \end{bmatrix} \right\|_F^2 \end{array}$$

Solution : $\rightsquigarrow$ Calcul des vecteurs propres de $[\mathbf{E}_1 | \mathbf{E}_2]^H [\mathbf{E}_1 | \mathbf{E}_2]$ ($2P \times 2P$)

😊 Pas besoin de calibration

😊 Pas de recherche coûteuse sur une grille

😞 Estimation de la matrice de covariance nécessaire

😞 Ne gère pas l'invariance multiple

😞 Ne gère pas les sources cohérentes

Total Least Squares ESPRIT : TLS-ESPRIT [Roy '87]

Dans $\mathbf{E}_1 \Psi = \mathbf{E}_2$, les deux matrices $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ sont « bruitées »

$$\text{TLS-ESPRIT : } \min_{\Psi, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2} \|\mathbf{R}_1 | \mathbf{R}_2\|_F^2 \quad \text{s. c.} \quad \underbrace{(\mathbf{E}_1 + \mathbf{R}_1)}_{\mathbf{B}} \Psi = \mathbf{E}_2 + \mathbf{R}_2$$

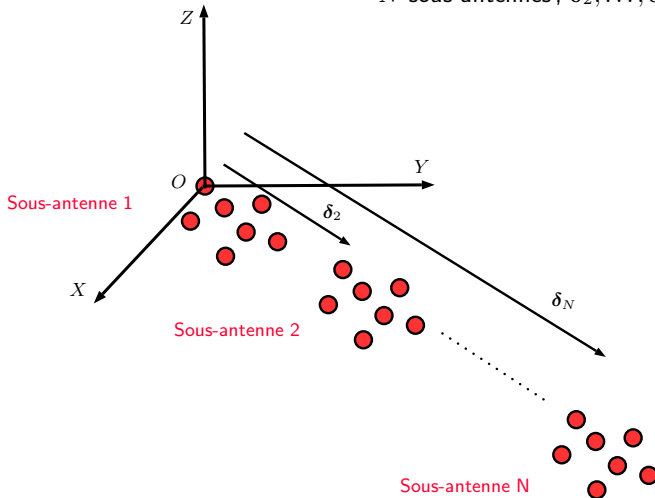
$$\begin{array}{c} \Updownarrow \\ \min_{\Psi, \mathbf{B}} \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{B}\Psi \end{bmatrix} \right\|_F^2 \end{array}$$

Solution : $\rightsquigarrow$ Calcul des vecteurs propres de $[\mathbf{E}_1 | \mathbf{E}_2]^H [\mathbf{E}_1 | \mathbf{E}_2]$ ($2P \times 2P$)

- 😊 Pas besoin de calibration
- 😊 Pas de recherche coûteuse sur une grille
- 😞 Estimation de la matrice de covariance nécessaire
- 😞 Ne gère pas l'invariance multiple
- 😞 Ne gère pas les sources cohérentes

Invariance translationnelle multiple, "colinéaire"

N sous-antennes; $\delta_2, \dots, \delta_N$ colinéaires



Introduction

- Antennes de très grande dimension
- Estimation de la Direction D'Arrivée (DDA)

Traitement d'antenne fondé sur ESPRIT

- ESPRIT
- Multiple-Invariance ESPRIT

Traitement d'antenne fondé sur CANDECOMP/PARAFAC (CP)

- Antennes avec invariance translationnelle multiple (cas général)
- Antennes multi-échelle
- Antennes avec diversité de polarisation

Traitement d'antenne fondé sur la HOSVD

- Tensor-MUSIC
- Tensor-ESPRIT

Conclusions

Fonction coût MI-ESPRIT à minimiser :

$$J(\Psi, \mathbf{B}) = \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{E}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{E}_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{B}\Psi \\ \mathbf{B}\Psi^{\delta_3/\delta_2} \\ \vdots \\ \mathbf{B}\Psi^{\delta_N/\delta_2} \end{bmatrix} \right\|_F^2$$

Notations : $\tilde{\mathbf{E}} \triangleq [\mathbf{E}_1 | \mathbf{E}_2 | \dots | \mathbf{E}_N]$ $\tilde{\Psi} \triangleq [\mathbf{I} | \Psi | \dots | \Psi^{\delta_N/\delta_2}]$

Fonction coût MI-ESPRIT :

$$J(\Psi, \mathbf{B}) = \text{Tr} \left\{ \left[\tilde{\mathbf{E}} - \mathbf{B}\tilde{\Psi} \right]^H \left[\tilde{\mathbf{E}} - \mathbf{B}\tilde{\Psi} \right] \right\}$$

MI-ESPRIT : l'algorithme

1. Initialisation :

$$\tilde{\Psi}^{(0)} \leftarrow \text{TLS-ESPRIT}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2); \quad \mathbf{B}^{(0)} \leftarrow \tilde{\mathbf{E}} \tilde{\Psi}^H \left[\tilde{\Psi} \tilde{\Psi}^H \right]^{-1}$$

2. Mise à jour de $\tilde{\Psi}$:

$$\tilde{\Psi}^{(k+1)} \leftarrow \tilde{\Psi}^{(k)} + \alpha \frac{\partial J^{(k)}(\Psi, \mathbf{B})}{\partial \Psi}$$

3. Mise à jour de $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{B}^{(k+1)} = \tilde{\mathbf{E}} \tilde{\Psi}^{(k)H} \left[\tilde{\Psi}^{(k)} \tilde{\Psi}^{(k)H} \right]^{-1}$$

4. Répéter les pas 2 et 3 jusqu'à convergence

😊 Convergence rapide (bonne initialisation par TLS-ESPRIT)

😞 Pas de solution explicite

😞 Ne gère pas le cas non-colinéaire

MI-ESPRIT : l'algorithme

1. Initialisation :

$$\tilde{\Psi}^{(0)} \leftarrow \text{TLS-ESPRIT}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2); \quad \mathbf{B}^{(0)} \leftarrow \tilde{\mathbf{E}} \tilde{\Psi}^H \left[\tilde{\Psi} \tilde{\Psi}^H \right]^{-1}$$

2. Mise à jour de $\tilde{\Psi}$:

$$\tilde{\Psi}^{(k+1)} \leftarrow \tilde{\Psi}^{(k)} + \alpha \frac{\partial J^{(k)}(\Psi, \mathbf{B})}{\partial \Psi}$$

3. Mise à jour de $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{B}^{(k+1)} = \tilde{\mathbf{E}} \tilde{\Psi}^{(k)H} \left[\tilde{\Psi}^{(k)} \tilde{\Psi}^{(k)H} \right]^{-1}$$

4. Répéter les pas 2 et 3 jusqu'à convergence

😊 Convergence rapide (bonne initialisation par TLS-ESPRIT)

😞 Pas de solution explicite

😞 Ne gère pas le cas non-colinéaire

Introduction

- Antennes de très grande dimension
- Estimation de la Direction D'Arrivée (DDA)

Traitement d'antenne fondé sur ESPRIT

- ESPRIT
- Multiple-Invariance ESPRIT

Traitement d'antenne fondé sur CANDECOMP/PARAFAC (CP)

- Antennes avec invariance translationnelle multiple (cas général)
- Antennes multi-échelle
- Antennes avec diversité de polarisation

Traitement d'antenne fondé sur la HOSVD

- Tensor-MUSIC
- Tensor-ESPRIT

Conclusions

Intérêt du modèle CP en traitement d'antenne

Modèle matriciel (bilinéaire) $\rightsquigarrow$ non-unicité

$$\begin{array}{c} \text{échantillons temporels} \\ \text{capteurs} \end{array} \begin{array}{c} Y \end{array} = \begin{array}{c} \overline{s_1} \\ | \\ a(k_1) \end{array} + \dots + \begin{array}{c} \overline{s_P} \\ | \\ a(k_P) \end{array}$$

Modèle CP (multilinéaire) $\rightsquigarrow$ unicité sous des faibles contraintes (e.g., Kruskal)

$$\begin{array}{c} \text{diversité} \\ \text{échantillons temporels} \\ \text{capteurs} \end{array} \begin{array}{c} Y \end{array} = \begin{array}{c} \diagup d_1 \\ \overline{s_1} \\ | \\ a(k_1) \end{array} + \dots + \begin{array}{c} \diagup d_P \\ \overline{s_2} \\ | \\ a(k_P) \end{array}$$

Introduction

- Antennes de très grande dimension
- Estimation de la Direction D'Arrivée (DDA)

Traitement d'antenne fondé sur ESPRIT

- ESPRIT
- Multiple-Invariance ESPRIT

Traitement d'antenne fondé sur CANDECOMP/PARAFAC (CP)

- Antennes avec invariance translationnelle multiple (cas général)
- Antennes multi-échelle
- Antennes avec diversité de polarisation

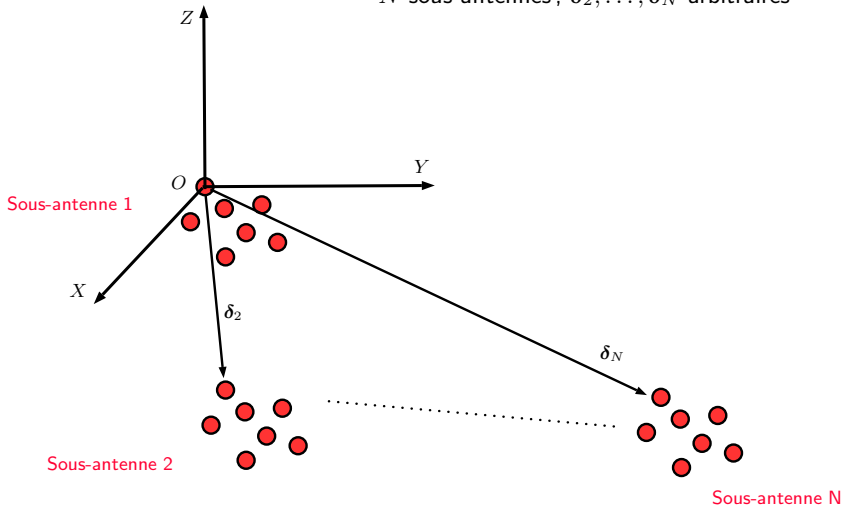
Traitement d'antenne fondé sur la HOSVD

- Tensor-MUSIC
- Tensor-ESPRIT

Conclusions

Invariance translationnelle multiple (cas général)

N sous-antennes; $\delta_2, \dots, \delta_N$ arbitraires



Invariance translationnelle multiple généralisée [Sidiropoulos *et al.* '00]

Vecteurs de données acquises sur les N sous-antennes :

$$\mathbf{y}_1(t) = \sum_{p=1}^P \mathbf{a}(\mathbf{k}_p) s_p(t) + \mathbf{b}_1(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_1(t)$$

$$\mathbf{y}_2(t) = \sum_{p=1}^P \mathbf{a}(\mathbf{k}_p) e^{j \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{k}_p^T \boldsymbol{\delta}_2} s_p(t) + \mathbf{b}_2(t) = \mathbf{A} \boldsymbol{\Phi}_2 \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_2(t)$$

$\vdots$

$$\mathbf{y}_N(t) = \sum_{p=1}^P \mathbf{a}(\mathbf{k}_p) e^{j \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{k}_p^T \boldsymbol{\delta}_N} s_p(t) + \mathbf{b}_N(t) = \mathbf{A} \boldsymbol{\Phi}_N \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_N(t)$$

avec :

$$\boldsymbol{\Phi}_n = \begin{bmatrix} e^{j \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{k}_1^T \boldsymbol{\delta}_n} & & & \\ & 0 & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & e^{j \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{k}_P^T \boldsymbol{\delta}_n} \end{bmatrix} \quad n = 2, \dots, N$$

Invariance translationnelle multiple généralisée

Considérons K échantillons temporels $t_1, t_2, \dots, t_K : \mathbf{Y}(NL \times K)$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_1 \Phi_2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_1 \Phi_N \end{bmatrix} \mathbf{S}^T + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_N \end{bmatrix} = (\mathbf{A} \odot \mathbf{D}) \mathbf{S}^T + \mathbf{B}.$$

Modèle Candecomp/Parafac (CP) d'ordre 3

avec :

- ▶ $\mathbf{S} = [\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_P] \ (K \times P)$: matrice de sources
- ▶ $\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\mathbf{k}_1), \dots, \mathbf{a}(\mathbf{k}_P)] \ (L \times P)$: matrice de vecteurs directionnels

$$\text{▶ } \mathbf{D} = [\mathbf{d}(\mathbf{k}_1), \dots, \mathbf{d}(\mathbf{k}_P)] = \begin{bmatrix} \text{diag}\{\mathbf{I}\}^T \\ \text{diag}\{\Phi_2\}^T \\ \vdots \\ \text{diag}\{\Phi_N\}^T \end{bmatrix} \ (N \times P)$$

Invariance translationnelle multiple généralisée

Ecriture tensorielle (capteurs, temps, sous-antennes) :

$$\mathcal{Y} = \sum_{p=1}^P \mathbf{a}_p \circ \mathbf{s}_p \circ \mathbf{d}_p + \mathcal{B} = \llbracket \mathbf{A}, \mathbf{S}, \mathbf{D} \rrbracket + \mathcal{B} \quad (L \times K \times N)$$

Identifiabilité du modèle (condition de Kruskal) :

$$k_{\mathbf{A}} + k_{\mathbf{S}} + k_{\mathbf{D}} \geq 2P + 2$$

1. Sources non-cohérentes et $K \geq P \Rightarrow k_{\mathbf{A}} + k_{\mathbf{D}} \geq P + 2$
2. Sources non-cohérentes, $K \geq P$ et $\mathbf{A}, \mathbf{D}$ matrices Vandermonde (antenne/sous-antennes de type ULA) :

$$\min(L, P) + \min(N - 1, P) \geq P + 2$$

3. Sources cohérentes $\Rightarrow k_{\mathbf{S}} = 1 \rightsquigarrow$ **non-identifiabilité/ identifiabilité partielle**

Invariance translationnelle multiple généralisée

Ecriture tensorielle (capteurs, temps, sous-antennes) :

$$\mathcal{Y} = \sum_{p=1}^P \mathbf{a}_p \circ \mathbf{s}_p \circ \mathbf{d}_p + \mathcal{B} = \llbracket \mathbf{A}, \mathbf{S}, \mathbf{D} \rrbracket + \mathcal{B} \quad (L \times K \times N)$$

Identifiabilité du modèle (condition de Kruskal) :

$$k_{\mathbf{A}} + k_{\mathbf{S}} + k_{\mathbf{D}} \geq 2P + 2$$

1. Sources non-cohérentes et $K \geq P \Rightarrow k_{\mathbf{A}} + k_{\mathbf{D}} \geq P + 2$
2. Sources non-cohérentes, $K \geq P$ et $\mathbf{A}, \mathbf{D}$ matrices Vandermonde (antenne/sous-antennes de type ULA) :

$$\min(L, P) + \min(N - 1, P) \geq P + 2$$

3. Sources cohérentes $\Rightarrow k_{\mathbf{S}} = 1 \rightsquigarrow$ **non-identifiabilité/ identifiabilité partielle**

Introduction

- Antennes de très grande dimension
- Estimation de la Direction D'Arrivée (DDA)

Traitement d'antenne fondé sur ESPRIT

- ESPRIT
- Multiple-Invariance ESPRIT

Traitement d'antenne fondé sur CANDECOMP/PARAFAC (CP)

- Antennes avec invariance translationnelle multiple (cas général)
- Antennes multi-échelle
- Antennes avec diversité de polarisation

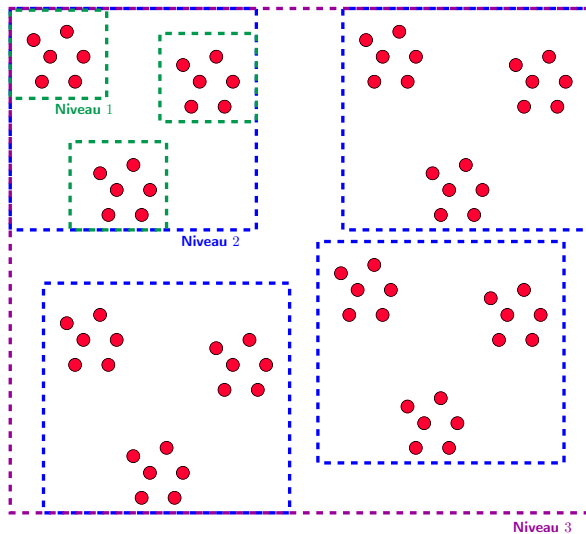
Traitement d'antenne fondé sur la HOSVD

- Tensor-MUSIC
- Tensor-ESPRIT

Conclusions

Diversité d'échelle spatiale : antennes multi-échelle [Miron *et al.* '15]

Idée : Créer une *diversité d'échelle*



N Niveaux d'échelle, $\Delta \leq \lambda/2$ (au niveau 1)

Déphasage pour le capteur $(l_1, l_2, \dots, l_N)$:

$$a_{l_1, l_2, \dots, l_N}(\mathbf{k}) = \exp \left\{ j \frac{2\pi}{\lambda} \sum_{n=1}^N \mathbf{k}^T \mathbf{d}_{l_n}^n \right\} = \prod_{n=1}^N \exp \left\{ j \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{k}^T \mathbf{d}_{l_n}^n \right\}.$$

Vecteur directionnel de l'antenne :

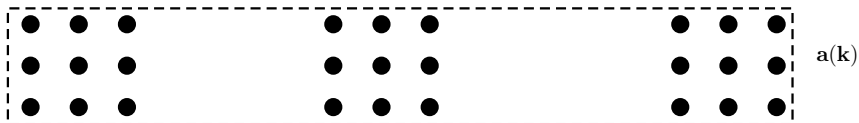
$$\mathbf{a}(\mathbf{k}) = \mathbf{a}_1(\mathbf{k}) \otimes \dots \otimes \mathbf{a}_N(\mathbf{k}),$$

avec

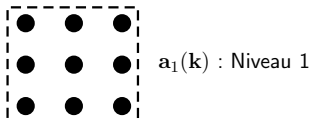
$$\mathbf{a}_n(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} e^{j(2\pi/\lambda)\mathbf{k}^T \mathbf{d}_1^n} \\ \vdots \\ e^{j(2\pi/\lambda)\mathbf{k}^T \mathbf{d}_{L_n}^n} \end{bmatrix}$$

“ $\otimes$ ” le produit de Kronecker

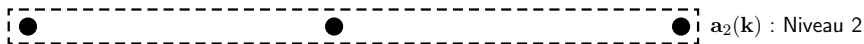
Illustration vecteur directionnel $\mathbf{a}(\mathbf{k}) = \mathbf{a}_1(\mathbf{k}) \otimes \mathbf{a}_2(\mathbf{k})$



||



$\otimes$



P sources

$$\mathbf{A}_1 = [\mathbf{a}_1(\mathbf{k}_1), \dots, \mathbf{a}_1(\mathbf{k}_P)] \quad (L_1 \times P)$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{A}_N = [\mathbf{a}_N(\mathbf{k}_1), \dots, \mathbf{a}_N(\mathbf{k}_P)] \quad (L_N \times P)$$

$$\mathbf{S} = [\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_P] \quad (K \times P)$$

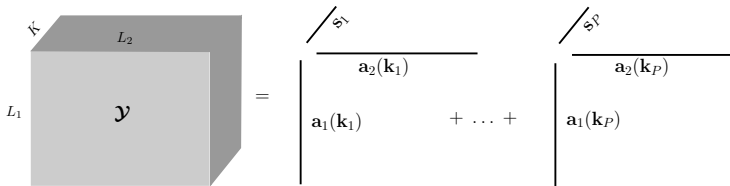
$$\mathbf{Y} = (\mathbf{A}_1 \odot \dots \odot \mathbf{A}_N) \mathbf{S}^T + \mathbf{B}$$

Modèle CP d'ordre $N + 1$

Echantillon unique (« single snapshot ») $\Rightarrow$ modèle CP d'ordre N

Modèle Candecomp/Parafac (CP) des données

Illustration (deux niveaux d'échelle) :



Identifiabilité [Sidiropoulos and Bro '00] :

- ▶ P sources avec des DDAs distinctes, $K > P$

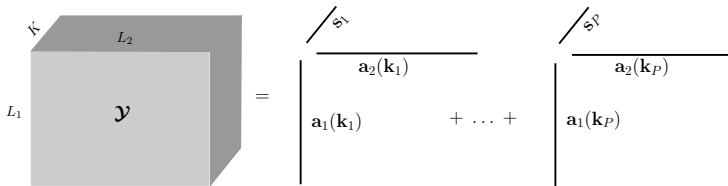
$$\sum_{n=1}^N \min(L_n, P) \geq P + N.$$

- ▶ Un seul échantillon temporel

$$\sum_{n=1}^N \min(L_n, P) \geq 2P + N - 1.$$

Modèle Candecomp/Parafac (CP) des données

Illustration (deux niveaux d'échelle) :



Identifiabilité [Sidiropoulos and Bro '00] :

- ▶ P sources avec des DDAs distinctes, $K > P$

$$\sum_{n=1}^N \min(L_n, P) \geq P + N.$$

- ▶ Un seul échantillon temporel

$$\sum_{n=1}^N \min(L_n, P) \geq 2P + N - 1.$$

Estimation des paramètres

- Estimation des vecteurs directionnels par décomposition CP des données :

$\hat{\mathbf{a}}_n^p$: vecteur directionnel estimé ($n^{\text{ième}}$ niveau, $p^{\text{ième}}$ source)

- Estimation de la DDA pour la $p^{\text{ième}}$ source $\rightsquigarrow$ minimisation du critère :

$$\mathcal{I}_N(\mathbf{k}_p) = \sum_{n=1}^N \mathcal{J}_n(\mathbf{k}_p).$$

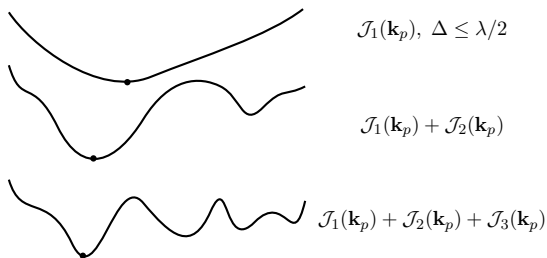
avec

$$\mathcal{J}_n(\mathbf{k}_p) = \|\hat{\mathbf{a}}_n^p - \mathbf{a}_n(\mathbf{k}_p)\|^2, \quad n = 1, \dots, N$$

Minimisation du critère $\mathcal{I}_N(\mathbf{k}_p)$

$\mathcal{I}_N(\mathbf{k}_p)$: critère non-convexe et fortement non-linéaire

↪ Stratégie de minimisation graduelle :



Dans le parcours des sous-antennes, **l'ordre** est important.

Algorithme d'estimation

Etape 1 : Estimation des matrices $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_N, \mathbf{S}$:

$$\left\{ \hat{\mathbf{A}}_1, \dots, \hat{\mathbf{A}}_N \right\} = \underset{\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_N, \mathbf{S}}{\operatorname{argmin}} \left\| \mathcal{Y} - \llbracket \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_N, \mathbf{S} \rrbracket \right\|_F^2$$

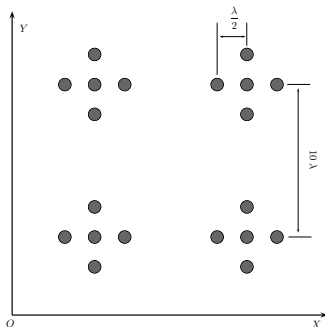
(e.g., ALS)

Etape 2 :

- Pour $p = 1, \dots, P$ et
pour $n = 1, \dots, N$ calculer

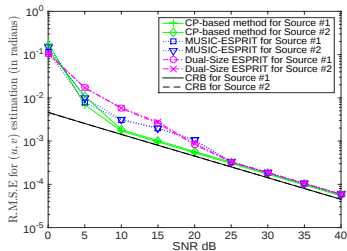
$$\mathbf{k}_{p,n}^* = \underset{\mathbf{k}_p}{\operatorname{argmin}} \mathcal{I}_n(\mathbf{k}_p).$$

- *Sortie* : Les DDA's estimées pour les P sources : $\hat{\mathbf{k}}_p = \mathbf{k}_{p,N}^*$ avec
 $p = 1, \dots, P$.

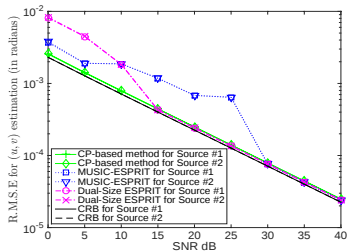


- ▶ Deux niveaux d'échelle $L_1 = 5, L_2 = 4$
- ▶ Trois niveaux d'échelle $L_1 = 5, L_2 = 2, L_3 = 2 \rightsquigarrow$ une seule donnée temporelle
- ▶ $P = 2$ sources avec des DDA distinctes
- ▶ Comparaison avec ESPRIT [Wong and Zoltowski '98]

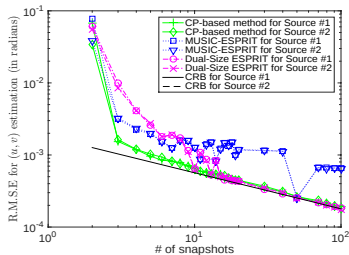
Simulations numériques



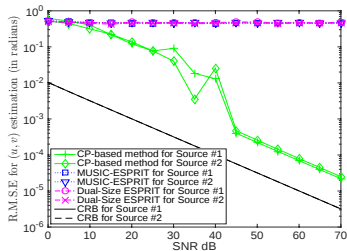
CRMSE , K = 5



CRMSE , K=20



CRMSE , SNR = 15 dB



CRMSE , K=1

- ▶ Géométrie adaptée pour pour la conception des antennes de très grande dimension
- ▶ Maillage peu dense de capteurs $\rightsquigarrow$ coûts matériel et de calcul réduits
- ▶ Géométrie flexible et exploitable efficacement dans les algorithmes d'estimation
- ▶ Algorithmes « déterministes » (ne nécessitant pas l'estimation de la covariance des données)
- ▶ Possibilité d'estimer des sources cohérentes
- ▶ Coût de calcul faible (pas de recherche exhaustive sur une grille)

Introduction

- Antennes de très grande dimension
- Estimation de la Direction D'Arrivée (DDA)

Traitement d'antenne fondé sur ESPRIT

- ESPRIT
- Multiple-Invariance ESPRIT

Traitement d'antenne fondé sur CANDECOMP/PARAFAC (CP)

- Antennes avec invariance translationnelle multiple (cas général)
- Antennes multi-échelle
- Antennes avec diversité de polarisation

Traitement d'antenne fondé sur la HOSVD

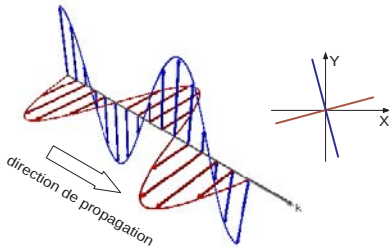
- Tensor-MUSIC
- Tensor-ESPRIT

Conclusions

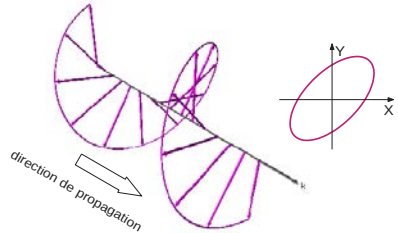
Polarisation

Champ d'ondes :

- ▶ scalaire $\rightsquigarrow$ ondes scalaires (e.g., ondes acoustiques)
- ▶ vectoriel $\rightsquigarrow$ **ondes polarisées** (e.g., ondes électromagnétiques, ondes sismiques)



Polarisation linéaire

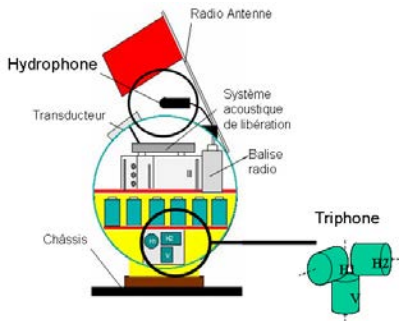


Polarisation elliptique

Capteurs vectoriels

Acquisitions sismiques

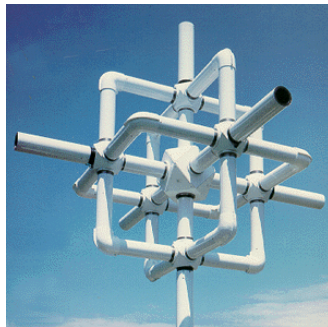
sismique terrestre (triphones), sismique marine (OBS)



OBS(Ocean Bottom Seismometer)

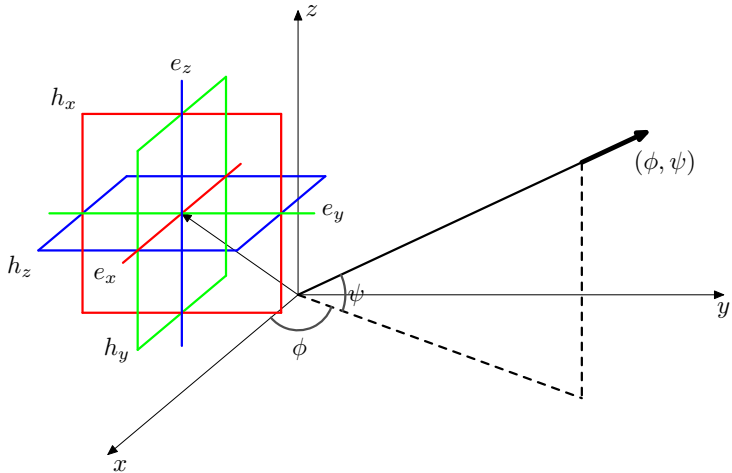
Electromagnétisme

télécommunications, RADAR



Capteur vectoriel électromagnétique (Flam & Russel Inc.)

Schéma d'un capteur électromagnétique (EM) vectoriel



Données acquises par un capteur EM

Vecteur directionnel (6×1) pour un capteur vectoriel :

$$\mathbf{d}(\phi, \psi, \alpha, \beta) = \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \\ h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \phi & -\cos \phi \sin \psi \\ \cos \phi & -\sin \phi \sin \psi \\ 0 & \cos \psi \\ -\cos \phi \sin \psi & \sin \phi \\ -\sin \phi \sin \psi & -\cos \phi \\ \cos \psi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta \\ j \sin \beta \end{bmatrix}$$

Vecteur directionnel pour une antenne de L capteurs vectoriels :

$$\mathbf{a}(\phi, \psi) \otimes \mathbf{d}(\phi, \psi, \alpha, \beta)$$

avec :

$$\mathbf{a}(\phi, \psi) = \left[e^{j2\pi \mathbf{k}^T(\phi, \psi) \mathbf{d}_1 / \lambda}, \dots, e^{j2\pi \mathbf{k}^T(\phi, \psi) \mathbf{d}_L / \lambda} \right]^T$$

Données acquises par un capteur EM

Vecteur directionnel (6×1) pour un capteur vectoriel :

$$\mathbf{d}(\phi, \psi, \alpha, \beta) = \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \\ h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \phi & -\cos \phi \sin \psi \\ \cos \phi & -\sin \phi \sin \psi \\ 0 & \cos \psi \\ -\cos \phi \sin \psi & \sin \phi \\ -\sin \phi \sin \psi & -\cos \phi \\ \cos \psi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta \\ j \sin \beta \end{bmatrix}$$

Vecteur directionnel pour une antenne de L capteurs vectoriels :

$$\mathbf{a}(\phi, \psi) \otimes \mathbf{d}(\phi, \psi, \alpha, \beta)$$

avec :

$$\mathbf{a}(\phi, \psi) = \left[e^{j2\pi \mathbf{k}^T(\phi, \psi) \mathbf{d}_1 / \lambda}, \dots, e^{j2\pi \mathbf{k}^T(\phi, \psi) \mathbf{d}_L / \lambda} \right]^T$$

Données acquises par une antenne de capteurs EM

Modèle CP des données (P sources, L capteurs vectoriels, K « snapshots ») :

$$\mathcal{Y} = \sum_{p=1}^P \mathbf{a}_p(\phi_p, \psi_p) \circ \mathbf{d}_p(\phi_p, \psi_p, \alpha_p, \beta_p) \circ \mathbf{s}_p + \mathbf{B} = \llbracket \mathbf{A}, \mathbf{D}, \mathbf{S} \rrbracket + \mathbf{B} \quad (L \times 6 \times K)$$

avec :

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\phi_1, \psi_1), \dots, \mathbf{a}(\phi_P, \psi_P)] \quad (L \times P)$$

$$\mathbf{D} = [\mathbf{d}(\phi_1, \psi_1, \alpha_1, \beta_1), \dots, \mathbf{d}(\phi_P, \psi_P, \alpha_P, \beta_P)] \quad (6 \times P)$$

$$\mathbf{S} = [\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_P] \quad (K \times P)$$

Estimation des DDAs :

$$\mathcal{Y} \xrightarrow{ALS} \mathbf{A}, \mathbf{D} \longrightarrow (\phi_p, \psi_p, \alpha_p, \beta_p), \quad p = 1, \dots, P$$

😊 Ne nécessite pas d'étape d'appariement DDA - polarisation

Borne supérieure sur le nombre P de sources identifiables (DDAs distinctes) :

1. Sources **non-cohérentes** ($\mathbf{S}$ rang colonnes plein) avec $L < P$

- ▶ **Condition nécessaire** d'identifiabilité [Ho et al. '98]

$$P < 3L$$

- ▶ **Condition suffisante** d'identifiabilité [Guo et al. '11]

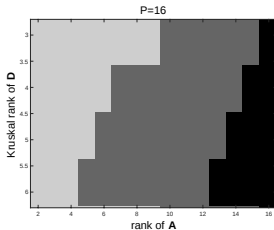
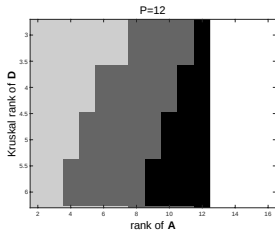
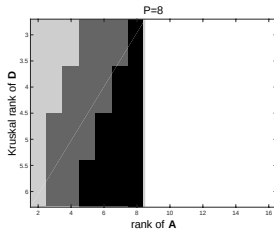
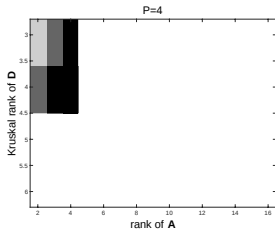
$$P \leq k_{\mathbf{A}} + \text{rang}(\mathbf{D}) - 2 = L + \text{rang}(\mathbf{D}) - 2$$

- ▶ **Condition numérique suffisante** [Jiang and Sidiropoulos '04]

(calcul du rang d'une matrice $\mathbf{U}$ ($36L^2 \times P(P-1)/2$) des mineurs d'ordre 2 de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{D}$)

Comparaison entre les deux conditions suffisantes d'identifiabilité

$\text{rang}(\mathbf{A}) = k_{\mathbf{A}} = L$; $k_{\mathbf{D}} = \max\{3, \min\{P, 6\}\}$ ($k_{\mathbf{D}} \geq 3$ [Ho *et al.* '98])

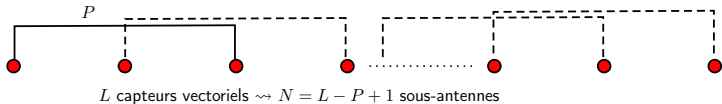


2. Sources **cohérentes** ($k_S = 1, \text{rang}(\mathbf{S}) \leq P - 1$), $L > P$

- Polarization Smoothing Algorithm (PSA) [Rahamim *et al.* '04] :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}(\mathbf{D} \odot \mathbf{S})^T = \mathbf{A}\check{\mathbf{S}}^T \text{ tel que } \check{\mathbf{S}} \triangleq \mathbf{D} \odot \mathbf{S} \text{ soit de rang plein}$$

- Antenne linéaire uniforme (ULA)



$$\check{\mathbf{Y}} = (\check{\mathbf{A}} \odot \mathbf{H})\check{\mathbf{S}}^T$$

avec : $\check{\mathbf{A}} (N \times P)$ et $\mathbf{H} (P \times P)$

Identifiabilité du modèle :

$$\check{\mathbf{Y}} = (\check{\mathbf{A}} \odot \mathbf{H}) \check{\mathbf{S}}^T \text{ avec } \check{\mathbf{S}} \triangleq \mathbf{D} \odot \mathbf{S}$$

- ▶ (1) $P \leq k_{\mathbf{D}} + \text{rang}(\mathbf{S}) - 1 \Rightarrow \check{\mathbf{S}} : \text{rang plein}$ [Guo et al. '11]
- ▶ (2) Si $\check{\mathbf{S}} : \text{rang plein}$ et $\text{rang}(\check{\mathbf{A}}) + k_{\mathbf{H}} \geq P + 2 \Rightarrow \check{\mathbf{Y}}$ identifiable [Guo et al. '11]
- ▶ (3) $\check{\mathbf{A}}, \mathbf{H} : \text{matrices de Vandermonde} \Rightarrow \text{rang}(\check{\mathbf{A}}) = N = L - P + 1, k_{\mathbf{H}} = P$
- ▶ (3) $\rightarrow$ (2) $\Rightarrow P \leq L - 1$ (4)
- ▶ (1) + (4) $\Rightarrow$
$$P \leq \min\{L, k_{\mathbf{D}} + \text{rang}(\mathbf{S})\} - 1$$
- ▶ Si $\text{rang}(\mathbf{S}) = 1$ (i.e., toutes les sources sont cohérentes) $\Rightarrow$
$$P \leq \min(k_{\mathbf{D}}, L - 1)$$
 condition similaire à $P \leq \min(6, L - 1)$ [Rahamim et al. '04]

Identifiabilité du modèle :

$$\check{\mathbf{Y}} = (\check{\mathbf{A}} \odot \mathbf{H}) \check{\mathbf{S}}^T \text{ avec } \check{\mathbf{S}} \triangleq \mathbf{D} \odot \mathbf{S}$$

- ▶ (1) $P \leq k_{\mathbf{D}} + \text{rang}(\mathbf{S}) - 1 \Rightarrow \check{\mathbf{S}} : \text{rang plein}$ [Guo et al. '11]
- ▶ (2) Si $\check{\mathbf{S}} : \text{rang plein}$ et $\text{rang}(\check{\mathbf{A}}) + k_{\mathbf{H}} \geq P + 2 \Rightarrow \check{\mathbf{Y}}$ **identifiable** [Guo et al. '11]
- ▶ (3) $\check{\mathbf{A}}, \mathbf{H} : \text{matrices de Vandermonde} \Rightarrow \text{rang}(\check{\mathbf{A}}) = N = L - P + 1, k_{\mathbf{H}} = P$
- ▶ (3) $\rightarrow$ (2) $\implies P \leq L - 1$ (4)
- ▶ (1) + (4) $\implies$
$$P \leq \min\{L, k_{\mathbf{D}} + \text{rang}(\mathbf{S})\} - 1$$
- ▶ Si $\text{rang}(\mathbf{S}) = 1$ (i.e., toutes les sources sont cohérentes) $\implies$
$$P \leq \min(k_{\mathbf{D}}, L - 1)$$
 condition similaire à $P \leq \min(6, L - 1)$ [Rahamim et al. '04]

Identifiabilité du modèle :

$$\check{\mathbf{Y}} = (\check{\mathbf{A}} \odot \mathbf{H}) \check{\mathbf{S}}^T \text{ avec } \check{\mathbf{S}} \triangleq \mathbf{D} \odot \mathbf{S}$$

- ▶ (1) $P \leq k_{\mathbf{D}} + \text{rang}(\mathbf{S}) - 1 \Rightarrow \check{\mathbf{S}} : \text{rang plein}$ [Guo et al. '11]
- ▶ (2) Si $\check{\mathbf{S}} : \text{rang plein}$ et $\text{rang}(\check{\mathbf{A}}) + k_{\mathbf{H}} \geq P + 2 \Rightarrow \check{\mathbf{Y}}$ **identifiable** [Guo et al. '11]
- ▶ (3) $\check{\mathbf{A}}, \mathbf{H} : \text{matrices de Vandermonde} \Rightarrow \text{rang}(\check{\mathbf{A}}) = N = L - P + 1, k_{\mathbf{H}} = P$
- ▶ (3) $\rightarrow$ (2) $\implies P \leq L - 1$ (4)
- ▶ (1) + (4) $\implies$
$$P \leq \min\{L, k_{\mathbf{D}} + \text{rang}(\mathbf{S})\} - 1$$
- ▶ Si $\text{rang}(\mathbf{S}) = 1$ (i.e., toutes les sources sont cohérentes) $\implies$
$$P \leq \min(k_{\mathbf{D}}, L - 1)$$
 condition similaire à $P \leq \min(6, L - 1)$
[Rahamim et al. '04]

Identifiabilité du modèle :

$$\check{\mathbf{Y}} = (\check{\mathbf{A}} \odot \mathbf{H}) \check{\mathbf{S}}^T \text{ avec } \check{\mathbf{S}} \triangleq \mathbf{D} \odot \mathbf{S}$$

- ▶ (1) $P \leq k_{\mathbf{D}} + \text{rang}(\mathbf{S}) - 1 \Rightarrow \check{\mathbf{S}} : \text{rang plein}$ [Guo et al. '11]
- ▶ (2) Si $\check{\mathbf{S}} : \text{rang plein}$ et $\text{rang}(\check{\mathbf{A}}) + k_{\mathbf{H}} \geq P + 2 \Rightarrow \check{\mathbf{Y}}$ **identifiable** [Guo et al. '11]
- ▶ (3) $\check{\mathbf{A}}, \mathbf{H} : \text{matrices de Vandermonde} \Rightarrow \text{rang}(\check{\mathbf{A}}) = N = L - P + 1, k_{\mathbf{H}} = P$
- ▶ (3) $\rightarrow$ (2) $\implies P \leq L - 1$ (4)
- ▶ (1) + (4) $\implies$

$$P \leq \min\{L, k_{\mathbf{D}} + \text{rang}(\mathbf{S})\} - 1$$

- ▶ Si $\text{rang}(\mathbf{S}) = 1$ (i.e., toutes les sources sont cohérentes) $\implies$
 $P \leq \min(k_{\mathbf{D}}, L - 1)$ condition similaire à $P \leq \min(6, L - 1)$
[Rahamim et al. '04]

Identifiabilité du modèle :

$$\check{\mathbf{Y}} = (\check{\mathbf{A}} \odot \mathbf{H}) \check{\mathbf{S}}^T \text{ avec } \check{\mathbf{S}} \triangleq \mathbf{D} \odot \mathbf{S}$$

- ▶ (1) $P \leq k_{\mathbf{D}} + \text{rang}(\mathbf{S}) - 1 \Rightarrow \check{\mathbf{S}} : \text{rang plein}$ [Guo et al. '11]
- ▶ (2) Si $\check{\mathbf{S}} : \text{rang plein}$ et $\text{rang}(\check{\mathbf{A}}) + k_{\mathbf{H}} \geq P + 2 \Rightarrow \check{\mathbf{Y}}$ **identifiable** [Guo et al. '11]
- ▶ (3) $\check{\mathbf{A}}, \mathbf{H} : \text{matrices de Vandermonde} \Rightarrow \text{rang}(\check{\mathbf{A}}) = N = L - P + 1, k_{\mathbf{H}} = P$
- ▶ (3) $\rightarrow$ (2) $\implies P \leq L - 1$ (4)
- ▶ (1) + (4) $\implies$
$$P \leq \min\{L, k_{\mathbf{D}} + \text{rang}(\mathbf{S})\} - 1$$
- ▶ Si $\text{rang}(\mathbf{S}) = 1$ (i.e., toutes les sources sont cohérentes) $\implies$
$$P \leq \min(k_{\mathbf{D}}, L - 1) \text{ condition similaire à } P \leq \min(6, L - 1)$$

[Rahamim et al. '04]

Plan

Introduction

- Antennes de très grande dimension
- Estimation de la Direction D'Arrivée (DDA)

Traitement d'antenne fondé sur ESPRIT

- ESPRIT
- Multiple-Invariance ESPRIT

Traitement d'antenne fondé sur CANDECOMP/PARAFAC (CP)

- Antennes avec invariance translationnelle multiple (cas général)
- Antennes multi-échelle
- Antennes avec diversité de polarisation

Traitement d'antenne fondé sur la HOSVD

- Tensor-MUSIC
- Tensor-ESPRIT

Conclusions

Plan

Introduction

- Antennes de très grande dimension
- Estimation de la Direction D'Arrivée (DDA)

Traitement d'antenne fondé sur ESPRIT

- ESPRIT
- Multiple-Invariance ESPRIT

Traitement d'antenne fondé sur CANDECOMP/PARAFAC (CP)

- Antennes avec invariance translationnelle multiple (cas général)
- Antennes multi-échelle
- Antennes avec diversité de polarisation

Traitement d'antenne fondé sur la HOSVD

- Tensor-MUSIC
- Tensor-ESPRIT

Conclusions

Données sur une antenne de capteurs EM (P sources, L capteurs vectoriels) :

$$\mathbf{Y}(t) = \sum_{p=1}^P s_p(t) \mathbf{a}_p(\phi_p, \psi_p) \mathbf{d}_p^T(\phi_p, \psi_p, \alpha_p, \beta_p) + \mathbf{B}(t) \quad (L \times 6)$$

Tenseur de covariance des données :

$$\mathcal{R}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}} = E \{ \mathbf{Y}(t) \circ \mathbf{Y}^*(t) \} \quad (L \times 6 \times L \times 6)$$

Tenseur de covariance des sources :

$$\mathcal{R}_{\mathbf{S}\mathbf{S}} = E \{ \mathbf{S}(t) \circ \mathbf{S}^*(t) \} \quad (P \times P \times P \times P)$$

avec : $\mathbf{S}(t) = \begin{bmatrix} s_1(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & s_P(t) \end{bmatrix} \quad (P \times P)$

Données sur une antenne de capteurs EM (P sources, L capteurs vectoriels) :

$$\mathbf{Y}(t) = \sum_{p=1}^P s_p(t) \mathbf{a}_p(\phi_p, \psi_p) \mathbf{d}_p^T(\phi_p, \psi_p, \alpha_p, \beta_p) + \mathbf{B}(t) \quad (L \times 6)$$

Tenseur de covariance des données :

$$\mathcal{R}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}} = E \{ \mathbf{Y}(t) \circ \mathbf{Y}^*(t) \} \quad (L \times 6 \times L \times 6)$$

Tenseur de covariance des sources :

$$\mathcal{R}_{\mathbf{S}\mathbf{S}} = E \{ \mathbf{S}(t) \circ \mathbf{S}^*(t) \} \quad (P \times P \times P \times P)$$

avec : $\mathbf{S}(t) = \begin{bmatrix} s_1(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & s_P(t) \end{bmatrix} \quad (P \times P)$

Modèle quadrilinéaire :

$$\mathcal{R}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}} = \mathcal{R}_{\mathbf{S}\mathbf{S}} \times_1 \mathbf{A} \times_2 \mathbf{D} \times_3 \mathbf{A}^* \times_4 \mathbf{D}^* + \mathcal{N}$$

avec :

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\phi_1, \psi_1), \dots, \mathbf{a}(\phi_P, \psi_P)] \quad (L \times P)$$

$$\mathbf{D} = [\mathbf{d}(\phi_1, \psi_1, \alpha_1, \beta_1), \dots, \mathbf{d}(\phi_P, \psi_P, \alpha_P, \beta_P)] \quad (6 \times P)$$

Algorithme T-MUSIC :

1. Estimation du tenseur de covariance :

$$\hat{\mathcal{R}}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{Y}(k) \circ \mathbf{Y}^*(k), \quad (K \ll \text{snapshots})$$

2. Décomposition HOSVD de $\hat{\mathcal{R}}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}}$:

$$\hat{\mathcal{R}}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}} = \mathcal{K} \times_1 \mathbf{U}^{(1)} \times_2 \mathbf{U}^{(2)} \times_3 \mathbf{U}^{(1)*} \times_4 \mathbf{U}^{(2)*}$$

3. Estimation des sous-espaces signal / bruit dans les quatre modes :

$$\mathbf{U}^{(1)} = \left[\mathbf{U}_s^{(1)} | \mathbf{U}_b^{(1)} \right] \quad \text{avec } \mathbf{U}_s^{(1)} (L \times P) \text{ et } \mathbf{U}_b^{(1)} (L \times (L - P))$$

$$\mathbf{U}^{(2)} = \left[\mathbf{U}_s^{(2)} | \mathbf{U}_b^{(2)} \right] \quad \text{avec } \mathbf{U}_s^{(2)} (6 \times P) \text{ et } \mathbf{U}_b^{(2)} (6 \times (6 - P))$$

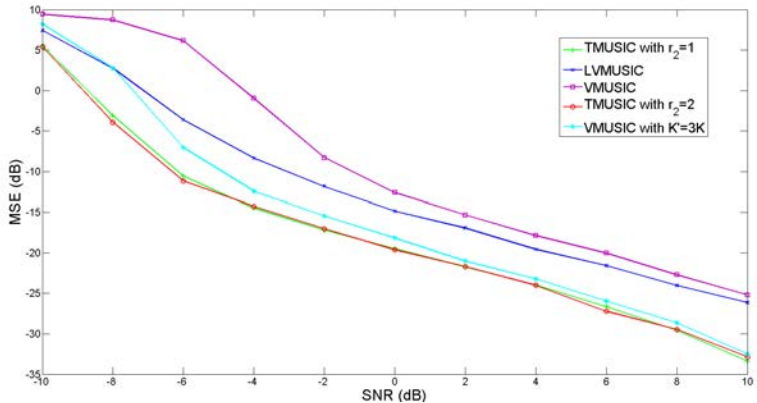
4. Estimations des DDAs :

$$\{\phi, \psi, \alpha, \beta\} = \arg \max \frac{1}{\|\mathbf{M}(\phi, \psi, \alpha, \beta) \times_1 \mathbf{U}_b^{(1)} \mathbf{U}_b^{(1)H} \times_2 \mathbf{U}_b^{(2)} \mathbf{U}_b^{(2)H}\|_F^2}$$

avec :

$$\mathbf{M}(\phi, \psi, \alpha, \beta) = \mathbf{a}(\phi, \psi) \mathbf{d}^T(\phi, \psi, \alpha, \beta)$$

$P = 2$ sources, DDAs et polarisations distinctes



Plan

Introduction

- Antennes de très grande dimension
- Estimation de la Direction D'Arrivée (DDA)

Traitement d'antenne fondé sur ESPRIT

- ESPRIT
- Multiple-Invariance ESPRIT

Traitement d'antenne fondé sur CANDECOMP/PARAFAC (CP)

- Antennes avec invariance translationnelle multiple (cas général)
- Antennes multi-échelle
- Antennes avec diversité de polarisation

Traitement d'antenne fondé sur la HOSVD

- Tensor-MUSIC
- Tensor-ESPRIT

Conclusions

Modèle données pour une antenne multi-échelle (rappel) :

$$\mathbf{Y} = (\mathbf{A}_1 \odot \dots \odot \mathbf{A}_N) \mathbf{S}^T + \mathbf{B}$$

avec :

$$\mathbf{A}_1 = [\mathbf{a}_1(\mathbf{k}_1), \dots, \mathbf{a}_1(\mathbf{k}_P)] \quad (L_1 \times P)$$

$\vdots$

$$\mathbf{A}_N = [\mathbf{a}_N(\mathbf{k}_1), \dots, \mathbf{a}_N(\mathbf{k}_P)] \quad (L_N \times P)$$

$$\mathbf{S} = [\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_P] \quad (K \times P)$$

Ecriture tensorielle #1 :

$$\mathcal{Y} = \sum_{p=1}^P \mathbf{a}_1(\mathbf{k}_p) \circ \dots \circ \mathbf{a}_N(\mathbf{k}_p) \circ \mathbf{s}_p + \mathcal{B} \quad (L_1 \times \dots \times L_N \times K)$$

Définissons :

$$\mathcal{A}_p = \mathbf{a}_1(\mathbf{k}_p) \circ \dots \circ \mathbf{a}_N(\mathbf{k}_p) \quad (L_1 \times \dots \times L_N), \quad p = 1, \dots, P$$

$$\mathcal{A} = [\mathcal{A}_1 \sqcup_{N+1} \mathcal{A}_2 \sqcup_{N+1} \dots \sqcup_{N+1} \mathcal{A}_P] \quad (L_1 \times \dots \times L_N \times P)$$

Ecriture tensorielle #2 :

$$\mathcal{Y} = \mathcal{A} \times_{N+1} \mathbf{S} + \mathcal{B}$$

Invariances dans les N modes de $\mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \times_1 \mathbf{J}_1^{(1)} \times_{N+1} \Phi^{(1)} &= \mathcal{A} \times_1 \mathbf{J}_2^{(1)} \\ \mathcal{A} \times_2 \mathbf{J}_1^{(2)} \times_{N+1} \Phi^{(2)} &= \mathcal{A} \times_2 \mathbf{J}_2^{(2)} \\ &\vdots \\ \mathcal{A} \times_N \mathbf{J}_1^{(N)} \times_{N+1} \Phi^{(N)} &= \mathcal{A} \times_N \mathbf{J}_2^{(N)} \end{aligned}$$

$$\Phi^{(n)} = \begin{bmatrix} e^{j\frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{k}_1^T \boldsymbol{\delta}_n} & & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 0 \\ & & & e^{j\frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{k}_P^T \boldsymbol{\delta}_n} \end{bmatrix}, \quad n = 1, \dots, N$$

Matrices de sélection :

$$\mathbf{J}_1^{(n)} = [\mathbf{I}_{L_n-1} \mid \mathbf{0}_{(L_n-1 \times 1)}] \quad \mathbf{J}_2^{(n)} = [\mathbf{0}_{(L_n-1 \times 1)} \mid \mathbf{I}_{L_n-1}]$$

Estimation du sous-espace signal tensoriel par troncature de rang P de la HOSVD de $\mathcal{Y}$:

$$\mathcal{Y}_s = \mathcal{K}_s \times_1 \mathbf{U}_s^{(1)} \times_2 \dots \times_N \mathbf{U}_s^{(N)} \times_{N+1} \mathbf{U}_s^{(N+1)}$$

$$\mathcal{K}_s(\underbrace{P \times \dots \times P}_{N+1 \text{ fois}}); \quad \mathbf{U}_s^{(n)}(L_n \times P), n = 1, \dots, N$$

$$\Phi^{(n)} = \begin{bmatrix} e^{j\frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{k}_1^T \boldsymbol{\delta}_n} & & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 0 \\ & & & e^{j\frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{k}_P^T \boldsymbol{\delta}_n} \end{bmatrix}, \quad n = 1, \dots, N$$

Matrices de sélection :

$$\mathbf{J}_1^{(n)} = [\mathbf{I}_{L_n-1} \mid \mathbf{0}_{(L_n-1 \times 1)}] \quad \mathbf{J}_2^{(n)} = [\mathbf{0}_{(L_n-1 \times 1)} \mid \mathbf{I}_{L_n-1}]$$

Estimation du **sous-espace signal tensoriel** par troncature de rang P de la HOSVD de $\mathcal{Y}$:

$$\mathcal{Y}_s = \mathcal{K}_s \times_1 \mathbf{U}_s^{(1)} \times_2 \dots \times_N \mathbf{U}_s^{(N)} \times_{N+1} \mathbf{U}_s^{(N+1)}$$

$$\underbrace{\mathcal{K}_s(P \times \dots \times P)}_{N+1 \text{ fois}}; \quad \mathbf{U}_s^{(n)}(L_n \times P), n = 1, \dots, N$$

Base multilinéaire du sous-espace signal estimé :

$$\mathbf{U}_s = \mathbf{K}_s \times_1 \mathbf{U}_s^{(1)} \times_2 \dots \times_N \mathbf{U}_s^{(N)} \quad (L_1 \times \dots \times L_N \times P)$$

$$\mathcal{A} = \mathbf{U}_s \times_{N+1} \mathbf{T} (*)$$

En remplaçant (*) dans les relations d'invariance :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_s \times_1 \mathbf{J}_1^{(1)} \times_{N+1} \Psi^{(1)} &= \mathbf{U}_s \times_1 \mathbf{J}_2^{(1)} \\ \mathbf{U}_s \times_2 \mathbf{J}_1^{(2)} \times_{N+1} \Psi^{(2)} &= \mathbf{U}_s \times_2 \mathbf{J}_2^{(2)} \\ &\vdots \\ \mathbf{U}_s \times_N \mathbf{J}_1^{(N)} \times_{N+1} \Psi^{(N)} &= \mathbf{U}_s \times_N \mathbf{J}_2^{(N)} \end{aligned}$$

avec :

$$\Psi^{(n)} = \mathbf{T}^{-1} \Phi^{(n)} \mathbf{T}$$

Estimation de $\Psi^{(n)}$:

$$\Psi^{(n)} = \underset{\Psi^{(n)}}{\operatorname{argmin}} \left\| \mathcal{U}_s \times_n \mathbf{J}_1^{(n)} \times_{N+1} \Psi^{(n)} - \mathcal{U}_s \times_n \mathbf{J}_2^{(n)} \right\|_H$$

Solution (moindres carrées) :

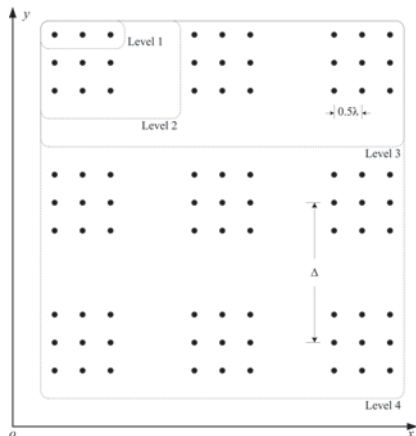
$$\Psi^{(n)T} = \left(\tilde{\mathbf{J}}_1^{(n)} [\mathcal{U}_s]_{(N+1)}^T \right)^\dagger \tilde{\mathbf{J}}_2^{(n)} [\mathcal{U}_s]_{(N+1)}^T$$

avec :

$$\tilde{\mathbf{J}}_i^{(n)} = \mathbf{I}_{\Gamma_1^{(n)}} \otimes \mathbf{J}_i^{(n)} \otimes \mathbf{I}_{\Gamma_2^{(n)}} \quad (i = 1, 2); \quad \Gamma_1^{(n)} = \Pi_{q=1}^{n-1} L_q; \quad \Gamma_2^{(n)} = \Pi_{q=n+1}^N L_q$$

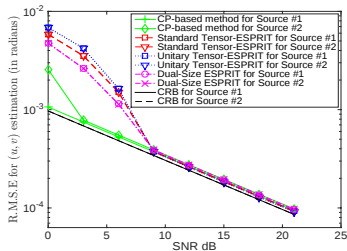
😊 Meilleure estimation du sous-espace signal que SVD s'il $\exists$ tel que $L_n > P$

😞 Nécessite des structures invariantes dans les modes

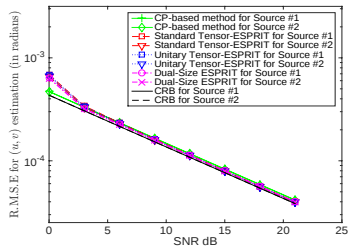


- Quatre niveaux d'échelle $L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = 3$
- Deux sources avec des DDA distinctes

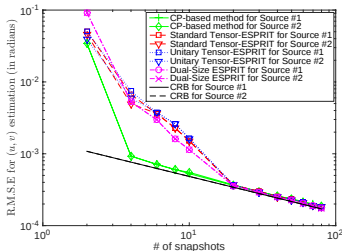
Simulations numériques



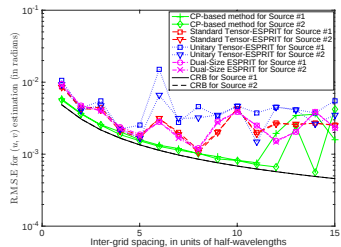
CRMSE , K= 10



CRMSE , K=50



CRMSE , SNR = 6 dB



CRMSE , K=5, SNR = 6 dB

Conclusions

- ▶ Prise en compte de la structure complexe des données
- ▶ Identifiabilité du modèle
- ▶ Co-design antenne / algorithme de traitement
- ▶ Extension de MUSIC, ESPRIT au cas tensoriel
- ▶ Estimation des sous-espaces signal/ bruit améliorée