Restauration d'image : approches convexes

— Pénalisations et contraintes —

Jean-François Giovannelli

Giova@IMS-Bordeaux.fr

Groupe Signal – Image
Laboratoire de l'Intégration du Matériau au Système
Université de Bordeaux – CNRS

Sommaire

- Déconvolution
  - Motivation par l'exemple
  - Caractère mal-posé, information manquante, régularisation
- Trois types d'inversion régularisée
  - Solution linéaire et pénalisation quadratique
    - Algorithme de gradient
  - Pénalisation non-quadratique et préservation des contours
    - Approche semi-quadratique
  - Prise en compte de contraintes : positivité
    - Lagrangien augmenté et ADMM

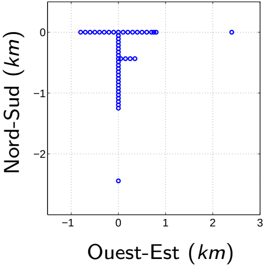
Interferometer : principles of measurements

Physical principle [Thompson, Moran, Swenson, 2001]

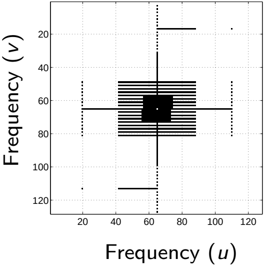
- Antenna array ⇝ large aperture
- Frequency band, *e.g.*, 164 MHz
- Couple of antennas interference ⇝ one measure in the Fourier plan

Picture site (NRH)

Antenna positions



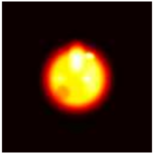
Fourier plane



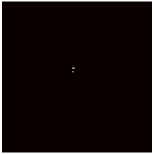
- Connaissance du Soleil, activité magnétique, taches et éruptions
- Prévision des intempéries et de leur impact,. . .

Interferometer : True map – Dirty beam – Dirty map

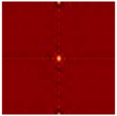
True map ES



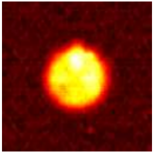
True map PS



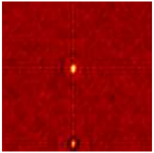
Dirty beam



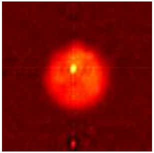
Dirty map ES



Dirty map PS



Dirty map PS + ES

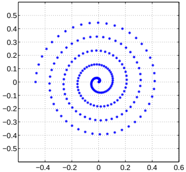


IRM : principes des mesures

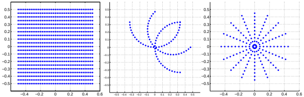
Principe physique [Alaux 92]

- Champ magnétique intense $\boldsymbol{B} \rightsquigarrow$ précession des spins, $f \propto \|\boldsymbol{B}\|$
- Gradient $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 + B(x) \rightsquigarrow$ codage de espace - fréquence
- Densité de proton $\rightsquigarrow$ amplitude de signal

Fantôme GE



Couverture fréquentielle



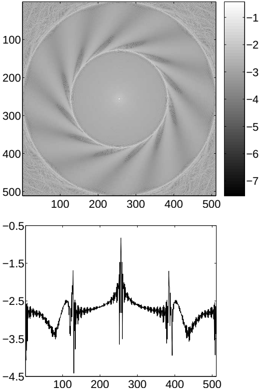
Autres schémas acquisition

- Imagerie médicale, morphologique et fonctionnelle, neurologie,. . .
- IRM rapide, applications cardiovasculaires, imagerie de flux,. . .

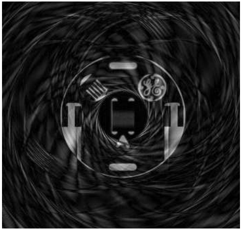
IRM : Carte vraie – Lobe sale – Carte sale

Fantôme (vrai)

Réponse instrument



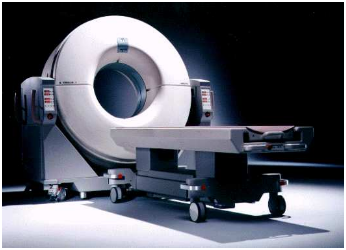
Reconstruction naïve

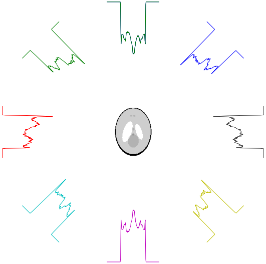


Tomographie à rayons X (scanner)

Principe physique

- Absorption de rayons X $\rightsquigarrow$ radiographie
- Rotation autour de l'objet $\rightsquigarrow$ série de radiographie (sinogramme)
- Transformée de Radon



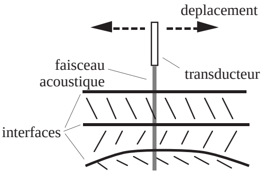


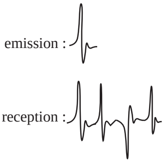
- Analyse de matériau, sécurité aéroportuaire,...
- Imagerie médicale : diagnostic, suivi thérapeutique

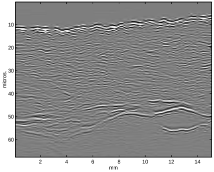
Imagerie par ultrasons

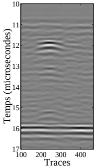
Principe physique

- Interaction : onde ultrasonore $\leftrightarrow$ milieu d'intérêt
- Impédance acoustique : inhomogénéité, changement de milieu







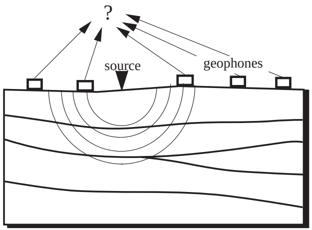


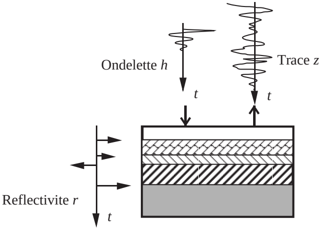
- Contrôle non-destructif, *e.g.*, fissures (nucléaire, aéronautique,...)
- Caractérisation des tissus, imagerie médicale,...

Sismique réflexion

Principe physique

- Interaction : onde mécanique $\leftrightarrow$ milieu d'intérêt
- Impédance acoustique : inhomogénéité, changement de milieu





- Prospection minière et pétrolière
- Connaissance des sols et des phénomènes géologiques

Imagerie optique (et infra-rouge, thermique)

Principe physique

- Optique de base (géométrique et physique) $\rightsquigarrow$ tache image
- Capteur CCD ou bolomètres $\rightsquigarrow$ réponse spatiale et temporelle

- Astronomie, surveillance (lieux publics, circulation, sauvetage,...)
- Satellitaire : astronomie, télédétection, surveillance, environnement
- Vision nocturne, fumées, nuages, conditions météo dégradées

Cas de la super-résolution

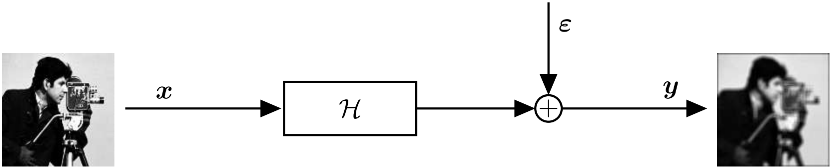
Principe physique

- Série temporelle d'images $\rightsquigarrow$ image sur-résolue
- Mouvement sub-pixellique $\sim$ sur-échantillonnage

- Les mêmes... à résolution augmentée

Inversion : question standard

$$\boldsymbol{y} = \mathcal{H}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{h} \star \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\varepsilon}$$



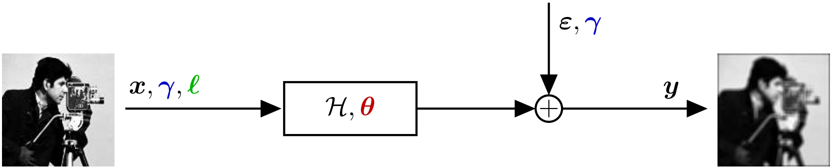
$$\widehat{\boldsymbol{x}} = \widehat{\mathcal{X}}(\boldsymbol{y})$$

Restauration, déconvolution-débruitage

- Problématique : problèmes inverses mal-posés, *déficit en information*
- Méthodologie : régularisation, *compensation en information*
  - Spécificité des méthodes de reconstruction / restauration, d'inversion
  - Compromis et paramètres de réglage
- Résultats de qualité limitée

Inversion : questions plus avancées

$$\boldsymbol{y} = \mathcal{H}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{h} \star \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\varepsilon}$$



$$\widehat{\boldsymbol{x}} = \widehat{\mathcal{X}}(\boldsymbol{y})$$

$$\left[\, \widehat{\boldsymbol{x}}, \widehat{\gamma}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}, \widehat{\boldsymbol{\ell}} \,\right] = \widehat{\mathcal{X}}(\boldsymbol{y})$$

Sur-problèmes d'estimation

- Hyperparamètres, paramètres de réglage : *non-supervisé*
- Paramètres instruments (resp. réponse) : *myope* (resp. *aveugle*)
- Variables cachées : contours, régions, points singuliers,. . . : *augmenté*
- Modèles (bruit, objet, instrument,. . .) : *sélection de modèle*

Problématique et cadre de travail

Problèmes inverses

- Modèle instrument, modèle direct
- Inclut de la physique
  - du phénomène en jeu
  - de l'instrument, de l'acquisition
- Inverser
  - défaire les dégradations, dépasser la résolution naturelle
  - remonter des conséquences vers les causes
  - restituer / reconstruire / restaurer l'entrée
- Caractère mal-posé ou mal-conditionné et régularisation

Inversion et régularisation convexe

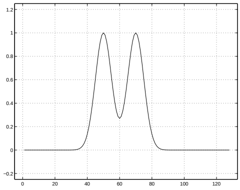
- Modèle direct
  - linéaires et invariants, *i.e.*, convolutifs
  - à erreur (de modélisation, de mesure) additive
- Régularisation par pénalisation et contrainte
- Optimisation de critères et cadre convexe

Quelques repères historiques

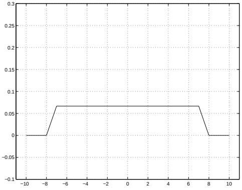
- Approches quadratiques et filtrage linéaire ~ 60
  - Phillips, Twomey, Tikhonov
  - Kalman
  - Hunt (et Wiener ~ 40)
- Extension : variables cachées discrètes ~ 80
  - Kormylo & Mendel (Impulsions)
  - Geman & Geman (Lignes)
  - Besag, Graffigne, Descombes (Régions)
- Pénalisation convexe (variables cachées, aussi ...) ~ 90
  - $\mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1$, Huber, hyperbolique, : Sauer, Blanc-Féraud, Idier...
  - L_1 : Alliney-Ruzinsky, Taylor ~ 79 , Yarlagadda ~ 85 ...
  - Et boum du L_1 ~ 2005
- Retour vers des modèles plus complexes ~ 2000
  - Et non-supervisé, myope, semi-aveugle, aveugle
  - Échantillonnage stochastique (MCMC, ...)

Exemple de Hunt (réponse « carré ») [1970]

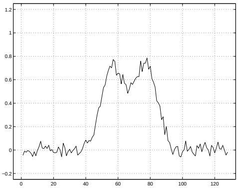
- Modèle convolutif (moyennage) : $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{h} \star \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\varepsilon}$



Entrée $(\boldsymbol{x})$



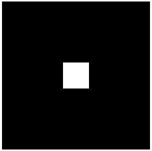
Réponse $(\boldsymbol{h})$



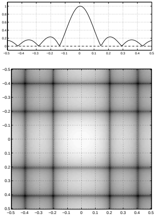
Sortie $(\boldsymbol{y})$

Exemple du photographe photographié (réponse « carré »)

- Modèle convolutif (moyennage de pixels) : $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{h} \star \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\varepsilon}$
- Domaine de Fourier : $\boldsymbol{Y}(f) = \boldsymbol{H}(f)\boldsymbol{X}(f) + \boldsymbol{E}(f)$



Réponse spatiale



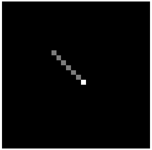
Réponse fréquentielle

Entrée ($\boldsymbol{x}$)

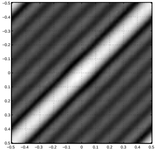
Sortie ($\boldsymbol{y}$)

Exemple du photographe (réponse « bougé »)

- Modèle convolutif (moyennage de pixels) : $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{h} \star \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\varepsilon}$
- Domaine de Fourier : $\boldsymbol{Y}(f) = \boldsymbol{H}(f)\boldsymbol{X}(f) + \boldsymbol{E}(f)$



Réponse spatiale



Réponse fréquentielle

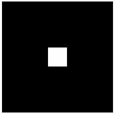
Entrée ($\boldsymbol{x}$)

Sortie ($\boldsymbol{y}$)

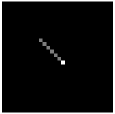
Convolution

- Exemples de réponse

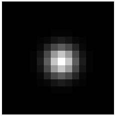
Carrée



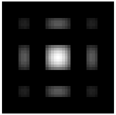
Bougé



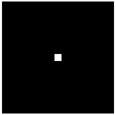
Gaussien



Diffraction



Ponctuel



- Modèle convolutif

$$
\begin{aligned}
y(n) &= \sum_{p=-P}^{+P} h(p)\, x(n-p) \\
y(n,m) &= \sum_{p=-P}^{+P} \sum_{q=-Q}^{+Q} h(p,q)\, x(n-p, m-q)
\end{aligned}
$$

- Réponse : $h(p,q)$ ou $h(p)$
  - réponse impulsionnelle, noyau
  - fonction d'étalement de point (point spread function), tache image

Écriture explicite et matricielle : convolution 1D

- Linéaire $\rightsquigarrow$ relation matricielle : $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}$
- Invariant $\rightsquigarrow$ structure de Tœplitz
- Réponse courte $\rightsquigarrow$ structure bande

$$
\begin{array}{rcl}
 & \vdots & \\
y_{n-1} & = & \\
y_n & = & h_P x_{n-P} + \cdots + {\color{blue}h_1 x_{n-1}} + {\color{red}h_0 x_n} + {\color{blue}h_{-1} x_{n+1}} + \cdots + h_{-P} x_{n+P} \\
y_{n+1} & = & \\
 & \vdots &
\end{array}
$$

$$
\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix}
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & h_P & \ldots & h_0 & \ldots & h_{-P} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
\ldots & 0 & h_P & \ldots & h_0 & \ldots & h_{-P} & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
\ldots & 0 & 0 & h_P & \ldots & h_0 & \ldots & h_{-P} & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
\ldots & 0 & 0 & 0 & h_P & \ldots & h_0 & \ldots & h_{-P} & 0 & 0 & \ldots \\
\ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & h_P & \ldots & h_0 & \ldots & h_{-P} & 0 & \ldots \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_P & \ldots & h_0 & \ldots & h_{-P} & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{bmatrix}
$$

Gestion des bords

- On étend la matrice de convolution en une matrice circulante
- Approximation « objets périodiques »

$$
\begin{bmatrix}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & h_P & h_{P-1} & h_{P-2} \\
 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_P & h_{P-1} \\
 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & h_P \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & \cdots & 0 & h_P & \cdots & h_0 & \cdots & h_{-P} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \\
 & \cdots & 0 & 0 & h_P & \cdots & h_0 & \cdots & h_{-P} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \\
 & \cdots & 0 & 0 & 0 & h_P & \cdots & h_0 & \cdots & h_{-P} & 0 & 0 & \cdots & \\
 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & h_P & \cdots & h_0 & \cdots & h_{-P} & 0 & \cdots & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
h_{-P} & 0 & 0 & 0 & \cdots & & & & & & & & & \\
h_{-P+1} & h_{-P} & 0 & 0 & \cdots & & & & & & & & & \\
h_{-P+2} & h_{-P+1} & h_{-P} & 0 & 0 & \cdots & & & & & & & & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{bmatrix}
$$

Cas circulant : diagonalisation

- Diagonalisation de matrices circulantes ...

$$\bar{\boldsymbol{H}} = \boldsymbol{F}^\dagger \boldsymbol{\Lambda}_h \boldsymbol{F}$$

- ... dans la base de Fourier

$$\boldsymbol{F} = N^{-1/2} \left[e^{-2i\pi(k-1)(l-1)/N} \right]_{k,l \in 1,\dots,N}$$

- Rappel de quelques propriétés

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}^{\mathrm{t}} &= \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{F}^\dagger \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^\dagger &= \boldsymbol{I}_N \\ \boldsymbol{F}^{-1} &= \boldsymbol{F}^\dagger = \boldsymbol{F}^* \end{aligned}$$

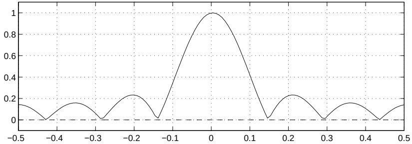
$$\boldsymbol{F}\boldsymbol{x} = \texttt{FFT(x)}$$

Cas circulant : valeurs propres

- Valeurs propres $\sim$ réponse en fréquence

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{h}} = \begin{bmatrix} \overset{\circ}{h}_0 \\ \overset{\circ}{h}_1 \\ \vdots \\ \overset{\circ}{h}_{N-2} \\ \overset{\circ}{h}_{N-1} \end{bmatrix} = \sqrt{N}\ \boldsymbol{F} \begin{bmatrix} \cdot \\ 0 \\ h_{-P} \\ \cdot \\ h_0 \\ \cdot \\ h_P \\ 0 \\ \cdot \end{bmatrix} = \texttt{fft(h,N)}$$

- « Lues » sur la réponse en fréquence



- Commentaire : conditionnement de $\boldsymbol{H}$ et caractère passe-bas

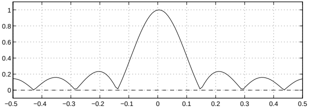
Cas circulant : convolution par FFT

- Mise en forme matricielle de convolution par FFT

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}^{\dagger}\boldsymbol{\Lambda}_h\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}\boldsymbol{z} &= \boldsymbol{\Lambda}_h \, \boldsymbol{F}\boldsymbol{x} \\ \mathring{\boldsymbol{z}} &= \boldsymbol{\Lambda}_h \, \mathring{\boldsymbol{x}} \end{aligned}$$

$$\mathring{z}_n = \mathring{h}_n \, \mathring{x}_n \quad \text{pour } n = 1, \ldots, N$$



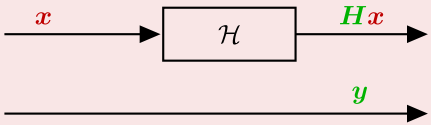
- Atténuations en fréquence, caractère passe-bas, caractère mal-posé
- Système possiblement non-inversible

- Remarque : calcul de convolution exact toujours possible, mais. . .

Restaurée aux moindres carrés

- Comparer observations $\boldsymbol{y}$ et sortie modèle $\boldsymbol{Hx}$
  - Inconnue : $\boldsymbol{x}$
  - Connus : $\boldsymbol{H}$ et $\boldsymbol{y}$

Comparaison terrain – modèle



- Critère de moindres carrés : distance observation – sortie modèle

$$J_{\mathrm{MC}}(\boldsymbol{x}) = \left\| \boldsymbol{y} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{x} \right\|^2$$

- Solution des moindres carrés

$$\widehat{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{MC}} = \arg\min_{\boldsymbol{x}} J_{\mathrm{MC}}(\boldsymbol{x})$$

  - Solution $\widehat{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{MC}}$ la meilleure pour reproduire les données
  - Faut que ça « *fitte* », que ça « colle »

Aspects calculatoires

Modèle linéaire + moindres carrés $\rightsquigarrow$ Critère de quadratique

$$\begin{aligned} J_{\mathrm{MC}}(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}\|^2 &= (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{x})^{\mathrm{t}} (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}) \\ &= \boldsymbol{x}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{y}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{y} \end{aligned}$$

- Calcul du gradient $\rightsquigarrow$ linéaire

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial J_{\mathrm{MC}}}{\partial \boldsymbol{x}} = 2\,\boldsymbol{H}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{x} - 2\,\boldsymbol{H}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{y} = -2\boldsymbol{H}^{\mathrm{t}}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{x})$$

- Et du hessien $\rightsquigarrow$ constant

$$\boldsymbol{Q} = \frac{\partial^2 J_{\mathrm{MC}}}{\partial \boldsymbol{x}^2} = 2\boldsymbol{H}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{H} \qquad (\geqslant 0)$$

- Annulation du gradient $\rightsquigarrow$ système linéaire $\rightsquigarrow$ inversion matricielle

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{H}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{H})\,\widehat{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{MC}} &= \boldsymbol{H}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{y} \\ \widehat{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{MC}} &= (\boldsymbol{H}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{H})^{-1}\boldsymbol{H}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{y} \end{aligned}$$

Défauts de la solution aux moindres carrés

- Mise en œuvre et résultats : voir plus loin

- Solution inacceptable, explosive, dominée par le bruit
  - Matrice mal-conditionnée
  - Problème mal-posé
  - Instabilité numérique
  - Pourtant non biaisée et à variance minimale

- Solutions modifiées. . .

Régularisation : généralités

- Données insuffisament informatives
  $\rightsquigarrow$ Prise en compte d'information *a priori*

  1. Notion de compromis, de compétition
  2. Spécificité des méthodes

  $\rightsquigarrow$ Ici : *régularité* de l'image, idéalement *préservant les contours*
  $\rightsquigarrow$ Explicitation des informations *a priori*

- Régularisation
  - Par pénalisation, contrainte, re-paramétrisation
  - . . . ou d'autres choses . . . mais régularisation de toutes façons

- Régularisation par pénalisation

$$J_{\mathrm{MCP}}(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}\|^2 + \mu\,\mathcal{P}(\boldsymbol{x})$$

- Image restaurée

$$\widehat{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{MCP}} = \arg\min_{\boldsymbol{x}} J_{\mathrm{MCP}}(\boldsymbol{x})$$

Pénalisation quadratique

- Différences, dérivées d'ordres supérieurs, généralisations,...

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}(\boldsymbol{x}) &= \sum_n (x_{n+1} - x_n)^2 \\
\mathcal{P}(\boldsymbol{x}) &= \sum_n (x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1})^2 \\
\mathcal{P}(\boldsymbol{x}) &= \sum_n (\alpha\ x_{n+1} - x_n + \alpha'\ x_{n-1})^2 \\
\mathcal{P}(\boldsymbol{x}) &= \sum_n (\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{t}}\, \boldsymbol{x})^2
\end{aligned}
$$

- Combinaisons linéaires (ondelettes, truc-en-ette,...)

$$
\mathcal{P}(\boldsymbol{x}) = \sum_n (\boldsymbol{w}_n^{\mathrm{t}} \boldsymbol{x})^2 = \sum_n \left(\sum_m w_{nm} x_m \right)^2
$$

  - Redondante ou pas
  - Lien ondelette de Haar et autres

Pénalisation quadratique

- Aspects 2D : dérivées, différences finies, approximations de gradients

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\boldsymbol{x}) &= \sum_{p\sim q}(x_p - x_q)^2 \\ &= \sum_{n,m}(x_{n+1,m} - x_{n,m})^2 + \sum_{n,m}(x_{n,m+1} - x_{n,m})^2\end{aligned}$$

- Norme de filtrées de l'image $\sim$ de gradient de l'image
  - En lignes + en colonnes

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

  - Les deux conjointement

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Remarques
  - Notion de voisinages et champs de Markov
  - Tout filtre passe-haut, contour (Prewitt, Sobel,...)
  - Combinaisons linéaires (ondelettes, truc-en-ette,...)

Pénalisation quadratique

- Autres possibles (un peu différent)
  - Rappel à une forme connue

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{t}} (\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}})$$

  - Norme euclidienne standard (termes séparables)

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{t}} \boldsymbol{x}$$

- Forme la plus générale

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{t}} \boldsymbol{\Gamma} (\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}})$$

- Dans le suite :

$$\mathcal{P}_1(\boldsymbol{x}) \quad = \quad \sum (x_p - x_q)^2 \quad = \quad \|\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}\|^2 \quad = \quad \boldsymbol{x}^{\mathrm{t}} \boldsymbol{D}^{\mathrm{t}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{x}$$

et $\boldsymbol{D} = \dots$

Restaurée aux moindres carrés pénalisés

- Rappel du critère...

$$J_{\text{MCP}}(\boldsymbol{x}) \quad = \quad \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}\|^2 + \mu \, \|\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}\|^2$$

- ... de son gradient ...

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial J_{\text{MCP}}}{\partial \boldsymbol{x}} = -2\boldsymbol{H}^{\text{t}}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}) + 2\mu \, \boldsymbol{D}^{\text{t}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}$$

- ... de son Hessien ...

$$\boldsymbol{Q} = \frac{\partial^2 J_{\text{MCP}}}{\partial \boldsymbol{x}^2} = 2\boldsymbol{H}^{\text{t}}\boldsymbol{H} + 2\mu \, \boldsymbol{D}^{\text{t}}\boldsymbol{D}$$

- ... du système d'équation normale ...

$$(\boldsymbol{H}^{\text{t}}\boldsymbol{H} + \mu \boldsymbol{D}^{\text{t}}\boldsymbol{D}) \, \widehat{\boldsymbol{x}}_{\text{MCP}} \quad = \quad \boldsymbol{H}^{\text{t}}\boldsymbol{y}$$

- ... et du minimiseur ...

$$\widehat{\boldsymbol{x}}_{\text{MCP}} \quad = \quad (\boldsymbol{H}^{\text{t}}\boldsymbol{H} + \mu \boldsymbol{D}^{\text{t}}\boldsymbol{D})^{-1}\boldsymbol{H}^{\text{t}}\boldsymbol{y}$$

Juste ré-écriture

- Ré-écriture du critère ...

$$\begin{aligned} J_{\text{MCP}}(\boldsymbol{x}) &= \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}\|^2 + \mu\, \|\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}\|^2 \\ &= \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\text{t}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{q}^{\text{t}}\boldsymbol{x} + q_0 \end{aligned}$$

  - $\boldsymbol{Q}$ est le Hessien ...

$$\boldsymbol{Q} = \frac{\partial^2 J_{\text{MCP}}}{\partial \boldsymbol{x}^2} = 2\boldsymbol{H}^{\text{t}}\boldsymbol{H} + 2\mu\, \boldsymbol{D}^{\text{t}}\boldsymbol{D}$$

  - $\boldsymbol{q}$ est le gradient à l'origine ...

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{g}(0) = -2\boldsymbol{H}^{\text{t}}\boldsymbol{y}$$

- ... du système ...

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{H}^{\text{t}}\boldsymbol{H} + \mu\boldsymbol{D}^{\text{t}}\boldsymbol{D})\, \widehat{\boldsymbol{x}}_{\text{MCP}} &= \boldsymbol{H}^{\text{t}}\boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{Q}\, \widehat{\boldsymbol{x}}_{\text{MCP}} &= -\boldsymbol{q} \end{aligned}$$

- ... et du minimiseur ...

$$\widehat{\boldsymbol{x}}_{\text{MCP}} = (\boldsymbol{H}^{\text{t}}\boldsymbol{H} + \mu\boldsymbol{D}^{\text{t}}\boldsymbol{D})^{-1}\boldsymbol{H}^{\text{t}}\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{q}$$

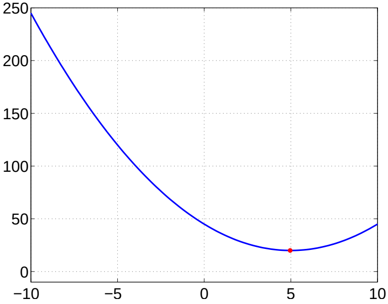
Aspects numérique et mise en œuvre

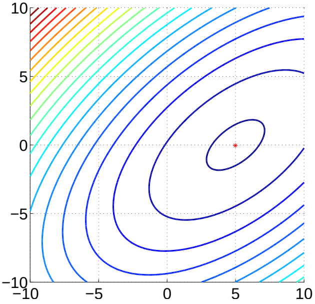
Nombreuses options et nombreux liens...

- Calcul direct, forme compacte, inversion matricielle
- Algorithmes de résolution de systèmes linéaires
  - Gauss, Gauss-Jordan
  - Substitution
  - Triangularisation,...
- Algorithmes de moindres carrés récurrents (surtout 1D)
- Lisseur de Kalman et ses versions rapides (surtout 1D)
- Algorithmes d'optimisation
  - descente dans la direction opposée au gradient ...
  - ... et diverses versions
- Diagonalisation
  - Approximation circulante et diagonalisation par FFT

Critère quadratique : généralités

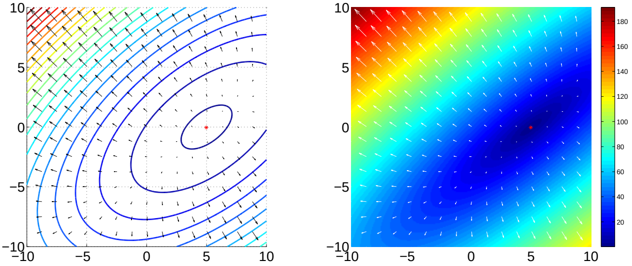
- Une variable : $\alpha(t - \bar{t})^2 + \gamma$
- Deux variables : $\alpha_1(t_1 - \bar{t}_1)^2 + \alpha_2(t_2 - \bar{t}_2)^2 + \beta(t_2 - t_1)^2 + \gamma$





- Commentaire : convexe, concave, point selle, direction propre

- Deux variables : $\alpha_1(t_1 - \bar{t}_1)^2 + \alpha_2(t_2 - \bar{t}_2)^2 + \beta(t_2 - t_1)^2 + \gamma$



Optimalité sur $\mathbb{R}^N$ (pas de contrainte)

- Gradient nul

$$0 = \left.\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\bar{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{g}(\bar{\boldsymbol{x}})$$

- Hessien positif

$$\boldsymbol{Q} = \frac{\partial^2 J}{\partial \boldsymbol{x}^2} \geqslant 0$$

Algorithmes « de descente »

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \arg\min_{\boldsymbol{x}} J(\boldsymbol{x})$$

Algorithme itératif à point fixe

- Initialisation $\boldsymbol{x}^{[0]}$
- Itération $\boldsymbol{x}^{[1]}$, $\boldsymbol{x}^{[2]}$,... $\boldsymbol{x}^{[k]}$,...

$$\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \boldsymbol{x}^{[k]} + \tau^{[k]}\boldsymbol{\delta}^{[k]}$$

  - Direction $\boldsymbol{\delta} \in \mathbb{R}^N$
  - Pas $\tau \in \mathbb{R}_+$

$$\boxed{\boldsymbol{x}^{[k]} \xrightarrow[k=\infty]{} \bar{\boldsymbol{x}}}$$

- Condition d'arrêt, *e.g.*, $\|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^{[k]})\| < \varepsilon$

Algorithmes « de gradient »

- Direction δ
  - « Optimale » : opposé du gradient
  - Newton, inverse Hessien
  - Préconditionné
  - Directions corrigées :
    - bissectrice, Vignes, Polack-Ribière,...
    - direction conjuguée,...
  - ...
- Pas τ
  - « Optimal »
  - Sur-relaxé / sous-relaxé
  - Armijo, Goldstein, Wolfe
  - ...

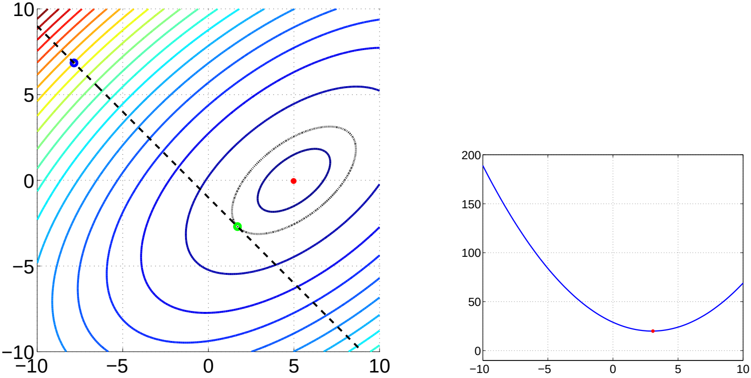
- ... optimal, oui, mais pas globalement...

Algorithme de gradient à pas optimal

Stratégie : direction optimale $\oplus$ pas optimal

- Itération $\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \boldsymbol{x}^{[k]} + \tau^{[k]} \boldsymbol{\delta}^{[k]}$
  - Direction $\boldsymbol{\delta} \in \mathbb{R}^N$
$$\boldsymbol{\delta}^{[k]} = -\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^{[k]})$$
  - Pas $\tau \in \mathbb{R}_+$
$$J_{\boldsymbol{\delta}}(\tau) = J(\boldsymbol{x}^{[k]} + \tau \boldsymbol{\delta}^{[k]})$$
    - Que l'on peut ré-écrire $\rightsquigarrow$ polynôme du second ordre
$$J_{\boldsymbol{\delta}}(\tau) = \ldots \tau^2 + \ldots \tau + \ldots$$
    - Et optimiser explicitement $\rightsquigarrow$ pas optimal
$$\tau^{[k]} = \frac{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^{[k]})^{\mathrm{t}}\, \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^{[k]})}{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^{[k]})^{\mathrm{t}}\, \boldsymbol{Q}\, \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^{[k]})} = \frac{\left\| \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^{[k]})^{\mathrm{t}}\, \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^{[k]}) \right\|^2}{\left\| \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^{[k]})^{\mathrm{t}}\, \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^{[k]}) \right\|_{\boldsymbol{Q}}^2}$$

Illustration



- Deux lectures :
  - optimisation directionnelle, « line-search »
  - optimisation contrainte
- Remarque : orthogonalité des directions successives

Éléments de preuve de convergence (0)

Quelques notations

$$\begin{aligned} J(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{q}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{x} + q_0 \\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{q} \end{aligned}$$

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \arg\min_{\boldsymbol{x}} J(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{q}$$

Quelques résultats

$$J(\bar{\boldsymbol{x}}) = -\frac{1}{2}\boldsymbol{q}^{\mathrm{t}}\,\boldsymbol{Q}^{-1}\,\boldsymbol{q} + q_0$$

$$J(\boldsymbol{x}) - J(\bar{\boldsymbol{x}}) = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})^{\mathrm{t}}\,\boldsymbol{Q}^{-1}\,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$$

$$J(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - J(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)^{\mathrm{t}}\,\boldsymbol{h} + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{h}^{\mathrm{t}}\,\boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{h}$$

Éléments de preuve de convergence (1)

- Notations simplifiées : $\boldsymbol{x}^{[k]} = \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \boldsymbol{x}'$, $\tau^{[k]} = \tau$ et $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^{[k]}) = \boldsymbol{g}$

- Évolution du critère

$$
\begin{aligned}
J(\boldsymbol{x}') - J(\boldsymbol{x}) &= J(\boldsymbol{x} + \tau\,\boldsymbol{\delta}) - J(\boldsymbol{x}) \\
&= \boldsymbol{g}^{\mathrm{t}}\,[\tau\boldsymbol{\delta}] + \frac{1}{2}\,[\tau\boldsymbol{\delta}]^{\mathrm{t}}\,\boldsymbol{Q}\,[\tau\boldsymbol{\delta}] \\
&= \ldots \\
&= -\frac{1}{2}\,\frac{\left[\boldsymbol{g}^{\mathrm{t}}\,\boldsymbol{g}\right]^2}{\boldsymbol{g}^{\mathrm{t}}\,\boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{g}}
\end{aligned}
$$

puisque $\boldsymbol{\delta} = -\boldsymbol{g}$ et $\tau = \dfrac{\boldsymbol{g}^{\mathrm{t}}\,\boldsymbol{g}}{\boldsymbol{g}^{\mathrm{t}}\,\boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{g}}$

- Commentaire : ça descend...

Éléments de preuve de convergence (2)

Distance à l'optimum

$$
\begin{aligned}
J(\boldsymbol{x}') - J(\bar{\boldsymbol{x}}) &= J(\boldsymbol{x}) - J(\bar{\boldsymbol{x}}) - \frac{1}{2}\,\frac{\left[\boldsymbol{g}^{\mathrm{t}}\,\boldsymbol{g}\right]^2}{\boldsymbol{g}^{\mathrm{t}}\,\boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{g}} \\
&= J(\boldsymbol{x}) - J(\bar{\boldsymbol{x}}) - \frac{1}{2}\,\frac{\left[\boldsymbol{g}^{\mathrm{t}}\,\boldsymbol{g}\right]^2}{\boldsymbol{g}^{\mathrm{t}}\,\boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{g}} \times \frac{J(\boldsymbol{x}) - J(\bar{\boldsymbol{x}})}{\boldsymbol{g}^{\mathrm{t}}\,\boldsymbol{Q}^{-1}\,\boldsymbol{g}/2} \\
&= \left[J(\boldsymbol{x}) - J(\bar{\boldsymbol{x}})\right]\left[1 - \frac{\left[\boldsymbol{g}^{\mathrm{t}}\,\boldsymbol{g}\right]^2}{\left[\boldsymbol{g}^{\mathrm{t}}\,\boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{g}\right]\left[\boldsymbol{g}^{\mathrm{t}}\,\boldsymbol{Q}^{-1}\,\boldsymbol{g}\right]}\right] \\
&= \ldots \\
&\leqslant \left[J(\boldsymbol{x}) - J(\bar{\boldsymbol{x}})\right]\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2
\end{aligned}
$$

… donc « ça converge »

- M et m : v. p. min. et max. de $\boldsymbol{Q}$ … et commentaire
- Inégalite de Kantorovitch (voir diapositive suivante)

Inégalité de Kantorovitch

Résultat

$$\left[\boldsymbol{u}^{\mathrm{t}}\,\boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{u}\right]\ \left[\boldsymbol{u}^{\mathrm{t}}\,\boldsymbol{Q}^{-1}\,\boldsymbol{u}\right] \leqslant \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{m}{M}}+\sqrt{\frac{M}{m}}\right)^2 \|\boldsymbol{u}\|^4$$

- $\boldsymbol{Q}$ symétrique définie positive
- M et m : valeurs propres maximale et minimale de $\boldsymbol{Q}$

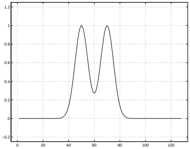
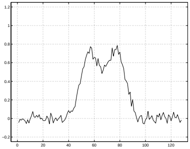
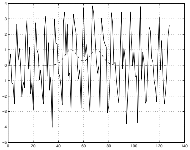
Éléments de démonstration

- Un peu long et complexe
- Cas $\|\boldsymbol{u}\| = 1$
- Diagonaliser $\boldsymbol{Q}$: $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}$ *et* $\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{P}$
- Combinaison convexe des v.p. et des v.p. inverses
- Convexité de $t \mapsto 1/t$

Résultats

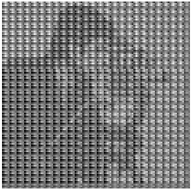
- $\mu = 0$, solution des moindres carrés
- μ croissant, μ qui va bien
- Approximation circulante
  - Mise en œuvre par FFT
  - Interprétation filtrage de Wiener, filtrage inverse

Solutions aux moindres carrés (Hunt et photographe)


Entrée


Données


Moindres carrés

Qualités / Défauts

- Très général, hyper-rapide, aucun paramètre à régler
- ... marche pas ... (sauf si...)
- Et pourtant : non biaisée et à variance minimale !!

Calculs par FFT

$$
\begin{aligned}
\widehat{\boldsymbol{x}} &= (\boldsymbol{H}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{H} + \mu \boldsymbol{D}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{D})^{-1}\boldsymbol{H}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{y} \\
&= (\bar{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{t}}\bar{\boldsymbol{H}})^{-1}\bar{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{y} \\
&= (\boldsymbol{F}^{\dagger}\boldsymbol{\Lambda}_h^{\dagger}\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\dagger}\boldsymbol{\Lambda}_h\boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{F}^{\dagger}\boldsymbol{\Lambda}_h^{\dagger}\boldsymbol{F}\boldsymbol{y} \\
&= \boldsymbol{F}^{\dagger}\boldsymbol{\Lambda}_h^{-1}\boldsymbol{F}\boldsymbol{y}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F}\widehat{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{\Lambda}_h^{-1}\boldsymbol{F}\boldsymbol{y} \\
\mathring{\widehat{\boldsymbol{x}}} &= \boldsymbol{\Lambda}_h^{-1}\mathring{\boldsymbol{y}}
\end{aligned}
$$

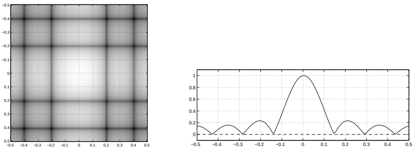
$$
\mathring{\widehat{x}}_n = \frac{\mathring{y}_n}{\mathring{h}_n} \quad \text{pour } n = 1, \ldots, N
$$

C'est du filtrage inverse ! !

Pseudo-code Matlab

```
ObjetEstMC = IFFT( FFT(Donnees,N) ./ fft(RI,N) )
```

Analyse fréquentielle



Réponse en fréquence (2D et coupe)

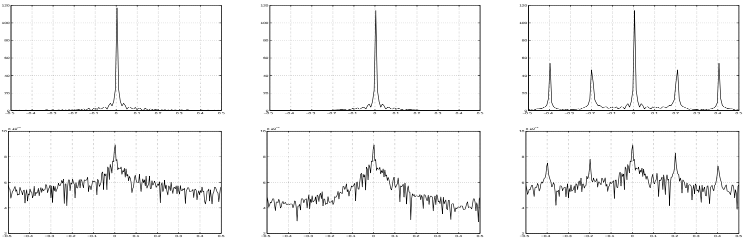
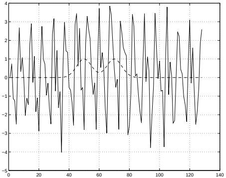


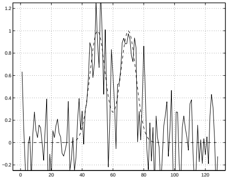
Image originale Données Moindres carrés

Solutions par pénalisation quadratique (Hunt)

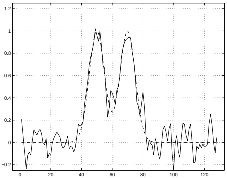
- Évolution avec μ



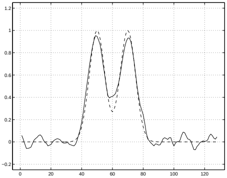
$\mu = 0$



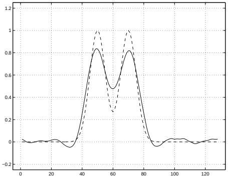
$\mu = 10^{-3}$



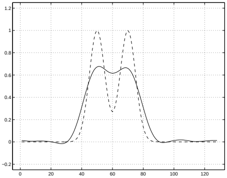
$\mu = 10^{-2}$



$\mu = 10^{-1}$



$\mu = 1$



$\mu = 10^{+1}$

Solutions par pénalisation quadratique (photographe)

Entrée

Données

Moindres carrés pénalisés

Calculs par FFT

$$
\begin{aligned}
\widehat{\boldsymbol{x}} &= (\bar{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{t}}\bar{\boldsymbol{H}} + \mu\bar{\boldsymbol{D}}^{\mathrm{t}}\bar{\boldsymbol{D}})^{-1}\bar{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{y} \\
&= \boldsymbol{F}^{\dagger}(\boldsymbol{\Lambda}_h^{\dagger}\boldsymbol{\Lambda}_h + \mu\boldsymbol{\Lambda}_d^{\dagger}\boldsymbol{\Lambda}_d)^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_h^{\dagger}\boldsymbol{F}\boldsymbol{y}
\end{aligned}
$$

$$
\mathring{\widehat{\boldsymbol{x}}} = (\boldsymbol{\Lambda}_h^{\dagger}\boldsymbol{\Lambda}_h + \mu\boldsymbol{\Lambda}_d^{\dagger}\boldsymbol{\Lambda}_d)^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_h^{\dagger}\mathring{\boldsymbol{y}}
$$

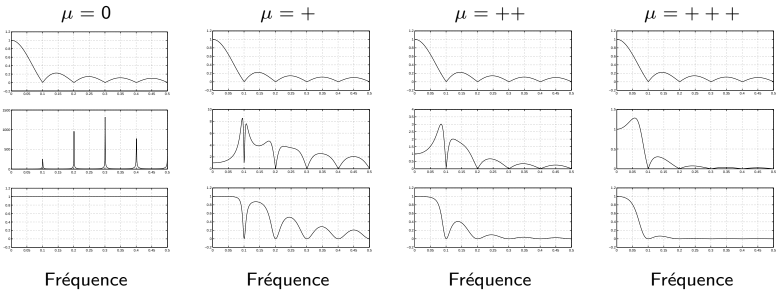
$$
\mathring{\widehat{x}}_n = \frac{\mathring{h}_n^*}{|\mathring{h}_n|^2 + \mu|\mathring{d}_n|^2}\,\mathring{y}_n \qquad \text{pour } n = 1, \ldots N
$$

C'est du filtrage de Wiener ! !

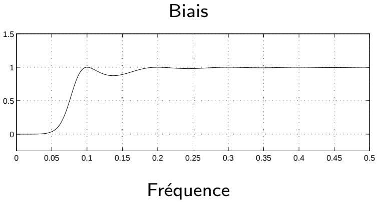
Pseudo-code Matlab

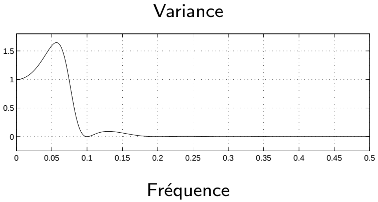
```
Gain = fft(RI,N)^* ./ (|fft(RI,N)|^2 + mu1*|fft([-1,1],N)|^2)
ObjetEstMCP = IFFT( FFT(Donnees,N) .* Gain )
```

Lecture fréquentielle : égalisation dans la bande

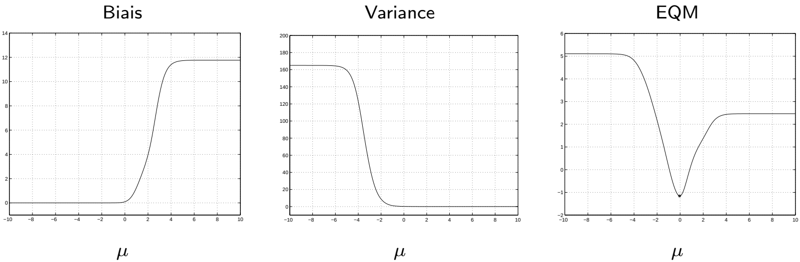


Biais / Variance (1)





Biais / Variance (2)



Synthèse et extensions

Synthèse

- Déconvolution d'image
  - Aussi : modèle direct linéaire mais non-invariant
  - Et aussi : cas des signaux
- Pénalisation quadratique et régularité des solutions
  - Gradient de niveaux de gris et extensions
  - Autres décompositions
- Calcul numérique
  - Optimisation numérique (gradient, pas optimal,. . .)
  - Approximation circulante (diagonalisation) $\rightsquigarrow$ tous calculs par FFT

Extensions

- Extension non quadratiques $\rightsquigarrow$ résolution accrue (cours suivants)

Approches avec préservation des contours

- Solution quadratique limitée en « résolution »
- Moins de « lissage » au niveau des « discontinuités »
  - Ambivalence :
    - Lissage (zone homogène)
    - Réhaussement (discontinuités)
  - . . . et nouveau compromis

Structure algorithmique

- Appuyée sur la solution quadratique
  - par FFT (Wiener-Hunt)
  - par lissage de Kalman (et ses versions rapides, factorisées,. . .)
  - par optimisation numérique (gradient, pixel par pixel,. . .)

Préservation des contours et pénalisation non-quadratique

- Image restaurée toujours comme minimiseur ...

$$\widehat{\boldsymbol{x}} = \arg\min_{\boldsymbol{x}} J(\boldsymbol{x})$$

- ... d'un critère pénalisé ...

$$J(\boldsymbol{x}) = \left\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}\right\|^2 + \mu\,\mathcal{P}(\boldsymbol{x})$$

- ... toujours pénalisant pour les « faibles variations »
  mais moins pénalisant pour les « discontinuités »

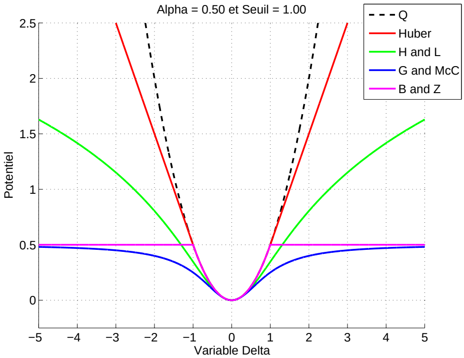
$$\mathcal{P}(\boldsymbol{x}) = \sum_{p \sim q} \phi(x_p - x_q)$$

$$\phi(\delta) = \delta^2 \quad \rightsquigarrow \quad \phi(\delta) = \ldots\ ?$$

  - Un peu d'ambivalence : nouveau compromis
    - Lissage (zone homogène)
    - Réhaussement (discontinuités)

Potentiels typiques

- Toujours $\phi(\delta) \sim \delta^2$ pour δ petit
- Comportements pour δ grand
  1. **Asymptote horizontale**
  2. **Branche parabolique horizontale**
  3. **Asymptotique oblique**
  4. **Branche parabolique verticale**



Quatre grands types de potentiels

1. **Asymptote horizontale** $\phi(\delta) \sim 1$
   [Blake et Zisserman (87), Geman et McClure (87)]

$$\varphi(\delta) = \alpha s^2 \min\left(1, (\delta/s)^2\right) \quad ; \quad \varphi(\delta) = \alpha s^2 \frac{(\delta/s)^2}{1 + (\delta/s)^2}$$

2. **Branche parabolique horizontale** $\phi(\delta) \sim \log|\delta|$
   [Hebert et Leahy (89)]

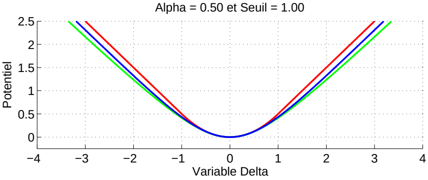
$$\varphi(\delta) = \alpha s^2 \log\left[1 + (\delta/s)^2\right]$$

3. **Asymptotique oblique** $\phi(\delta) \sim |\delta|$
   Huber, hyperbolique, Log cosinus hyperbolique, fair function

$$\varphi(\delta) = \alpha \begin{cases} \delta^2 & \text{if } |\,\delta\,| \leqslant s \\ 2s\,|\,\delta\,| - s^2 & \text{if } |\,\delta\,| \geqslant s \end{cases} \quad ; \quad \varphi(\delta) = 2\alpha s^2 \left(\sqrt{1 + [\delta/s]^2} - 1\right)$$

4. **Branche parabolique verticale** $\phi(\delta) \sim \delta^2$
   Solution de Wiener-Hunt

$$\varphi(\delta) = \alpha\delta^2$$



Huber : $$\varphi(\delta) = \alpha s^2 \begin{cases} [\delta/s]^2 & \text{if } |\,\delta\,| \leqslant s \\ 2\,|\,\delta\,|/s - 1 & \text{if } |\,\delta\,| \geqslant s \end{cases}$$

Hyperbolique : $$\varphi(\delta) = 2\alpha s^2 \left(\sqrt{1 + [\delta/s]^2} - 1 \right)$$

LogCosh : $$\varphi(\delta) = 2\alpha s^2 \log\cosh\left(|\,\delta\,|/s\right)$$

FairFunction : $$\varphi(\delta) = 2\alpha s^2 \left[|\,\delta\,|/s - \log\left(1 + |\,\delta\,|/s\right)\right]$$

Pénalisations non-quadratiques plus générales

- Filtrées de l'image $\sim$ gradient de l'image (lignes, colonnes, les deux)

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{x}) = \sum_{p \sim q} \phi(x_p - x_q)$$

- Différences, dérivées d'ordres supérieurs, généralisations,...

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{x}) = \sum_{n} \phi(\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{t}} \boldsymbol{x})$$

- Combinaisons linéaires plus avancées (ondelettes,...)

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{x}) = \sum_{n} \sum_{m} \pi_n \phi_n(w_{nm} x_m)$$

- Autres possibles (un peu différent)
  - Rappel à une forme connue

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{x}) = \sum_{n} \phi(x_n - \bar{x}_n)$$

  - Pénalité séparable

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{x}) = \sum_{n} \phi(x_n)$$

Restaurée aux moindres carrés pénalisés

- Rappel du critère

$$J(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}\|^2 + \mu \sum_{p \sim q} \phi_s(x_p - x_q)$$

$$\widehat{\boldsymbol{x}} = \arg\min_{\boldsymbol{x}} J(\boldsymbol{x})$$

  - avec ϕ_s l'un des potentiels (non-quadratique) évoqués
  - et deux hyperparamètres : μ et s

- Critère non-quadratique
  - Gradient non-linéaire
  - Pas de solution explicite

- Deux questions
  - Minimiseur : existence, unicité,... continuité
  - Calcul pratique : algorithme d'optimisation numérique,...

Convexité et existence-unicité

- Ensemble convexe
  - $\mathbb{R}^N$, $\mathbb{R}_+^N$, pavé de $\mathbb{R}^N$,...
  - Propriétés : intersection, enveloppe convexe, projection,...
- Critère convexe (strictement)
  - $\Theta(u) = u^2$, $\Theta(u) = |\, u \,|$, $\Theta(\boldsymbol{u}) = \|\boldsymbol{u}\|^2$,...
  - Propriétés : somme de fonction convexe, lignes de niveaux,...
- Résultat clé
  - Ensemble des minimiseurs d'un convexe sur un convexe est convexe
  - Convexité stricte $\rightsquigarrow$ minimiseur unique
- Application
  - ϕ convexe $\implies$ J convexe
- Dans la suite, potentiel ϕ_s
  - Huber ou hyperbolique : convexe (strict) $\rightsquigarrow$ garanties
  - Autres aussi : non-convexe $\rightsquigarrow$ pas de garantie (encore que...)

Approche semi-quadratique (début)

- Rappel du critère

$$J(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}\|^2 + \mu \sum_{p\sim q} \phi(x_p - x_q)$$

  - Résolution appuyée quadratique
  - Jeu de variables auxiliaires b_{pq} pour que : $\quad \phi(\delta_{pq}) \quad \longleftrightarrow \quad \delta_{pq}^2$

- Idée de [Geman et Yang 95], avec $\psi(b)$ bien choisie :

$$\phi(\delta) = \inf_b \left[\frac{1}{2}(\delta - b)^2 + \psi(b) \right]$$

- Critère étendu

$$\bar{J}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) = \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}\|^2 + \mu \sum_{p\sim q} \frac{1}{2} \left[(x_p - x_q) - b_{pq} \right]^2 + \psi(b_{pq})$$

  et donc bien sûr

$$J(\boldsymbol{x}) = \inf_{\boldsymbol{b}} \bar{J}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b})$$

- Point algorithmique : minimisation alternée

Transformée de Legendre-Fenchel (TFL) Conjuguée Convexe (CC)

Définition de TLF ou CC

On se donne $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

- strictement convexe
- dérivable une fois (ou deux)

On appelle TLF ou CC la fonction notée $f^\star : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f^\star(t) \; = \; \sup_{x \in \mathbb{R}} \left[xt - f(x) \right]$$

Remarque

$$f^\star(0) \; = \; \sup_{x \in \mathbb{R}} \left[-f(x) \right] = - \inf_{x \in \mathbb{R}} \left[f(x) \right]$$

$$\forall t, x \in \mathbb{R}, \quad xt - f(x) \leqslant f^\star(t)$$

$$\forall t, x \in \mathbb{R}, \quad f^\star(t) + f(x) \geqslant xt$$

TFL : quelques propriétés par décalage-dilatation

$$f^\star(t) \;=\; \sup_{x\in\mathbb{R}} \;[\,xt - f(x)\,]$$

Vertical : décalage-dilatation ($\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}_+^\star$)

$$\begin{cases} g(x) = \alpha + \beta\, f(x) \\ g^\star(t) = \beta\, f^\star(t/\beta) - \alpha \end{cases}$$

Horizontal : décalage ($x_0 \in \mathbb{R}$) et dilatation ($\gamma \in \mathbb{R}_+^\star$)

$$\begin{cases} g(x) = f(x - x_0) \\ g^\star(t) = f^\star(t) - t x_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} g(x) = f(\gamma x) \\ g^\star(t) = f^\star(t/\gamma) \end{cases}$$

Cas particuliers

$$\alpha = 0, \beta = 1 \quad / \quad x_0 = 0 \quad / \quad \gamma = 1$$

TFL : un premier exemple

Cas quadratique ($\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}_+^\star$)

On considère la fonction

$$f(x) = \alpha + \frac{1}{2}\beta(x - x_0)^2$$

On détermine la CC

$$f^\star(t) \;=\; \sup_{x \in \mathbb{R}} \left[xt - f(x) \right]$$

- On pose $g_t(x) = xt - f(x) = xt - \left(\alpha + \beta(x - x_0)^2 / 2\right)$
  - En dérivant $g_t'(x) = t - \beta(x - x_0)$
  - Encore $g_t(x)'' = -\beta$
  - En annulant $g_t'(x)$, on a : $\bar{x} = x_0 + t/\beta$
  - Puis en reportant $f^\star(t) = g_t(\bar{x})$

$$f^\star(t) \;=\; \frac{1}{2\beta}(t + \beta x_0)^2 - \left(\alpha + \frac{1}{2}\beta x_0^2\right)$$

TFL : résultat d'explicitation générique

Formule de Legendre

$$f^\star(t) \;=\; \sup_{x\in\mathbb{R}} \left[xt - f(x) \right]$$

- On pose $g_t(x) = xt - f(x)$
  - En dérivant : $g_t'(x) = t - f'(x)$
  - Encore : $g_t(x)'' = -f''(x)$
  - En annulant $g_t'(x)$:

$$\begin{aligned} t - f'(\bar{x}) &= 0 \\ \bar{x} &= f'^{-1}(t) \;=\; \chi(t) \end{aligned}$$

- Puis en reportant

$$f^\star(t) \;=\; g_t(\bar{x}) \;=\; t\bar{x} - f(\bar{x}) \;=\; t\chi(t) - f\left[\chi(t)\right]$$

TFL : résultat d'explicitation générique

Dérivées

- Conjuguée convexe explicitée

$$f^\star(t) = t\chi(t) - f\left[\chi(t)\right] \quad \text{avec } \chi = f^{'-1}$$

- En dérivant :

$$\begin{array}{rcl} f^{\star'}(t) & = & \chi(t) + t\chi'(t) - \chi'(t)\; f'\left[\chi(t)\right] \\ & = & \chi(t) \\ & = & f^{'-1}(t) \end{array}$$

- Encore :

$$f^{\star''}(t) = \chi(t)' = \frac{1}{f''\left[\chi(t)\right]} \quad > 0$$

  - donc $f^\star$ convexe

TFL : résultat clé

Double conjuguée

- Transformer deux fois redonne l'originale

$$f^{\star\star}(x) = f(x)$$

$$f^{\star\star}(t) \;=\; \sup\ [\,xt - f^{\star}(x)\,]$$

- On pose $h_t(x) = xt - f^{\star}(x)$ et en annulant la dérivée :

$$\begin{aligned} 0 &= h_t'(\bar{x}) = t - {f^{\star}}'(\bar{x}) = t - {f'}^{-1}(\bar{x}) = t - \chi(\bar{x}) \\ \bar{x} &= \chi^{-1}(t) = f'(t) \end{aligned}$$

- On reporte

$$\begin{aligned} f^{\star\star}(t) = h_t(\bar{x}) &= \bar{x}t - f^{\star}(\bar{x}) \\ &= \bar{x}t - [\bar{x}\chi(\bar{x}) - f(\chi(\bar{x}))] \\ &= \bar{x}t - \bar{x}t + f(t) \\ &= f(t) \end{aligned}$$

Bilan TFL : un théorème vivant

Définition

On se donne $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

- strictement convexe
- dérivable une fois (ou deux)

$$f^\star(t) \;=\; \sup_{x\in\mathbb{R}} \left[xt - f(x) \right]$$

Propriétés

$$f^\star(t) = t\chi(t) - f\left[\chi(t)\right] \quad \text{avec } \chi = f^{'-1}$$

$$f^{\star'} = f^{'-1} = \chi$$

$$f^{\star''}(t) = 1/f^{''}\left[\chi(t)\right]$$

$$f^\star \text{ est convexe}$$

$$\boxed{f^{\star\star}(x) = f(x)}$$

Théorème en action : semi-quadratique (1)

Position du problème

On se donne un potentiel ϕ, convexe ou non, et on veut

$$\phi(\delta) = \inf_{b \in \mathbb{R}} \left[(\delta - b)^2/2 + \psi(b) \right]$$

- On définit g de manière à ce qu'elle soit convexe strict :

$$g(\delta) = \delta^2/2 - \phi(\delta)$$

- On détermine sa CC :

$$\begin{aligned} g^\star(b) &= \sup_{\delta \in \mathbb{R}} \left[b\delta - g(\delta) \right] \\ &= \sup_{\delta \in \mathbb{R}} \left[\phi(\delta) - (\delta - b)^2/2 \right] + b^2/2 \end{aligned}$$

- On pose :

$$\psi(b) = g^\star(b) - b^2/2 = \sup_{\delta \in \mathbb{R}} \left[\phi(\delta) - (\delta - b)^2/2 \right]$$

Théorème en action : semi-quadratique (2)

- On exploite alors $g = g^{\star\star}$

$$\begin{aligned} g(\delta) &= g^{\star\star}(\delta) \\ \delta^2/2 - \phi(\delta) &= \sup_{b\in\mathbb{R}} \left[\, b\delta - g^{\star}(\delta) \,\right] \\ \phi(\delta) &= \delta^2/2 - \sup_{b\in\mathbb{R}} \left[b\delta - g^{\star}(\delta) \right] \\ &= \inf_{b\in\mathbb{R}} \left[(\delta - b)^2/2 + \psi(b) \right] \end{aligned}$$

- Cerise sur le gâteau, on a le minimiseur :

$$0 = \left[(\delta - \bar{b})^2/2 + \psi(b) \right]' = (\bar{b} - \delta) + \psi'(\bar{b}) = g^{\star'}(\bar{b}) - \delta$$

d'où :

$$\bar{b} = g^{\star'^{-1}}(\delta) = g'(\delta) = \delta - \phi'(\delta)$$

Approche semi-quadratique (fin)

- Rappel du critère initial et du critère étendu

$$J(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}\|^2 + \mu \sum_{p \sim q} \phi(x_p - x_q)$$

$$\bar{J}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) = \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}\|^2 + \mu \sum_{p \sim q} \frac{1}{2} \left[(x_p - x_q) - b_{pq}\right]^2 + \psi(b_{pq})$$

- Point algorithmique : minimisation alternée

  1. Minimisation en $\boldsymbol{x}$ à $\boldsymbol{b}$ fixé : $\widehat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{b}) = \min_{\boldsymbol{x}} \bar{J}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b})$
     Problème quadratique
  2. Minimisation en $\boldsymbol{b}$ à $\boldsymbol{x}$ fixé : $\widehat{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{x}) = \min_{\boldsymbol{b}} \bar{J}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b})$
     Mise à jour séparée et explicite

Mise à jour de l'image

- Non-séparable mais quadratique

$$\begin{aligned} \bar{J}(\boldsymbol{x}) &= \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}\|^2 + \mu \sum_{p \sim q} \frac{1}{2} \left[(x_p - x_q) - b_{pq}\right]^2 \\ &= \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}\|^2 + \bar{\mu} \, \|\boldsymbol{D}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|^2 \end{aligned}$$

- Système d'équations normales

$$(\boldsymbol{H}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{H} + \bar{\mu}\boldsymbol{D}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{D})\,\widehat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{H}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{y} + \bar{\mu}\,\boldsymbol{D}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{b}$$

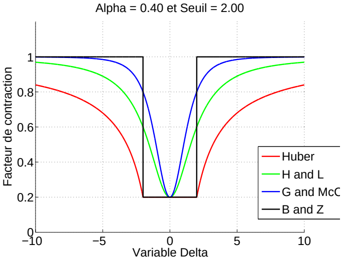
- Minimiseur

$$\widehat{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{H}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{H} + \bar{\mu}\boldsymbol{D}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{D})^{-1}\,(\boldsymbol{H}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{y} + \bar{\mu}\,\boldsymbol{D}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{b})$$

- Aspect numérique
  - Algorithme de descente (avec sous-itérations)
  - Cas circulant et FFT (sans sous-itération)

Mise à jour des variables auxiliaires

- Séparable (parallèle), explicite (pas de sous-itération), simple
- Chaque $b = b_{pq} \quad \leftrightarrow \quad \delta = \delta_{pq} = x_p - x_q$
- Équation de mise à jour $\bar{b} = \delta - \phi'(\delta)$
  - Huber : $\bar{b} = \delta\left[1 - 2\alpha \min\left(1; s/\delta\right)\right]$
  - Geman & McClure : $\bar{b} = \delta \left[1 - \dfrac{2\alpha}{\left(s/\delta\right)^2}\right]$
  - ...



Résultats L_2 / L_1

Entrée

Données

Pénalité quadratique

Pénalité L2-L1

Synthèse et extensions

Synthèse

- Déconvolution d'image
  - Aussi : modèle direct linéaire mais non-invariant
  - Et aussi : cas des signaux
- Préservation des discontinuités et pénalisation non-quadratique
  - Gradient de niveaux de gris et autres décompositions
  - Cas convexe (et différentiable) et aussi cas non-convexe
- Calcul numérique par optimisation
  - Approche semi-quadratique
  - Technique de descente (gradient, pixel par pixel, FFT,...)

Extensions

- Prise en compte de contraintes $\rightsquigarrow$ résolution accrue (cours suivants)

Prise en compte de contraintes

- Restauration améliorée (résolution, physique,...)
  - Toujours sur la base d'un critère pénalisé ...

$$J(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}\|^2 + \mu\,\mathcal{P}(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}\|^2 + \mu\,\|\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}\|^2$$

  - ... image restaurée encore définie comme minimiseur ...

$$\widehat{\boldsymbol{x}} = \arg\min_{\boldsymbol{x}} J(\boldsymbol{x})$$

  - ... mais incluant des contraintes (sur la valeur des pixels)
  - Davantage d'information $\rightsquigarrow$ amélioration de « qualité »

Structure algorithmique

- Appuyée sur la solution quadratique
  - par FFT (Wiener-Hunt)
  - par lissage de Kalman (et ses versions rapides, factorisées,...)
  - par optimisation numérique (gradient, pixel par pixel,...)

Prise en compte de contraintes : positivité et support

Contraintes explorées ici

- Positivité

$$\mathrm{C_p} \;: \forall p \in \mathcal{M}\,, \quad x_p \geqslant 0$$

- Support

$$\mathrm{C_s} \;: \forall p \in \bar{\mathcal{S}}\,, \quad x_p = 0$$

Extensions (non exploré ici)

- Gabarit

$$\forall p \in \mathcal{M}\,, \quad t_p^- \leqslant x_p \leqslant t_p^+$$

- Carte partiellement connue

$$\forall p \in \mathcal{D}\,, \quad x_p = m_p$$

Forme générale

- Égalité / Inégalité

$$\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{a} = 0 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{Bx} - \boldsymbol{b} \geqslant 0$$

Optimum contraint

Aspect théorique

- Critère : pénalisé, quadratique, convexe strictement

$$J(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}\|^2 + \mu \|\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}\|^2$$

- Ensemble des contraintes convexe
- Solution : *unique minimiseur sous contrainte*

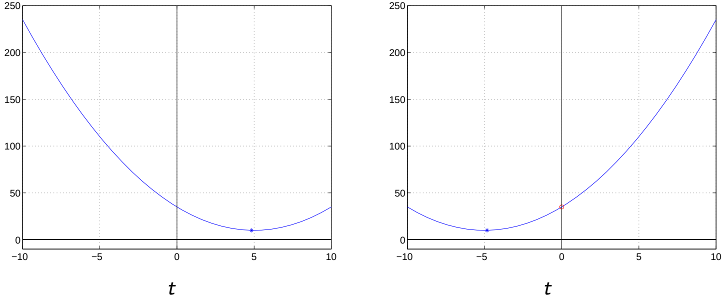
$$\widehat{\boldsymbol{x}} = \arg\min_{\boldsymbol{x}} \begin{cases} \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}\|^2 + \mu \|\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}\|^2 \\ \text{s.c.} \begin{cases} x_p = 0 & \text{for } p \in \bar{\mathcal{S}} \\ x_p \geqslant 0 & \text{for } p \in \mathcal{M} \end{cases} \end{cases}$$

Aspect numérique

- Optimisation quadratique avec contraintes linéaires
- Difficultés
  - $N \sim 1\,000\,000$
  - Contraintes $\oplus$ variables liées

Positivité : dimension un

- Une variable : $\alpha(t - \bar{t})^2 + \gamma$

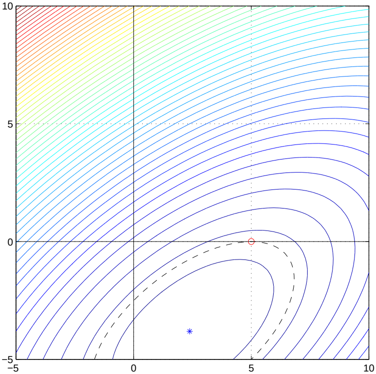


- Solution contrainte

$$\widehat{t} = \max\left[\, 0, \bar{t} \,\right]$$

Positivité : dimension deux

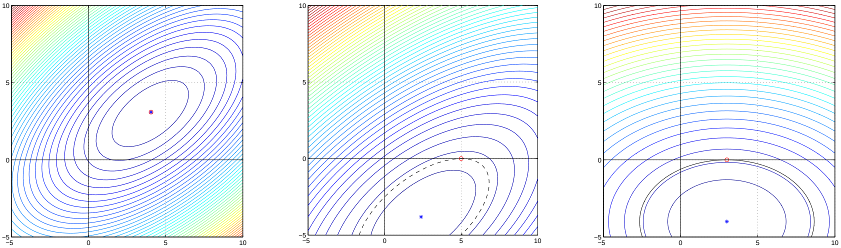
- Deux variables : $\alpha_1(t_1 - \bar{t}_1)^2 + \alpha_2(t_2 - \bar{t}_2)^2 + \beta(t_2 - t_1)^2 + \gamma$



- Pas évident de déduire le contraint du non-contraint

Positivité : dimension deux

- Deux variables : $\alpha_1(t_1 - \bar{t}_1)^2 + \alpha_2(t_2 - \bar{t}_2)^2 + \beta(t_2 - t_1)^2 + \gamma$



1 2 3

- Solution contrainte = Solution non-contrainte (1)
- Solution contrainte $\neq$ Solution non-contrainte
  . . . et donc contraintes actives
  - Solution contrainte $\neq$ Solution non-contrainte projetée (2)
    $$\left(\widehat{t}_1 ; \widehat{t}_2\right) \neq \left(\max\left[0, \bar{t}_1\right] ; \max\left[0, \bar{t}_2\right]\right)$$
  - Solution contrainte = Solution non-contrainte projetée (3)
    $$\left(\widehat{t}_1 ; \widehat{t}_2\right) = \left(\max\left[0, \bar{t}_1\right] ; \max\left[0, \bar{t}_2\right]\right)$$

Optimisation : existant classique

Problème

- Optimisation quadratique avec contraintes linéaires
- Difficultés
  - $N \sim 1\,000\,000$
  - Contraintes $\oplus$ variables liées

Algorithmes existants

- Outils existants *garantis convergents*
  [Bertsekas 95,99 ; Nocedal 00,08 ; Boyd 04,11]
  - Gradient projeté, contraint
  - Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (L-BFGS) et *limited memory*
  - Points intérieurs
  - Descente pixel par pixel
  - Lagrangien augmenté, ADMM
    - Contraint mais non-liées $+$ liées mais non-contraint
    - Solutions intermédiaires par FFT

Lagrangien et pénalisation

- Contrainte égalité : $x_p = 0$

$$\sum_{p \in \bar{\mathcal{S}}} \ell_p x_p + \frac{1}{2}\,\rho \sum_{p \in \bar{\mathcal{S}}} x_p^2$$

- Contrainte inégalité : $(x_p \geqslant 0) \quad \rightsquigarrow \quad (s_p - x_p = 0 \;\; ; \;\; s_p \geqslant 0)$

$$\sum_{p \in \mathcal{S}} \ell_p (x_p - s_p) + \frac{1}{2}\,\rho \sum_{p \in \mathcal{S}} (x_p - s_p)^2$$

- Globalement (égalité et inégalité) avec $s_p \geqslant 0$ ou $s_p = 0$

$$\boldsymbol{\ell}^{\mathrm{t}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{s}) + \frac{1}{2}\,\rho\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{s})^{\mathrm{t}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{s})$$

Lagrangien augmenté

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{\ell}) = \left\| \boldsymbol{y} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{x} \right\|^2 + \mu \left\| \boldsymbol{D}\boldsymbol{x} \right\|^2 + \boldsymbol{\ell}^{\mathrm{t}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{s}) + \rho\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{s})^{\mathrm{t}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{s})$$

Algorithme itératif : ADMM

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{\ell}) = \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}\|^2 + \mu \|\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}\|^2 + \boldsymbol{\ell}^{\mathrm{t}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{s}) + \rho\, (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{s})^{\mathrm{t}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{s})$$

- Itérer trois étapes
  1. Unconstrained minimization of $\mathcal{L}$ w.r.t. $\boldsymbol{x}$

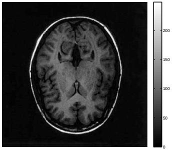
     $$\widetilde{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{H}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{H} + \mu \boldsymbol{D}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{D} + \rho \boldsymbol{I}_N)^{-1} \left(\boldsymbol{H}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{y} + [\rho \boldsymbol{s} - \boldsymbol{\ell}/2]\right) \qquad (\equiv FFT)$$

  2. Minimization of $\mathcal{L}$ w.r.t. $\boldsymbol{s}$, s.t. $s_p \geqslant 0$

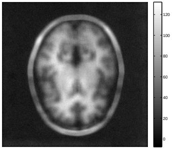
     $$\widetilde{s}_p = \begin{cases} \max\left(0, x_p + \ell_p/(2\rho)\right) & \text{for } p \in \mathcal{S} \\ 0 & \text{for } p \in \bar{\mathcal{S}} \end{cases}$$

  3. Update $\boldsymbol{\ell}$

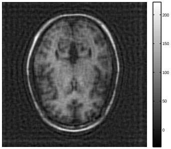
     $$\widetilde{\ell}_p = \ell_p + 2\rho(x_p - s_p)$$



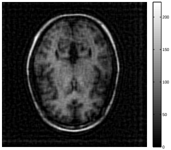
Entrée



Données



Pénalité quadratique



Solution contrainte

Synthèse et extensions

Synthèse

- Déconvolution d'image
  - Aussi : modèle direct linéaire mais non-invariant
  - Et aussi : cas des signaux
- Pénalisation quadratique et régularité des solutions
  - Optimisation : gradients à pas optimal
- Pénalisation non-quadratique et préservation des discontinuités
  - Optimisation : algorithmes semi-quadratiques
- Prise en compte de contraintes
  - Positivité
  - Optimisation : lagrangien augmentés et ADMM

Extensions

- Estimation d'hyperparamètres
- Estimation de paramètres instruments
- Variables cachées : détection (contours, points,...), segmentation,...
- Sélection de modèles

Remerciements, nombreux

- Nombreux doctorants et collègues
  - François Orieux, Cornelia Vacar, Aurélien Hazart, Gilles Rochefort, Redha Boubertakh, Vincent Samson, Philippe Ciuciu
  - Guy Demoment, Jérôme Idier
  - Frédéric Champagnat, Guy Le Besnerais, Alain Herment, Thomas Rodet, Charles Soussen
  - Éric Thibaut et Laurent Mugnier
- Collaborations plus applicatives
  - EdF, ONERA
  - INSERM, IDCV, LIF, IMQ
  - IAS, IAP, RHN
  - CEA-LETI, CEA-LIST, CEA-CESTA
- Nombreux étudiants de Master

Bibliographie

P. Charbonnier, L. Blanc-Féraud, G. Aubert et M. Barlaud,
■Deterministic edge-preserving regularization in computed imaging■,
IEEE Trans. Image Processing, vol. 6, nř2, pp. 298–311, Feb. 1997.

J. Idier, Ed.,
Approche bayésienne pour les problèmes inverses,
Traité IC2, Série traitement du signal et de l'image, Hermès, Paris, 2001.

H. W. Sorenson,
Parameter estimation, vol. 9 de *Control and system theory*,
Marcel Dekker, New York Basel, 1980.

B. R. Hunt,
■A matrix theory proof of the discrete convolution theorem■,
IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-19, pp. 285–288, 1971.

B. R. Hunt,
■Deconvolution of linear systems by constrained regression and its relationship to the Wiener theory■,
IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-17, pp. 703–705, 1972.

G. Demoment,
■Image reconstruction and restoration : Overview of common estimation structures and problems■,
IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing, vol. assp-37, nř12, pp. 2024–2036, Dec. 1989.