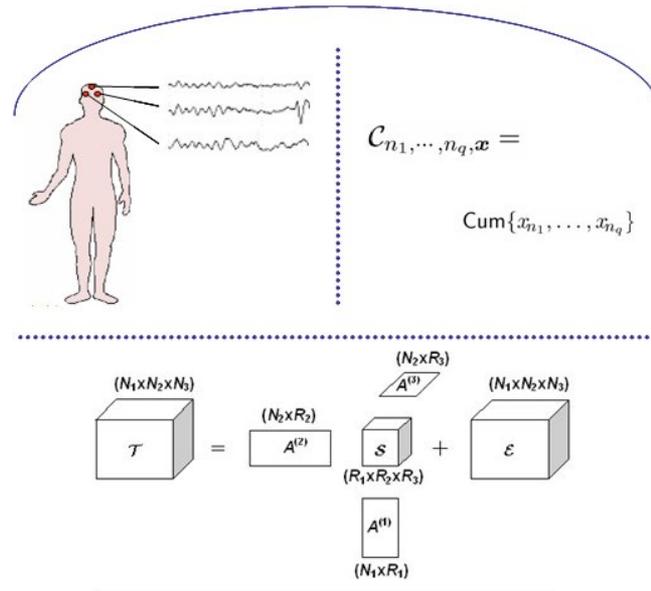


Séparation de sources en ingénierie biomédicale

Laurent Albera



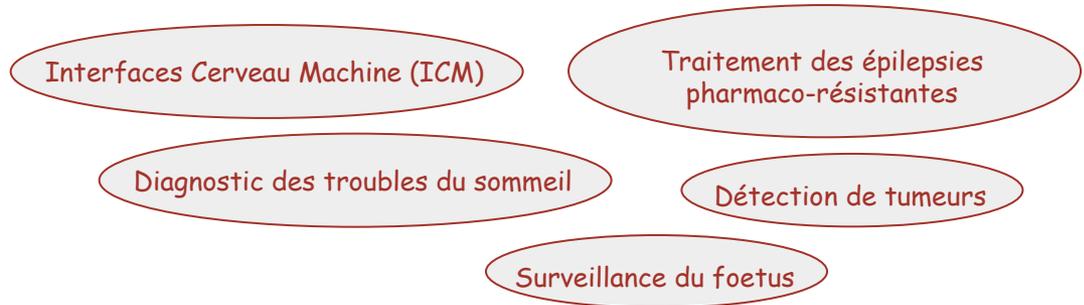
- I. Applications, signaux et méthodes
 - 1. Modalités d'acquisitions
 - 2. Problèmes applicatifs
 - 3. Méthodes de séparation de sources
- II. Interfaces cerveau-machine
 - 1. Problématique
 - 2. Données exploitées
 - 3. Etude proposée
- III. Epilepsies pharmacorésistantes
 - 1. Quelques outils
 - 2. Localisation de réseaux épileptogènes
 - 3. Débruitage d'activités épileptiques

Applications, signaux et méthodes

- I. Applications, signaux et méthodes
 - 1. Modalités d'acquisitions
 - 2. Problèmes applicatifs
 - 3. Méthodes de séparation de sources
- II. Interfaces cerveau-machine
 - 1. Problématique
 - 2. Données exploitées
 - 3. Etude proposée
- III. Epilepsies pharmacorésistantes
 - 1. Quelques outils
 - 2. Localisation de réseaux épileptogènes
 - 3. Débruitage d'activités épileptiques

Applications, signaux et méthodes

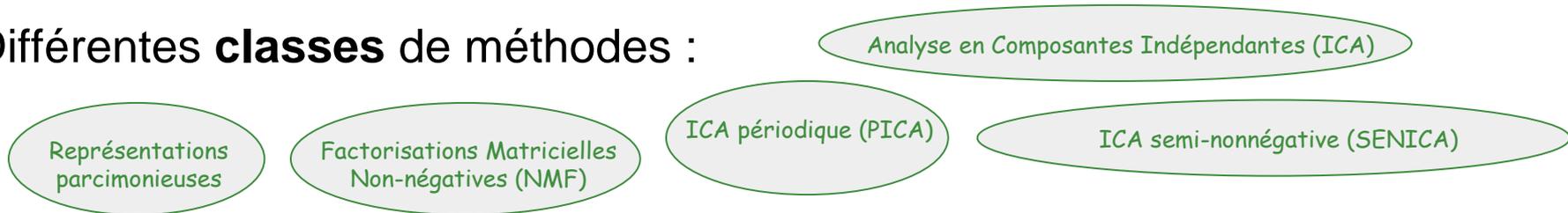
- Différentes **applications** :



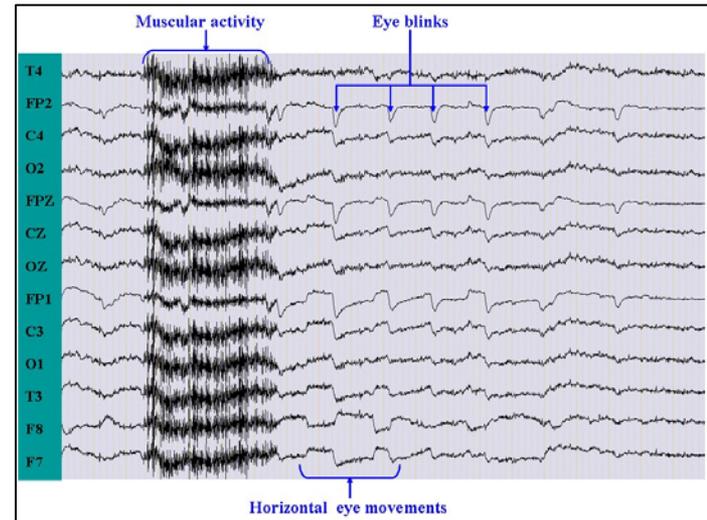
- Différentes **modalités** d'acquisition :



- Différentes **classes** de méthodes :



Applications, signaux et méthodes

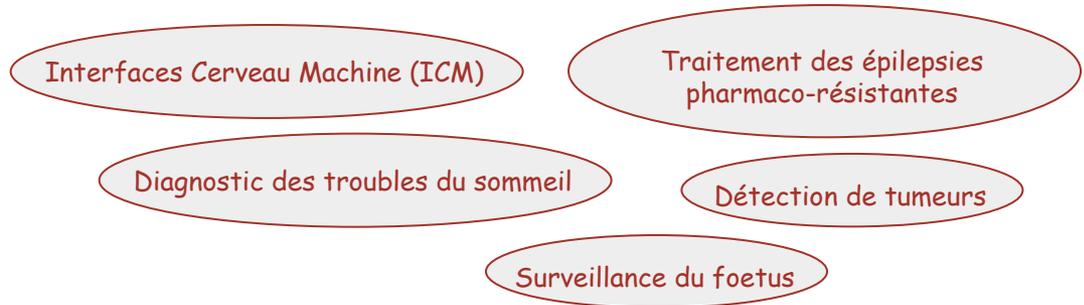


ElectroEncephaloGraphy (EEG)

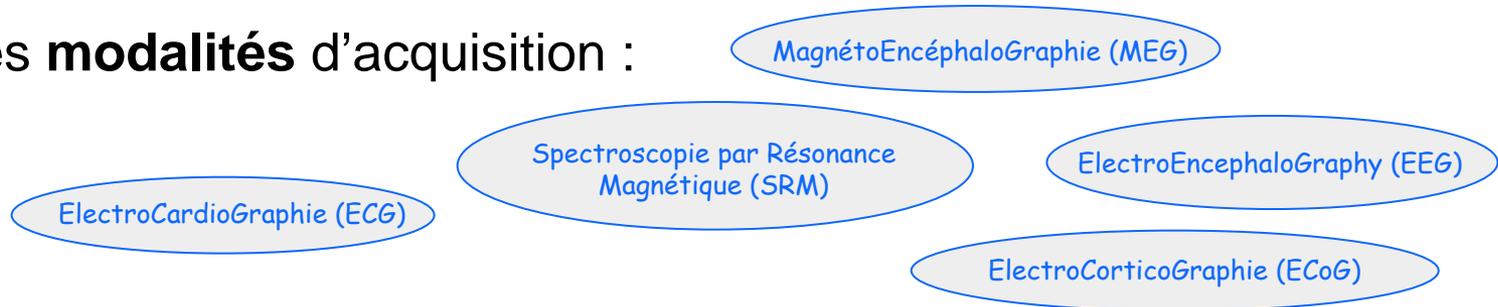
- Différences de **potentiel électrique** de l'ordre de la dizaine de microvolts ;
- Modalité la plus **rudimentaire** et la plus **ancienne** avec aujourd'hui au plus 256 électrodes ;
- **Premières expériences** menées sur des lapins et singes à même le cortex fin du XIX^{ème};
- Première **étude sur l'homme** en 1920 par Hans Berger (phys. allemand).

Applications, signaux et méthodes

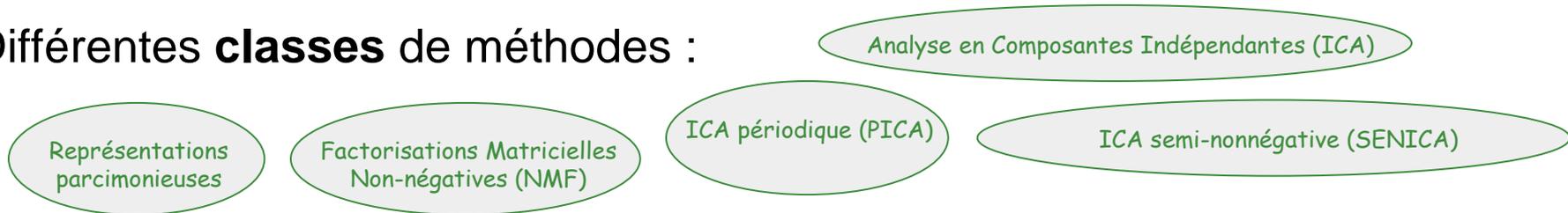
- Différentes **applications** :



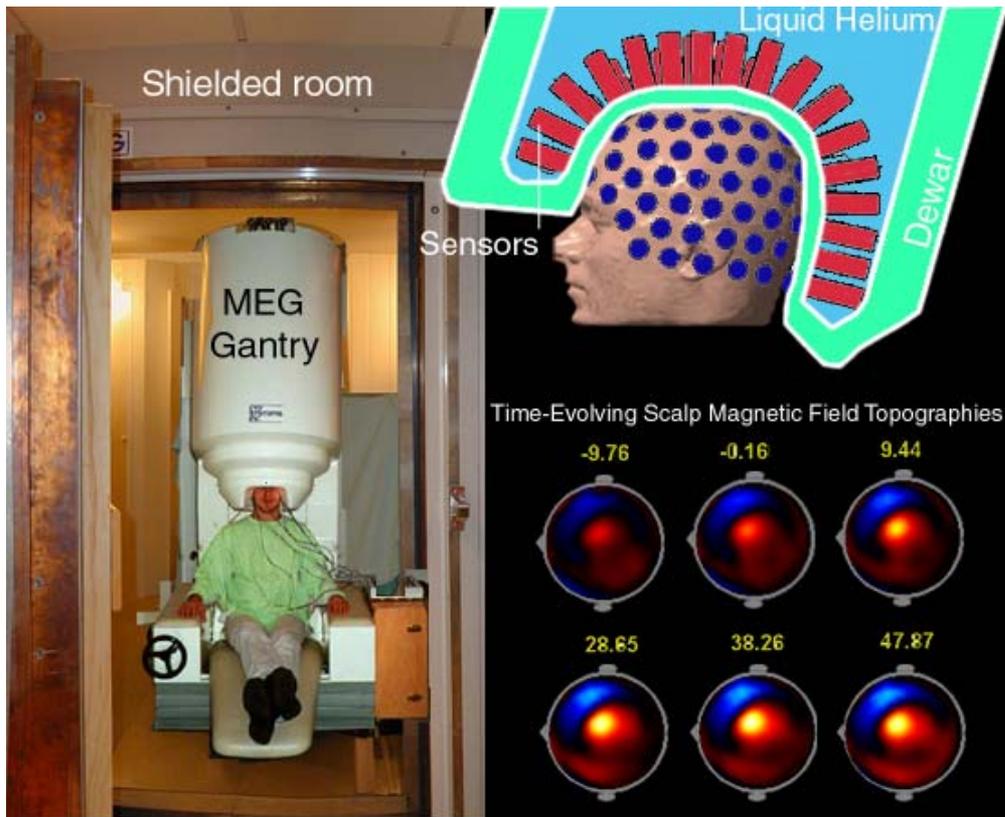
- Différentes **modalités** d'acquisition :



- Différentes **classes** de méthodes :



Applications, signaux et méthodes



S. Baillet, J. C. Moshier, and R.M. Leahy. Electromagnetic brain mapping. IEEE Signal Processing Magazine, 18(6):14–30, Nov. 2001. Avec permission.

- Champs magnétique issu de l'activité cérébrale enregistré en 1968 par David Cohen (physicien du MIT, spécialisé dans les blindages magnétiques) ;

MagnétoEncéphaloGraphie (MEG)

- De l'ordre de 100 femtoteslas à la surface de la tête, soit 10 milliards de fois plus faible que le champs magnétique terrestre ;

- Capteurs SQUID (Superconducting QUantum Interference Device, inventé par Jim Zimmerman en 1965) plongés dans un cryostat rempli d'hélium liquide à -269° C ;

Applications, signaux et méthodes

- Différentes **applications** :

Interfaces Cerveau Machine (ICM)

Traitement des épilepsies
pharmaco-résistantes

Diagnostic des troubles du sommeil

Détection de tumeurs

Surveillance du fœtus

- Différentes **modalités** d'acquisition :

MagnétoEncéphaloGraphie (MEG)

Spectroscopie par Résonance
Magnétique (SRM)

ElectroEncephaloGraphy (EEG)

ElectroCardioGraphie (ECG)

ElectroCorticoGraphie (ECoG)

- Différentes **classes** de méthodes :

Représentations
parcimonieuses

Factorisations Matricielles
Non-négatives (NMF)

ICA périodique (PICA)

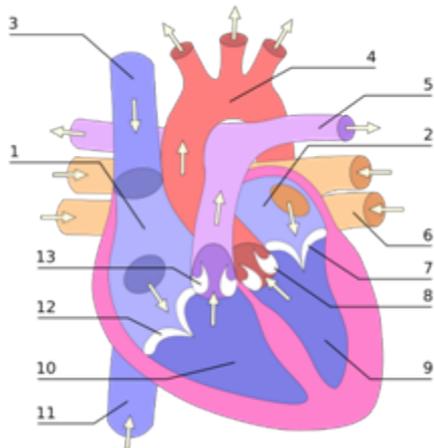
Analyse en Composantes Indépendantes (ICA)

ICA semi-nonnégative (SENICA)

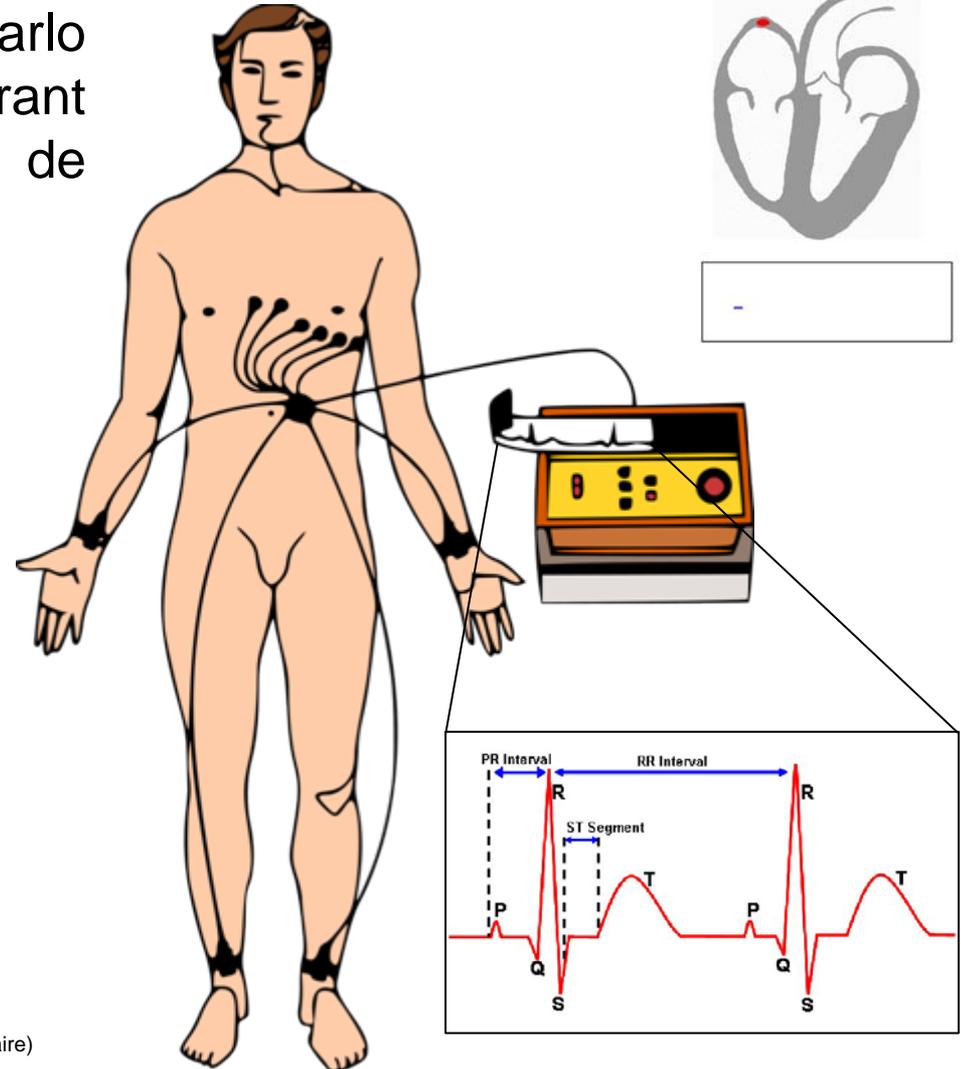
Applications, signaux et méthodes

- Découverte en 1842 par l'italien Carlo Matteucci de l'apparition d'un courant électrique à chaque mouvement de cœur d'une grenouille ;
- Prix Nobel de Willem Einthoven en 1924 pour l'invention de l'électrocardiographe ;

ElectroCardioGraphie (ECG)

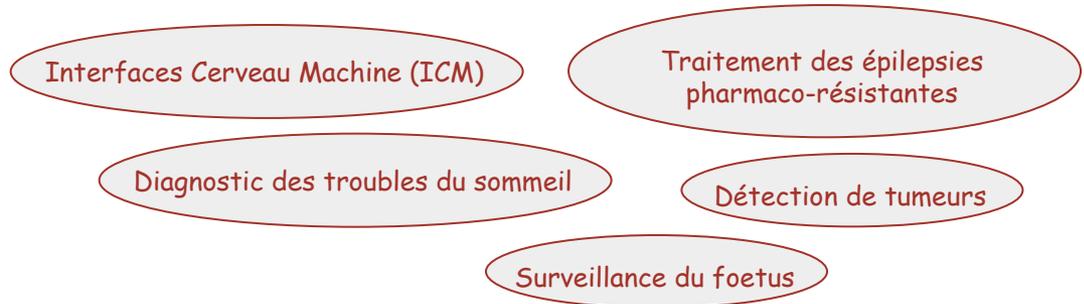


1. Atrium droit
2. Atrium gauche
3. Veine cave supérieure
4. Aorte
5. Artère pulmonaire
6. Veine pulmonaire
7. Valve mitrale (atrio-ventriculaire)
8. Valve aortique
9. Ventricule gauche
10. Ventricule droit
11. Veine cave inférieure
12. Valve tricuspide (atrio-ventriculaire)
13. Valve sigmoïde (pulmonaire)



Applications, signaux et méthodes

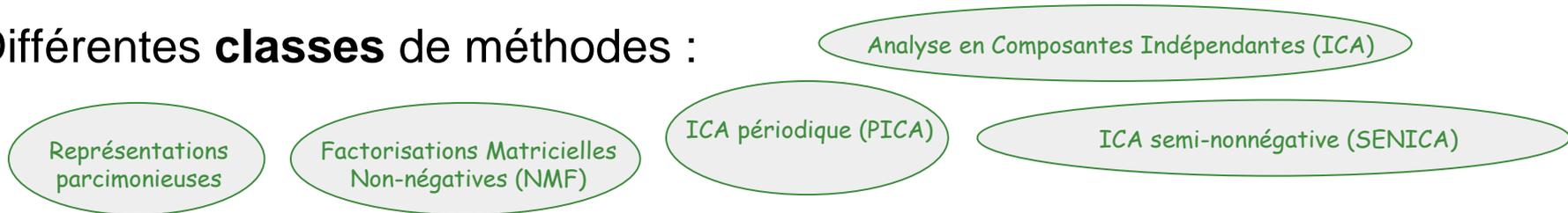
- Différentes **applications** :



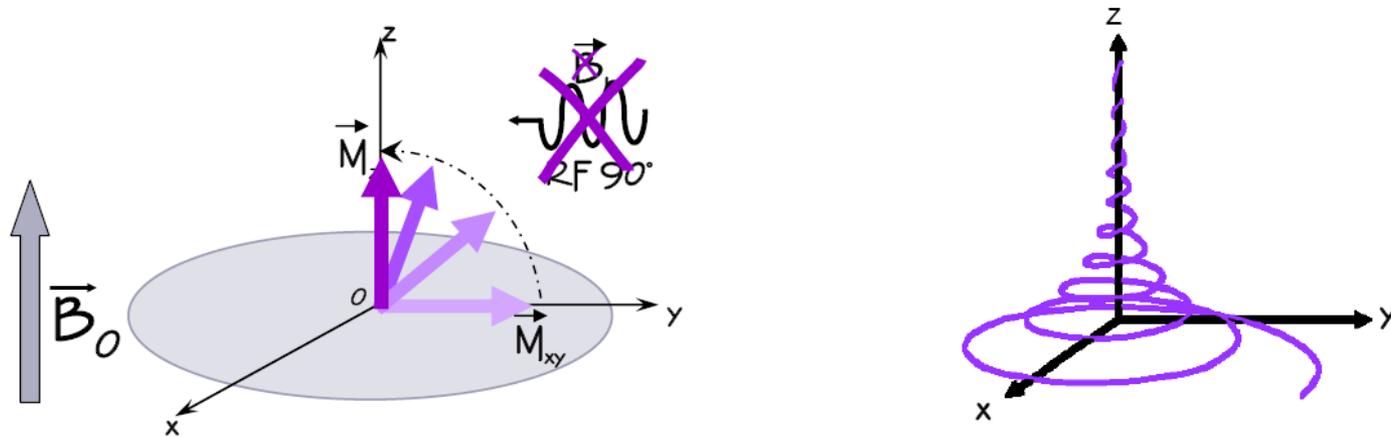
- Différentes **modalités** d'acquisition :



- Différentes **classes** de méthodes :



Principe de la spectroscopie par RMN

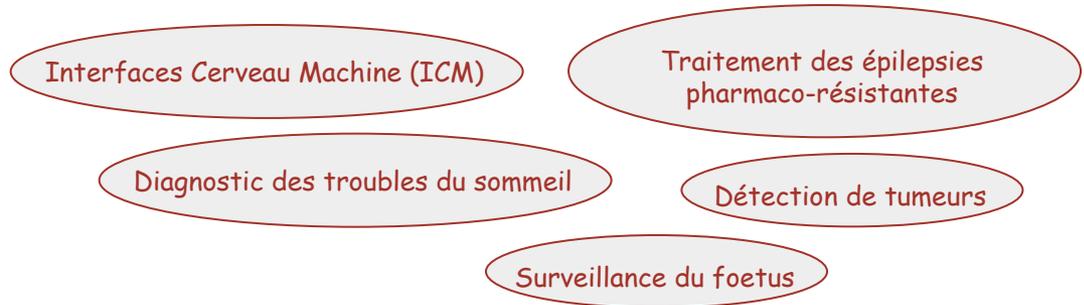


Spectroscopie par Résonance
Magnétique (SRM)

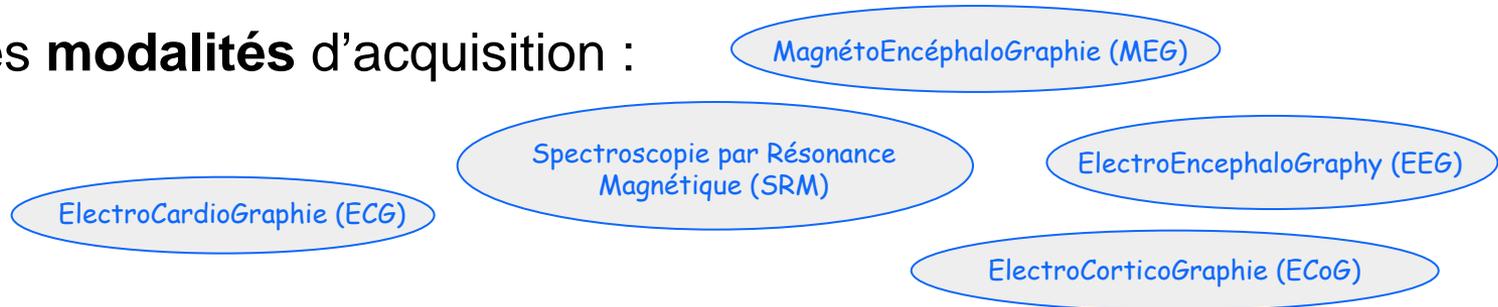
- **Polarisation** à l'aide d'un aimant de noyaux (par ex. ^1H);
- **Excitation** grâce à l'émission d'une onde RadioFréquence (RF) ;
- **Relaxation** par arrêt de l'émission de l'onde RF : retour à l'état d'équilibre ;
- **Acquisition** du signal temporel dans le plan xOy : FID.

Applications, signaux et méthodes

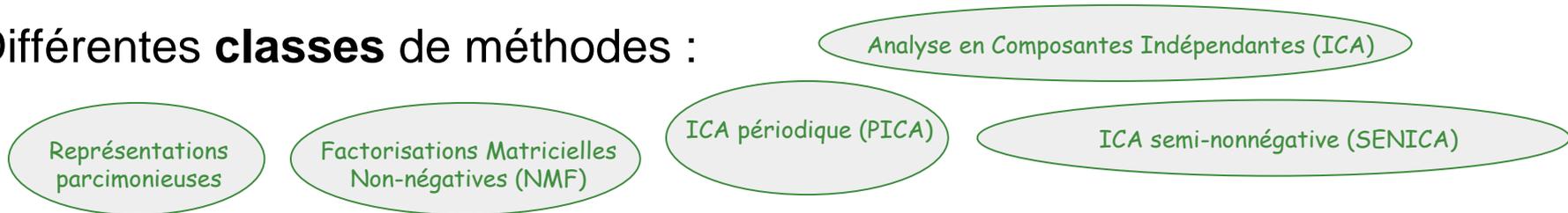
- Différentes **applications** :



- Différentes **modalités** d'acquisition :



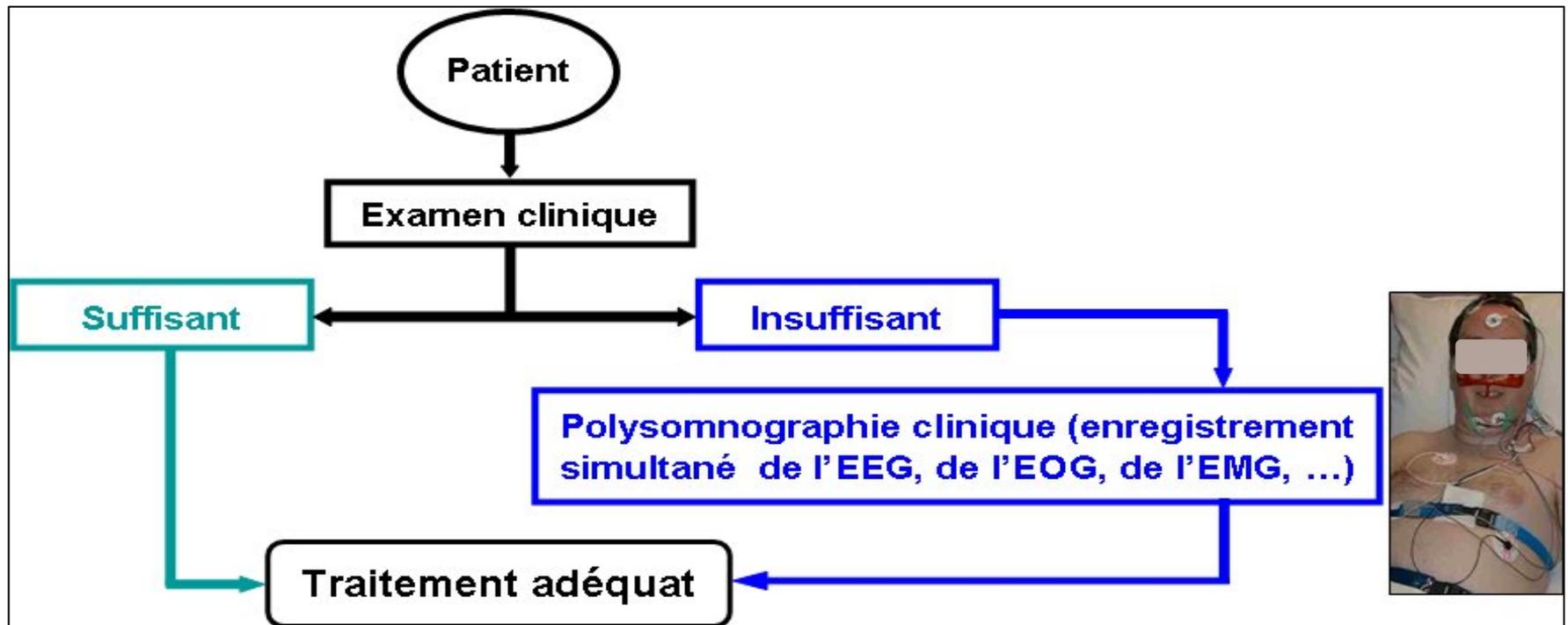
- Différentes **classes** de méthodes :



Applications, signaux et méthodes

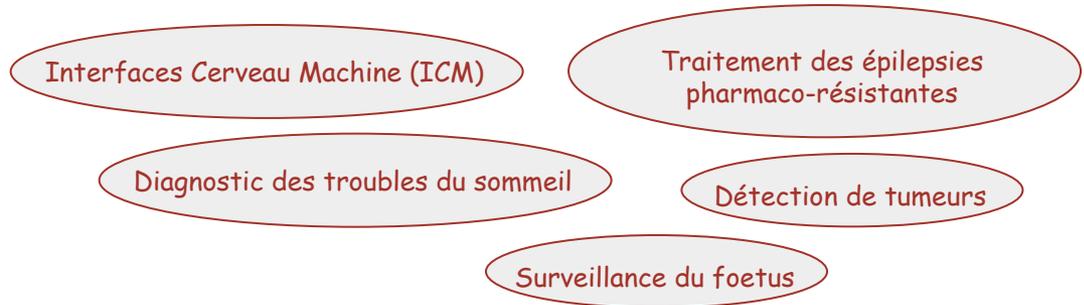
- **Objectif** : extraire les signaux d'intérêt pour le diagnostic des différents troubles du sommeil ;
- **Contrainte** : réduction du nombre d'électrodes d'EEG pour une acquisition à domicile.

Diagnostic des troubles du sommeil

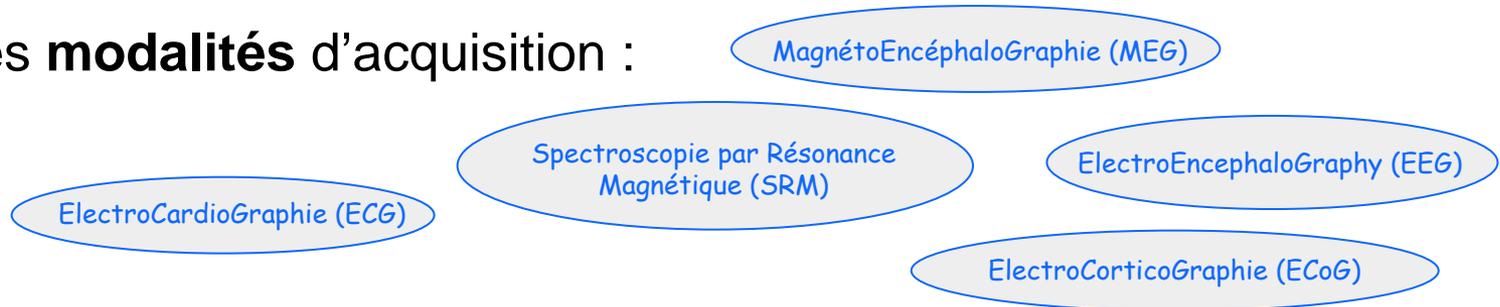


Applications, signaux et méthodes

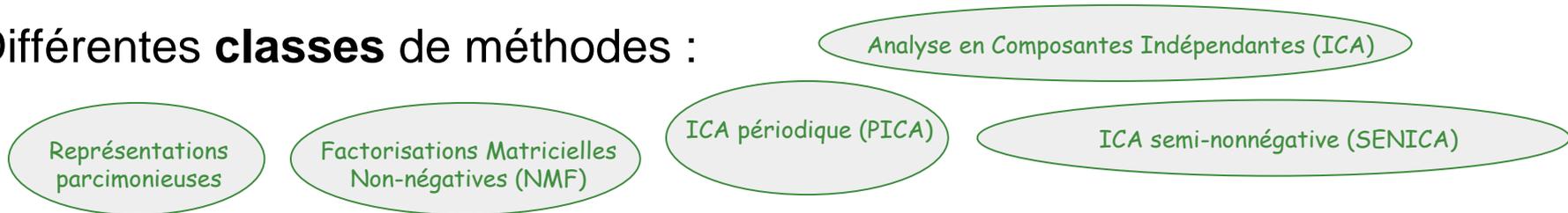
- Différentes **applications** :



- Différentes **modalités** d'acquisition :



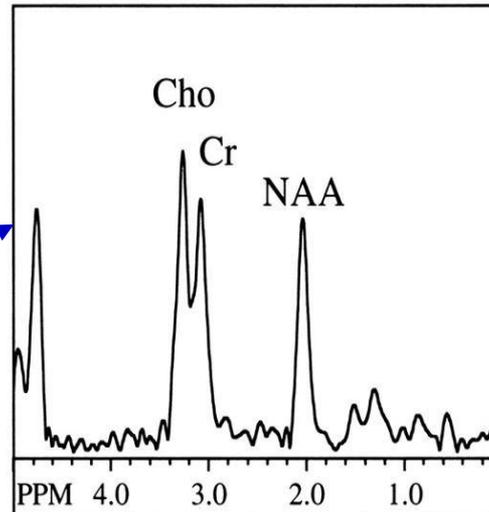
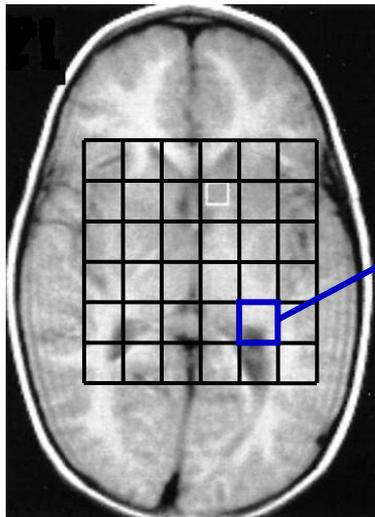
- Différentes **classes** de méthodes :



Applications, signaux et méthodes

- **Objectif** : quantifier les spectres de résonance des métabolites constituant le mélange et ce à partir d'un ensemble de signaux de SRM ;

Détection de tumeurs

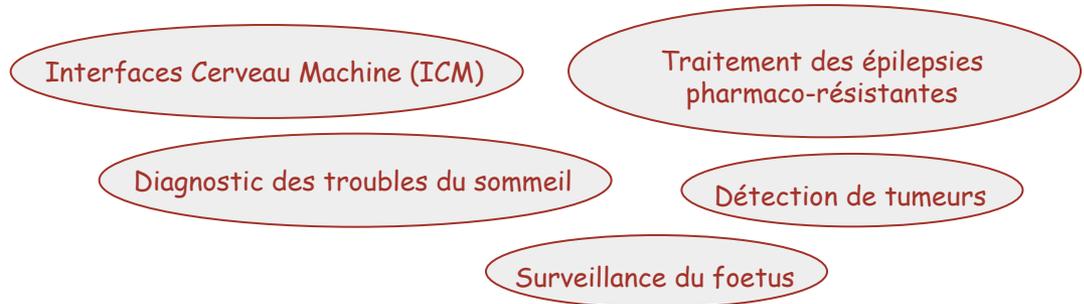


metabolites	Resonance frequency (ppm)
Choline (Cho)	3.22
Creatine (Cr)	3.02
N-Acetyl-Aspartate (NAA)	2.02

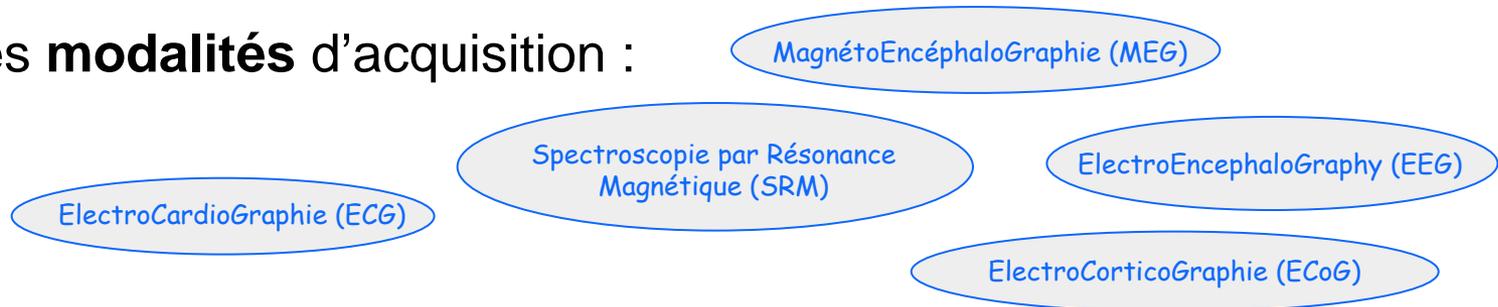
- **Difficultés** : chevauchement de spectres de résonance, faible SNR, désynchronisation des différentes observations spatiales, etc.

Applications, signaux et méthodes

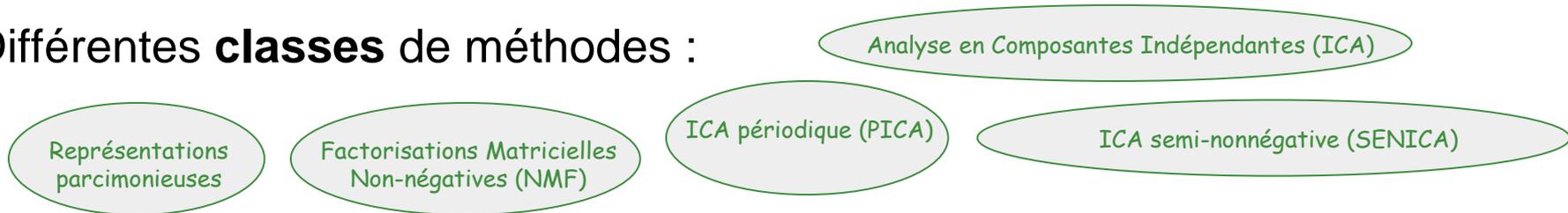
- Différentes **applications** :



- Différentes **modalités** d'acquisition :



- Différentes **classes** de méthodes :

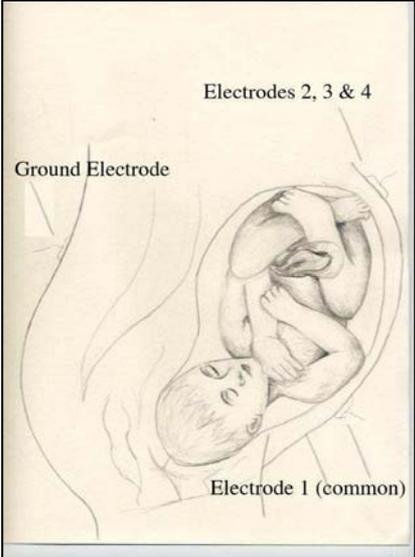


Applications, signaux et méthodes

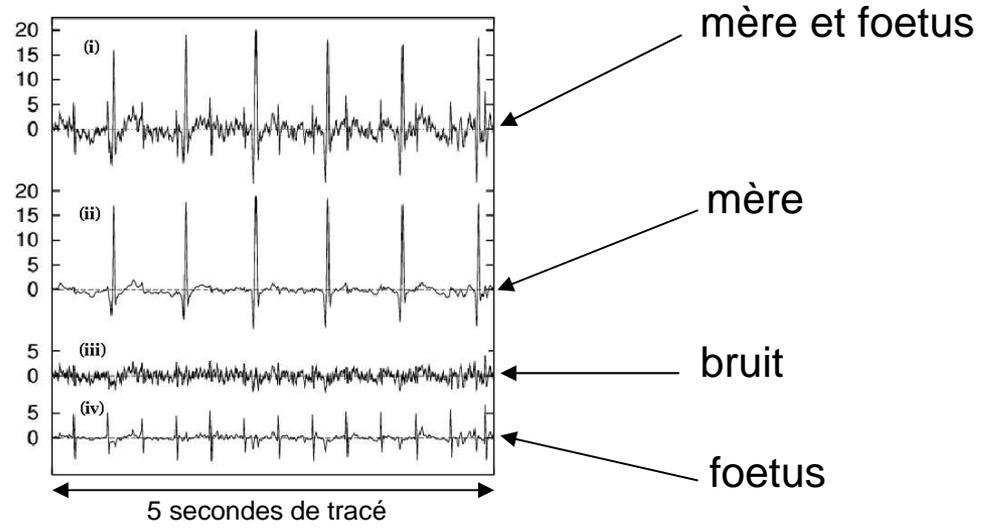
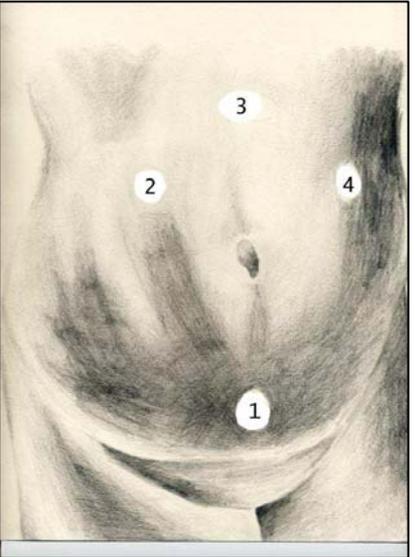
- **Objectif** : diagnostiquer au plus vite de futurs problèmes de santé ;
- **Outil** : l'ECG, un très bon indicateur de l'état de santé ;

Surveillance du fœtus

- **Difficulté** : nécessité d'attendre le début du travail de la mère pour pouvoir, de manière invasive, poser un capteur d'ECG sur la tête de l'enfant à naître ;

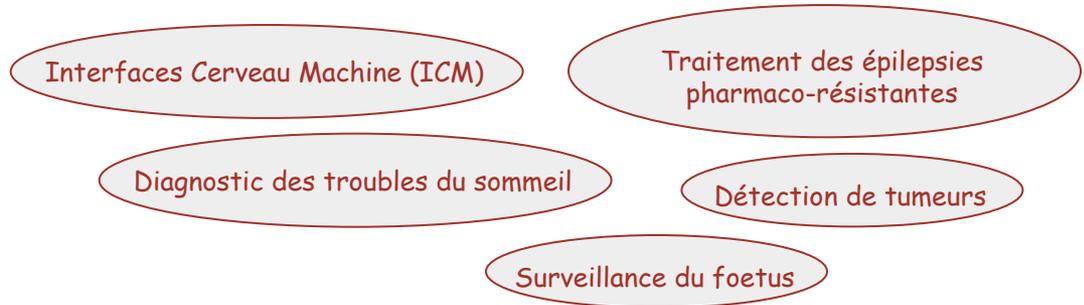


Dessiné par by B. Campbell

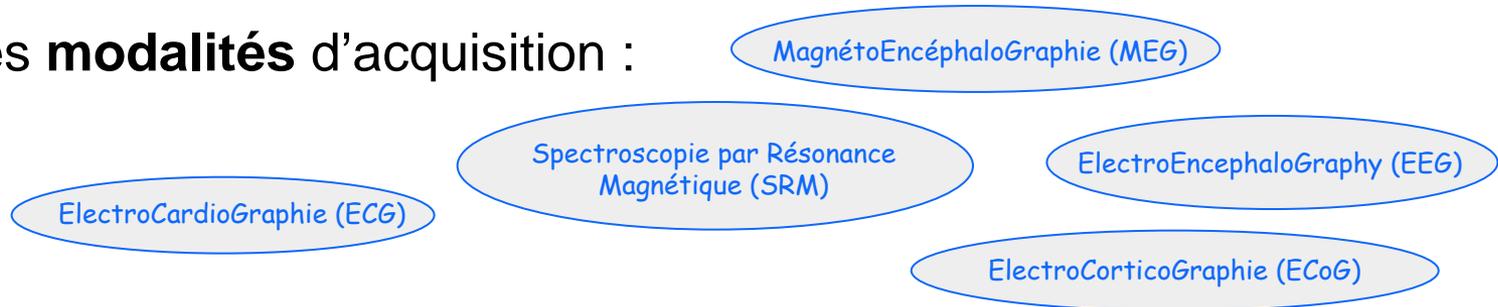


Applications, signaux et méthodes

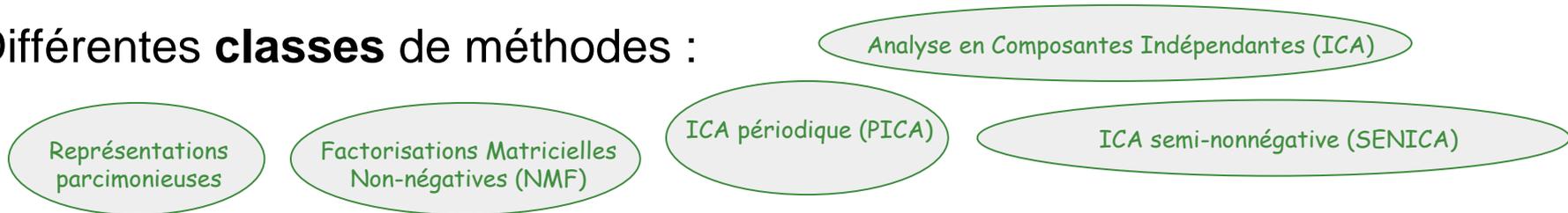
- Différentes **applications** :



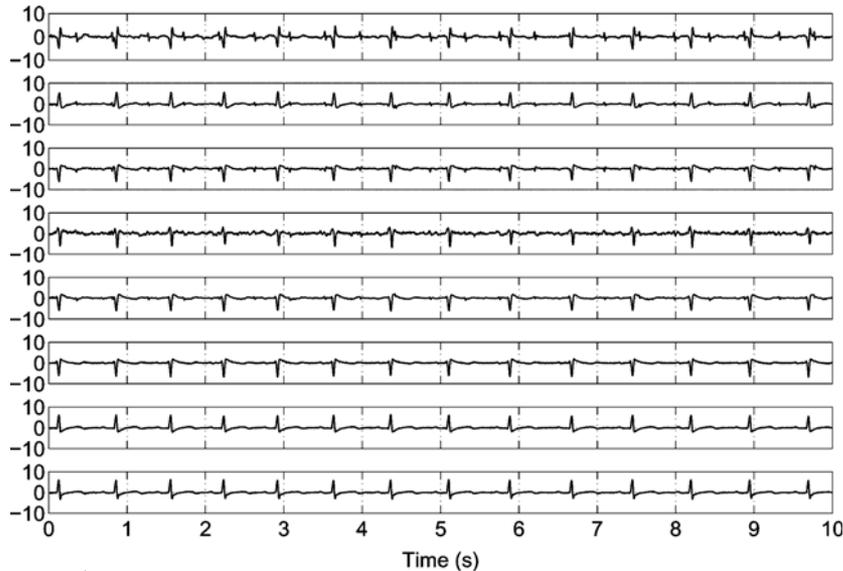
- Différentes **modalités** d'acquisition :



- Différentes **classes** de méthodes :



Applications, signaux et méthodes



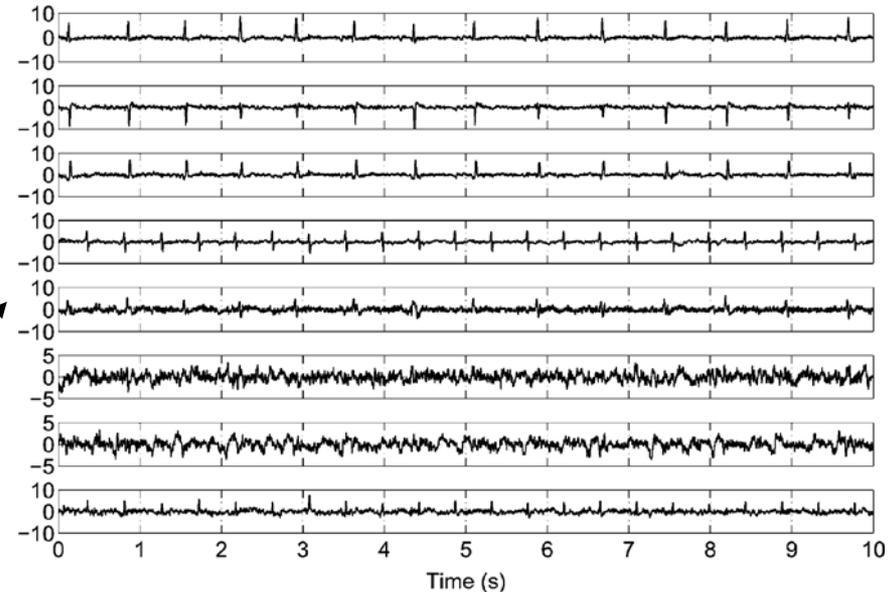
ElectroCardioGraphie (ECG)

ECG issu de 8 capteurs situés respectivement sur le ventre (5) et le thorax (3) de la mère

8 sources extraites par JADE

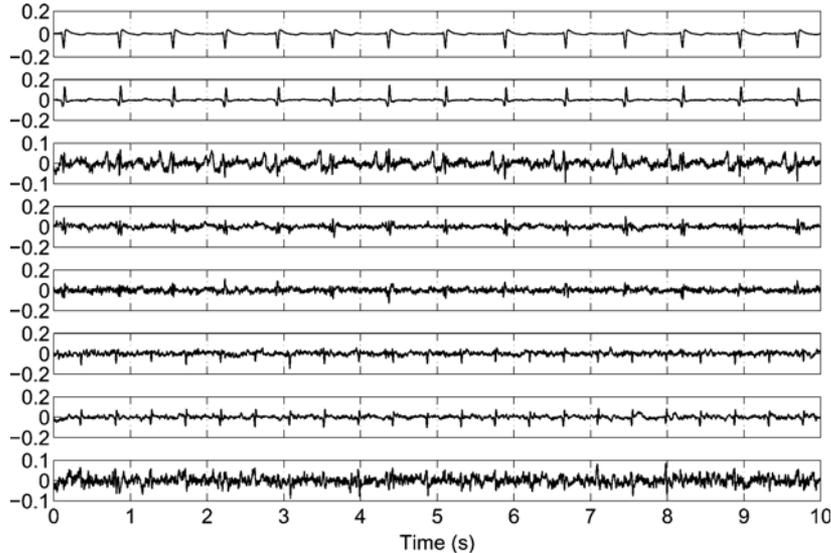
Séparation aveugle des rythmes ECG du fœtus et de la mère

Surveillance du fœtus



ICA périodique (PICA)

Applications, signaux et méthodes



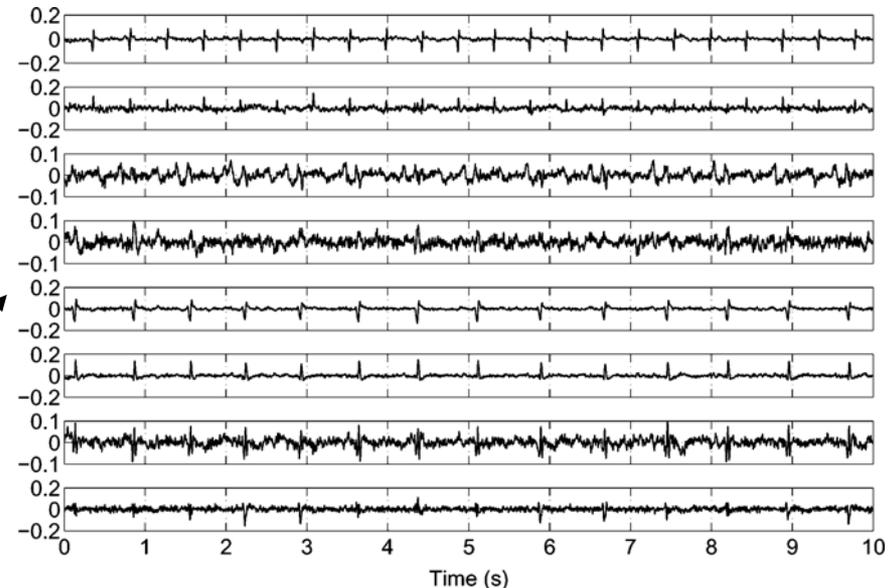
ElectroCardioGraphie (ECG)

8 sources extraites par PICA
basée sur une synchronisation
avec le rythme de la mère

8 sources extraites par PICA
basée sur une synchronisation
avec le rythme du fœtus

Séparation aveugle des rythmes ECG du fœtus et de la mère

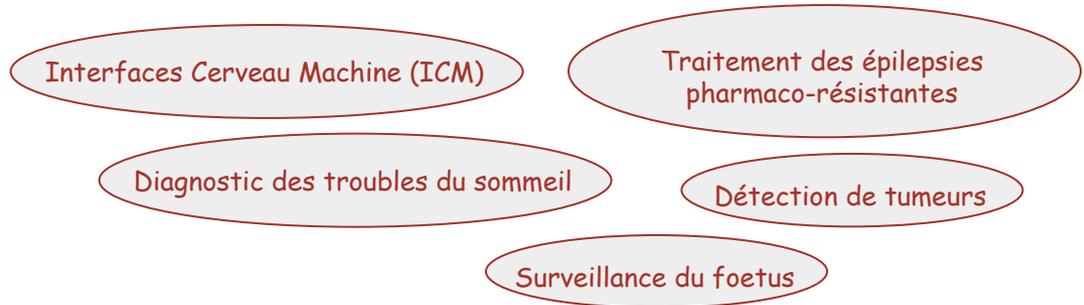
Surveillance du fœtus



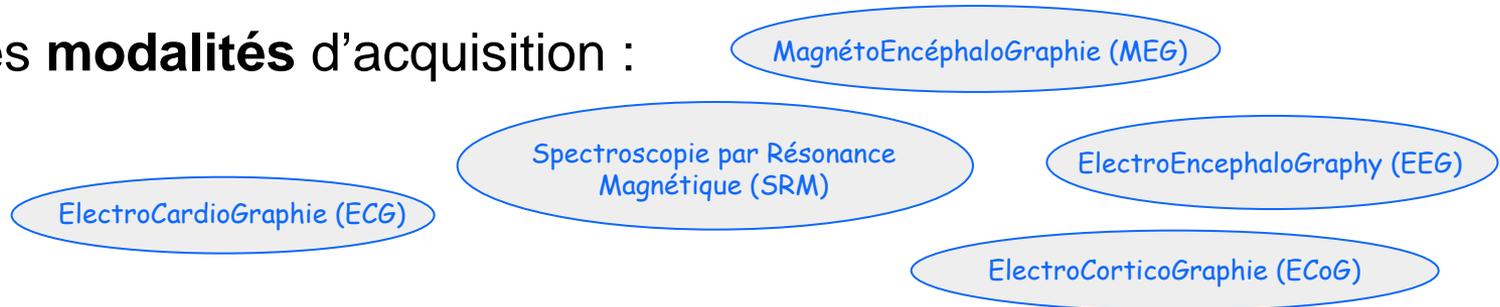
ICA périodique (PICA)

Applications, signaux et méthodes

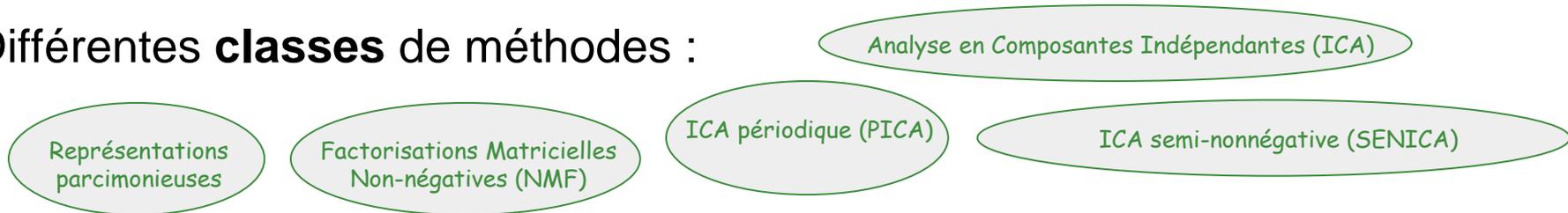
- Différentes **applications** :



- Différentes **modalités** d'acquisition :



- Différentes **classes** de méthodes :



Applications, signaux et méthodes

$$\mathbf{x}[m] = [x_1[m], \dots, x_N[m]]^T = \mathbf{A}\mathbf{s}[m] + \boldsymbol{\nu}[m]$$

- **Quasi-indépendance** au sens large à l'ordre q ($q \geq 3$) des sources ;

$$\mathbf{C}_{q,\mathbf{x}} \approx (\mathbf{A}, \dots, \mathbf{A}) \cdot \mathbf{C}_{q,\mathbf{s}} + \cancel{\mathbf{C}_{q,\boldsymbol{\nu}}}$$

- **Positivité** des composantes de la matrice de mélange

➡ **Identification du mélange par** décomposition canonique sous contrainte de non négativité de la matrice de mélange ;

➡ Une solution : faire un **changement de variables approprié** (par exemple exponentiel ou carré) afin de se ramener à un problème de minimisation sans contrainte :

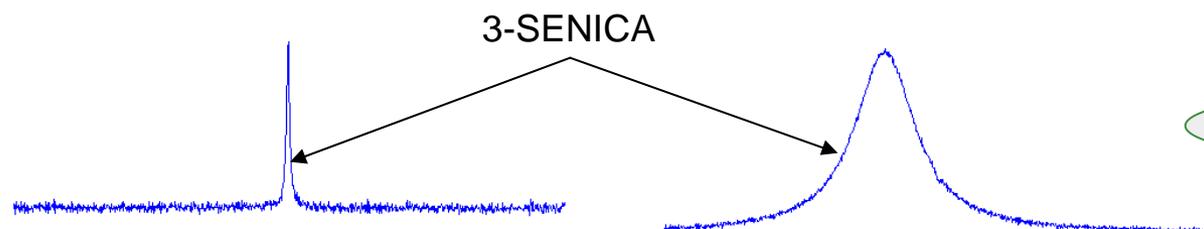
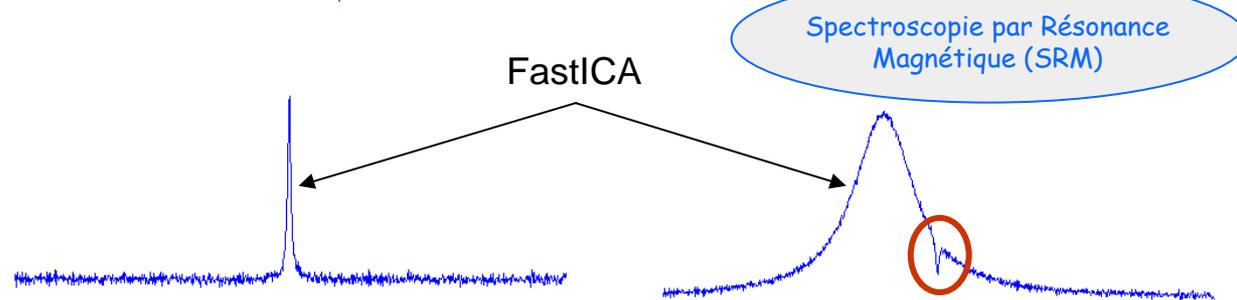
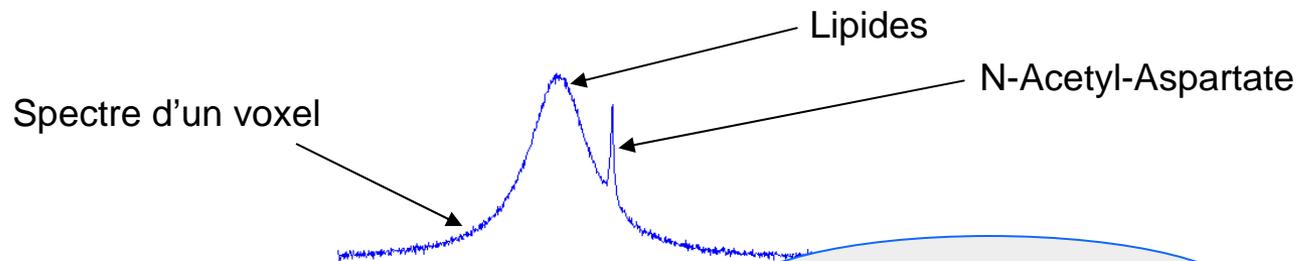
$$\min_B \left\| \mathbf{C}_{q,\mathbf{x}} - ((e^{B_{n,p}}), \dots, (e^{B_{n,p}})) \cdot \mathbf{C}_{q,\mathbf{s}} \right\|$$

ICA semi-nonnégative (SENICA)

Applications, signaux et méthodes

Séparation aveugle de métabolites

Détection de tumeurs

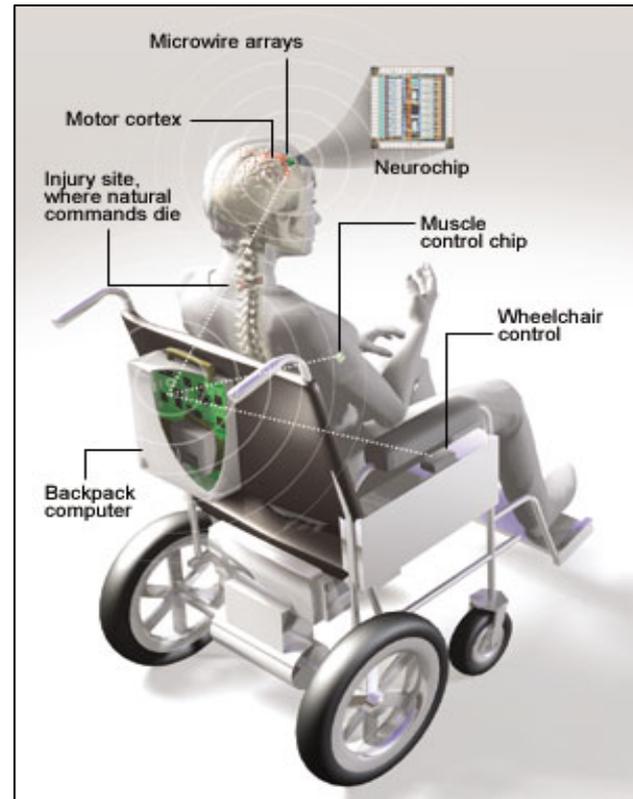


ICA semi-nonnégative (SENICA)

- I. Applications, signaux et méthodes
 1. Modalités d'acquisitions
 2. Problèmes applicatifs
 3. Méthodes de séparation de sources
- II. Interfaces cerveau-machine
 1. Problématique
 2. Données exploitées
 3. Etude proposée
- III. Epilepsies pharmacorésistantes
 1. Quelques outils
 2. Localisation de réseaux épileptogènes
 3. Débruitage d'activités épileptiques

Interfaces cerveau-machine

- **Objectif** : permettre la communication entre le cerveau et une machine ;
- **Contrainte** : exploiter l'activité cérébrale.



Interfaces cerveau-machine

Système Interface Cerveau-Machine (BCI)

Traitement du Signal

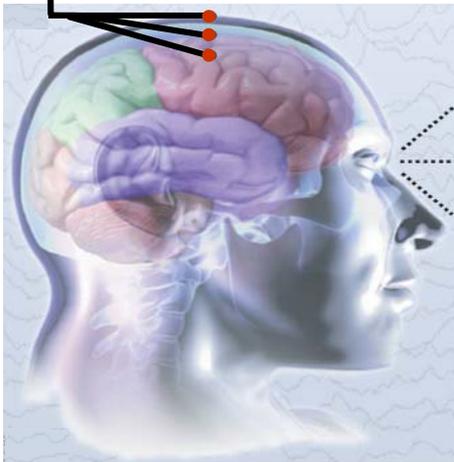
Acquisition
du signal

Prétraitement

Extraction des
caractéristiques

Classification

Traduction en
une commande



Feedback



Interfaces cerveau-machine

Système Interface Cerveau-Machine (BCI)

```
graph TD; A[Système Interface Cerveau-Machine (BCI)] --> B[Procédures invasives]; A --> C[Procédures non-invasives]; B --> B1["- L'ElectroCorticoGraphie (ECoG)"]; B --> B2["- Implantation d'électrodes intracorticales"]; C --> C1["- La MagnétoEncéphaloGraphie (MEG)"]; C --> C2["- L'ElectroEncéphaloGraphie (EEG)"];
```

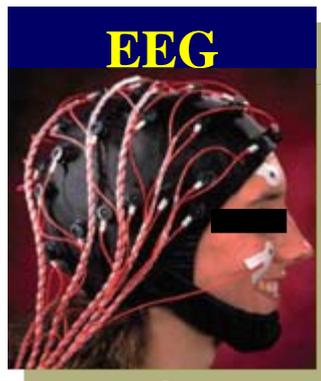
Procédures invasives

- L'ElectroCorticoGraphie (ECoG)
- Implantation d'électrodes intracorticales

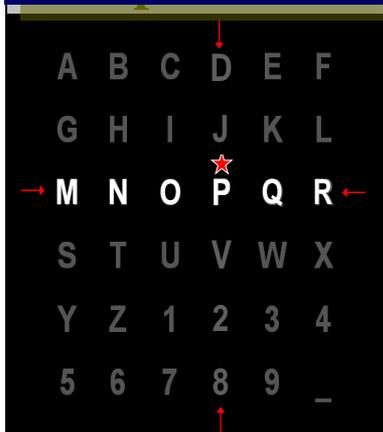
Procédures non-invasives

- La MagnétoEncéphaloGraphie (MEG)
- L'ElectroEncéphaloGraphie (EEG)

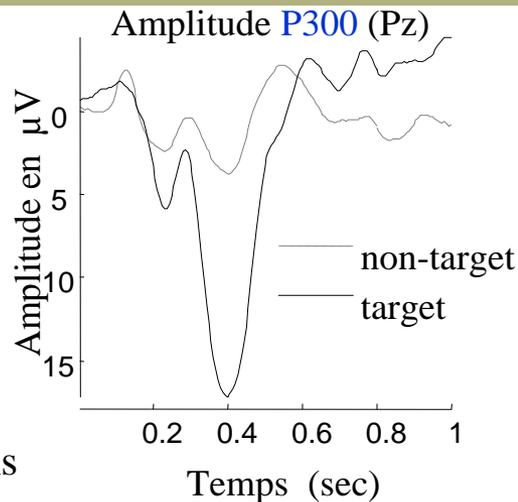
Interfaces cerveau-machine



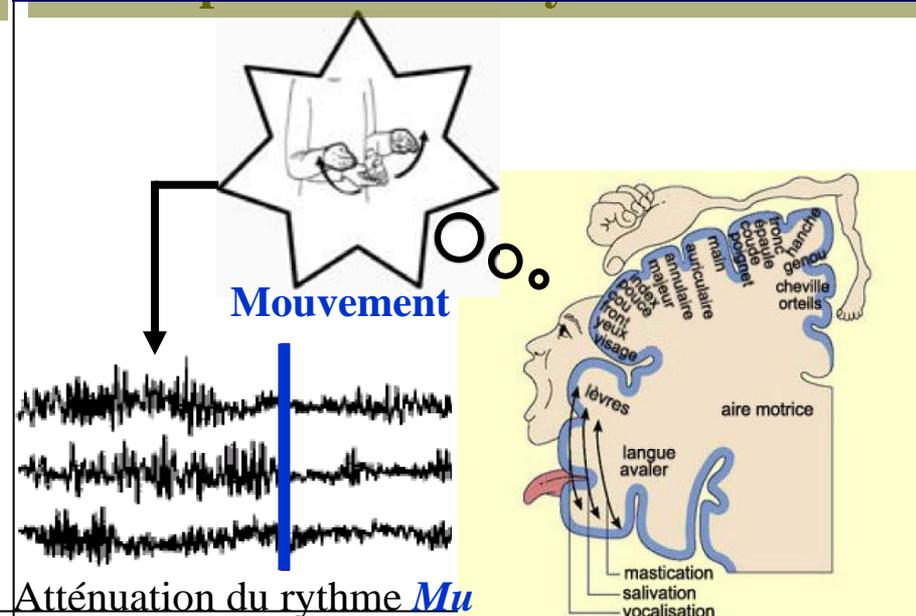
Exploitation des Potentiels Evoqués



Onde positive à 300 ms
après présentation
du stimulus



Exploitation des rythmes EEG



Interfaces cerveau-machine

Avantages

- Non-invasif
- Facile à installer
- Peu couteux

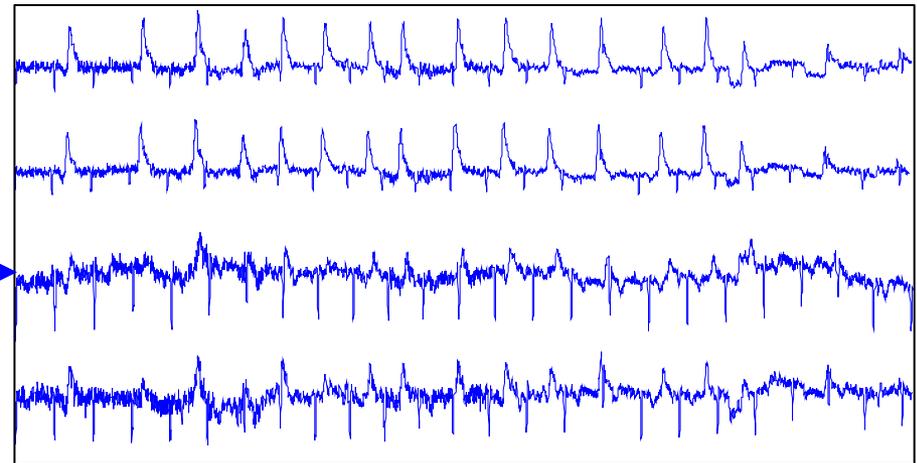
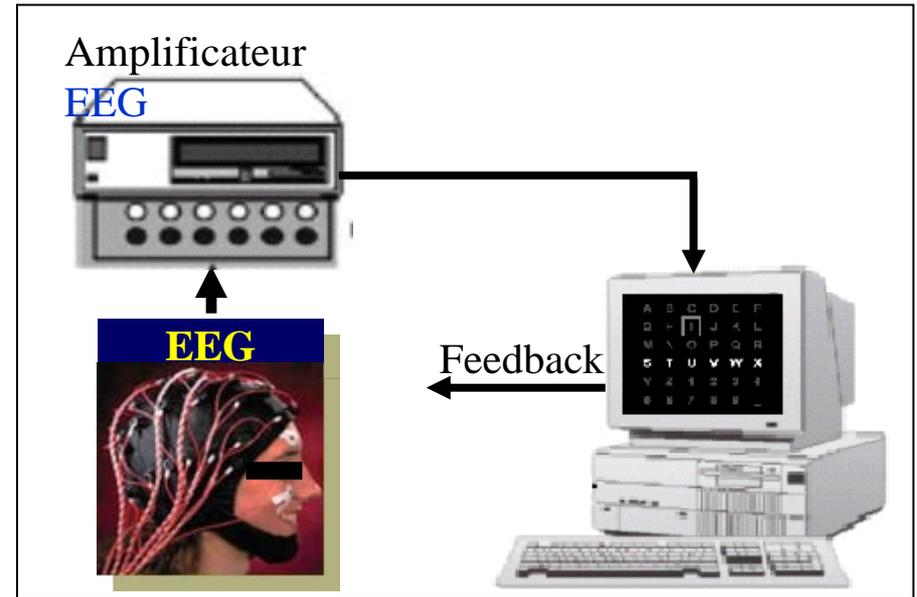
Limitations

- Période d'apprentissage plus longue
- Non-stationnarité des signaux EEG
- Conditions mentales de l'utilisateur : stress, concentration, etc.)
- Données extrêmement bruitées (mouvements oculaire, tons musculaire, ...)

Exemple

Etape supplémentaire

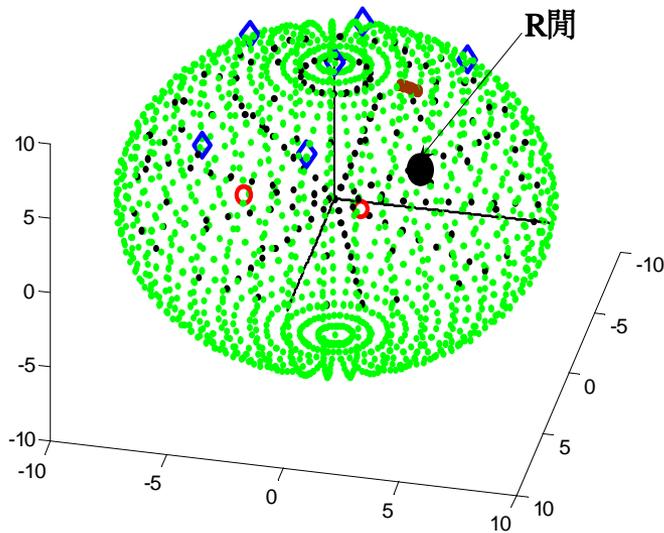
- Extraction des signaux d'intérêts



Description du scénario étudié

Tête modélisée par un ensemble de 3 sphères concentrique

Localisation des sources et des capteurs



Deux dipôles placés au niveau de l'œil gauche et droit caractérisent l'EOG

Un patch de dipôles localisé dans le côté gauche du cortex moteur caractérise le rythme *Mu*

Transfert

[Z. Zhang 1995]

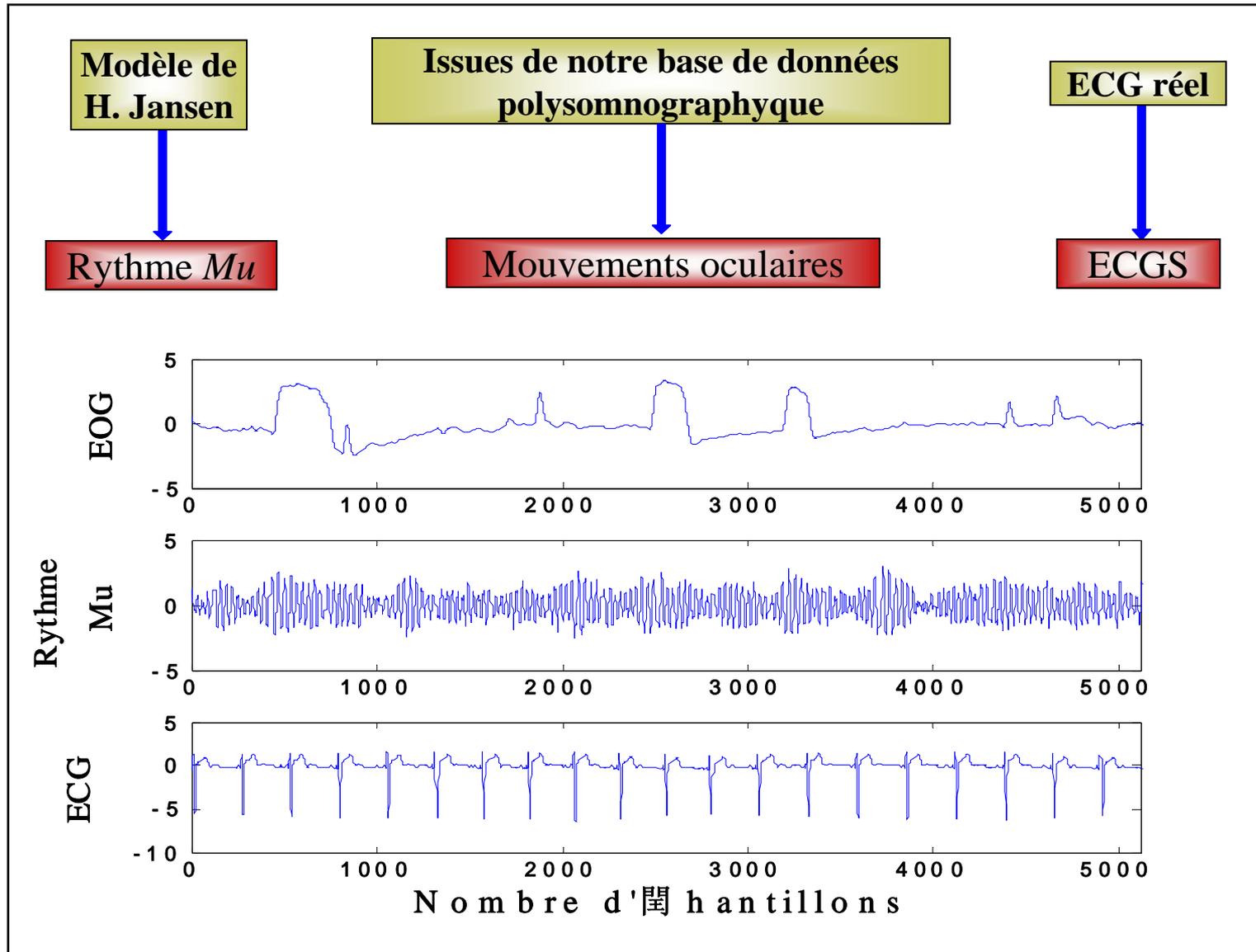
$$A_I(\alpha) = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$$A = [A_I(\alpha) \quad a_3]$$

Six électrodes (Fz, F4, Cz, P7, Pz, P8) plus une référence (F3) placées sur le scalp



Génération des sources



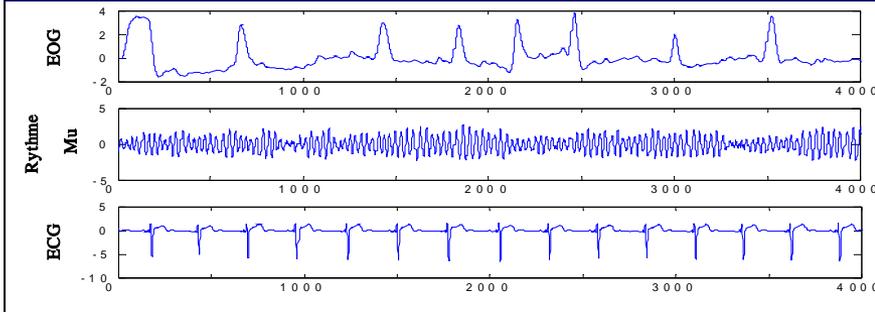
Interfaces cerveau-machine

Description des 8 méthodes étudiées sur l'hypothèse d'indépendance des sources

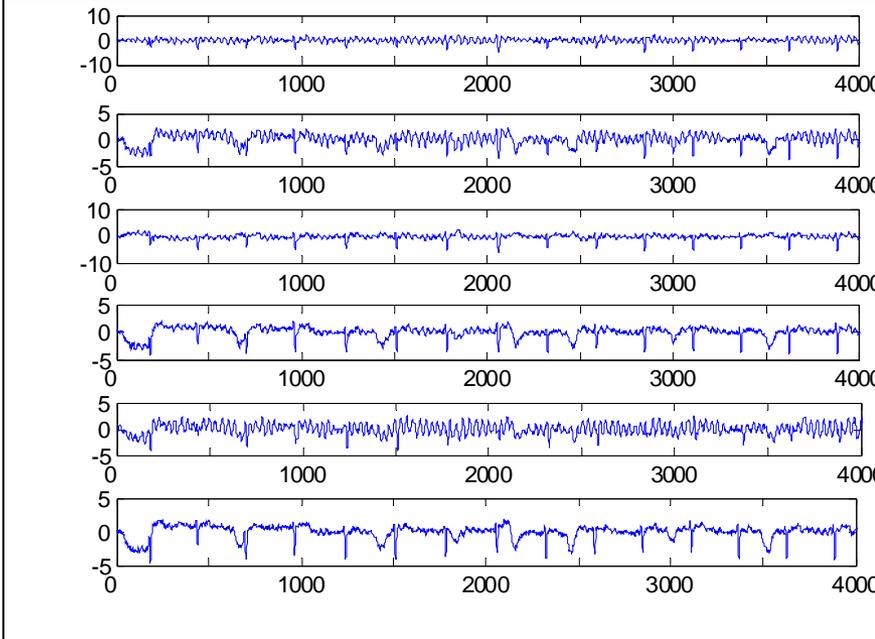
Caractéristiques des méthodes Algorithms	Ordre $2q$ des statistiques exploitées dans l'extraction des sources	Utilisation d'un Blanchiment?	Nombre de sources gaussiennes tolérées?	Nécessité pour les Cumulants d'ordre $2q$ des sources d'être du même signe?	Nécessité pour les sources d'avoir des spectres d'ordre $2q$ différents?	Exploitation de la coloration des sources?	Exploitation de la non-stationnarité des sources?	Bruit de cohérence spatiale inconnue toléré?
SOBI	2	OUI	Toutes	NON	OUI à l'ordre 2	OUI	NON	NON
JADE	4	OUI	1	NON	NON	NON	NON	NON
COM2	4	OUI	1	NON	NON	NON	NON	NON
INFOMAX	4	OUI	1	NON	NON	NON	NON	NON
ICAR (4-BIOME)	4	NON	0	OUI	NON	NON	NON	OUI si bruit gaussien
FastICA	4	OUI	1	NON	NON	NON	NON	NON

Résultats

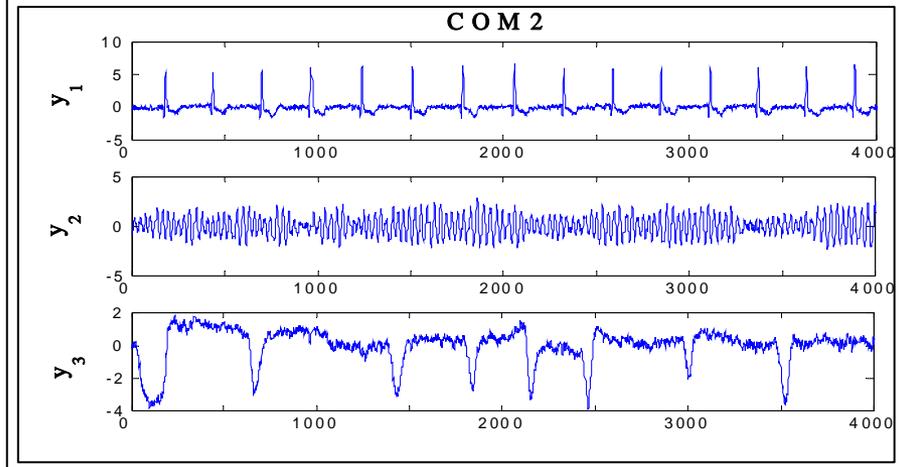
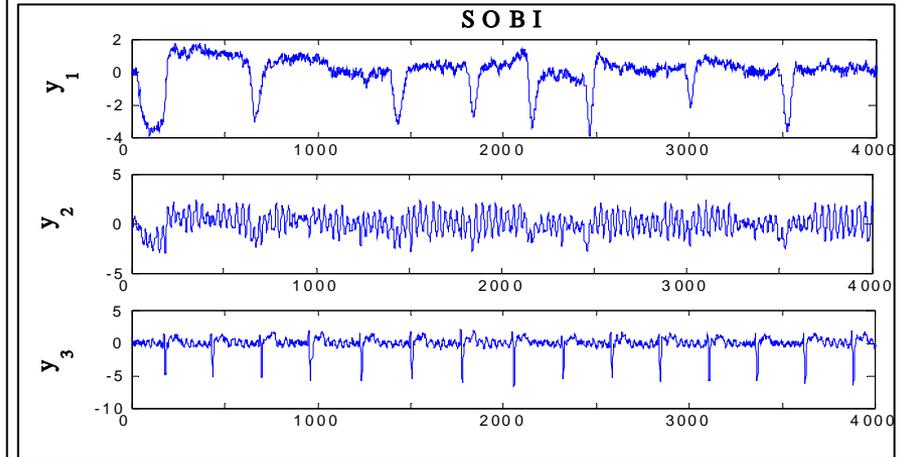
Sources



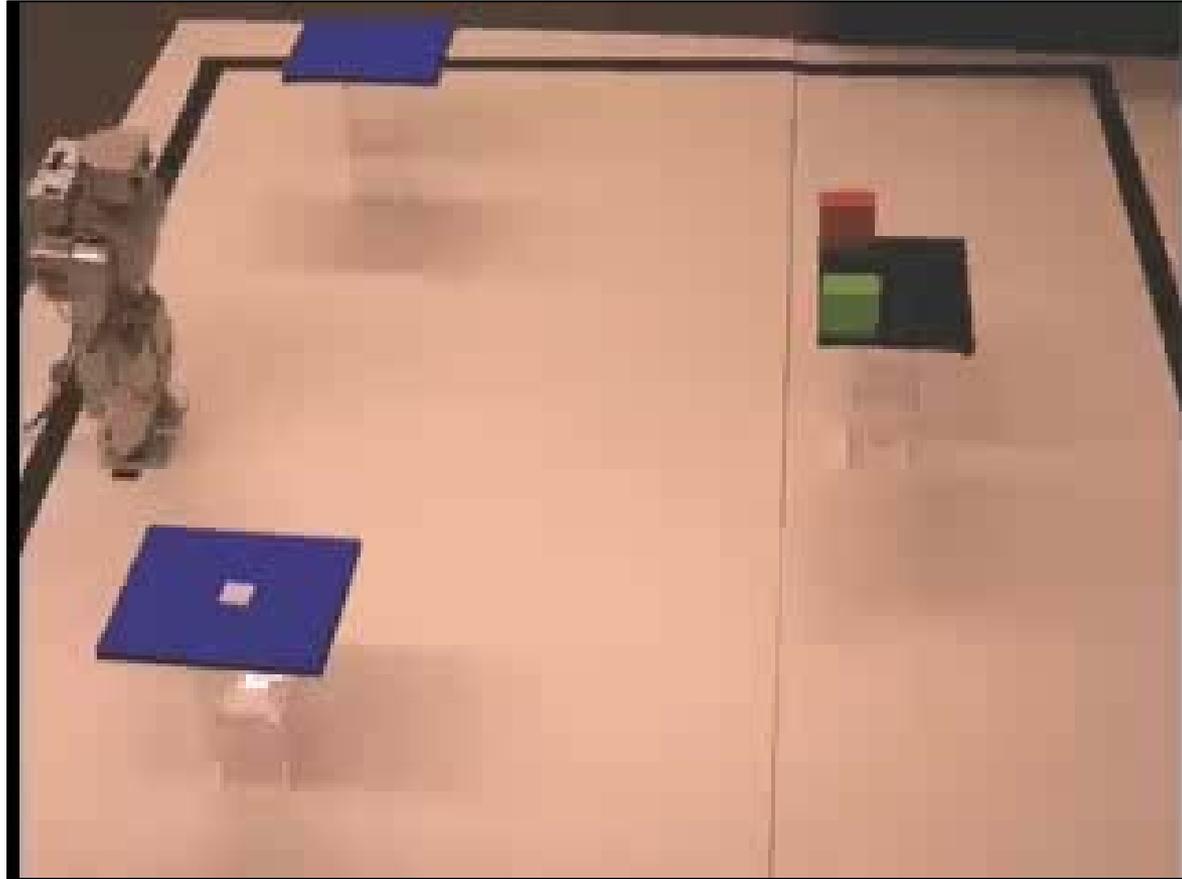
Observations



Sources estimées



Un exemple...



T. Blakely, K. J. Miller, S. P. Zanos, R. P. N. Rao, and J. G. Ojemann. (2009, July). Robust, long-term control of an electrocorticographic brain-computer interface with fixed parameters. *Neurosurg. Focus* [Online]. 27(1), p. E13. Available: <http://thejns.org/doi/full/10.3171/2009.4.FOCUS0977>

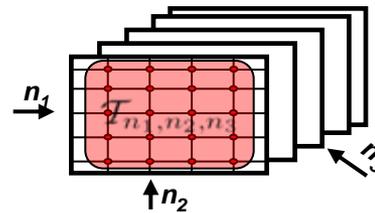
- I. Applications, signaux et méthodes
 1. Modalités d'acquisitions
 2. Problèmes applicatifs
 3. Méthodes de séparation de sources
- II. Interfaces cerveau-machine
 1. Problématique
 2. Données exploitées
 3. Etude proposée
- III. Epilepsies pharmacorésistantes
 1. Quelques outils
 2. Localisation de réseaux épileptogènes
 3. Débruitage d'activités épileptiques

- I. Applications, signaux et méthodes
 1. Modalités d'acquisitions
 2. Problèmes applicatifs
 3. Méthodes de séparation de sources
- II. Interfaces cerveau-machine
 1. Problématique
 2. Données exploitées
 3. Etude proposée
- III. Epilepsies pharmacorésistantes
 1. Quelques outils
 2. Localisation de réseaux épileptogènes
 3. Débruitage d'activités épileptiques

Tableaux d'ordre supérieur

- **Notation** en gras minuscule des vecteurs, en gras majuscule des matrices et en gras calligraphique des tableaux à plus de deux indices.
- **Définition** d'un tableau d'ordre q : tableau à q entrées.

→ tableau d'ordre 3



$$\mathcal{T} = (\mathcal{T}_{n_1, n_2, n_3})$$

- **Représentation** d'une application multi-linéaire (tenseur) par un tableau d'ordre supérieur à deux pour un choix de bases données.

- **Notation compacte** : $\mathcal{T} = (\mathbf{A}^{(1)}, \dots, \mathbf{A}^{(q)}) \cdot \mathcal{S}$

pour $\mathcal{T}_{n_1, \dots, n_q} = \sum_{r_1=1}^{R_1} \dots \sum_{r_q=1}^{R_q} \mathcal{S}_{r_1, \dots, r_q} A_{n_1, r_1}^{(1)} \dots A_{n_q, r_q}^{(q)}$

Déplissements matriciels (1/2)

- $\text{mat}_1(\mathcal{T})$: déplissement matriciel d'un tableau **carré**⁽¹⁾ (tableau dont les dimensions sont identiques) d'ordre supérieur.

➡ tableau d'ordre 4 de dimensions $(N \times N \times N \times N)$

$$(\text{mat}_1(\mathcal{T}))_{i,j} = \mathcal{T}_{n_1, n_2, n_3, n_4}$$

avec : $i = (n_1 - 1)N + n_4$ et : $j = (n_3 - 1)N + n_2$

➡ tableau d'ordre 6 de dimensions $(N \times N \times N \times N \times N \times N)$

$$(\text{mat}_1(\mathcal{T}))_{i,j} = \mathcal{T}_{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6}$$

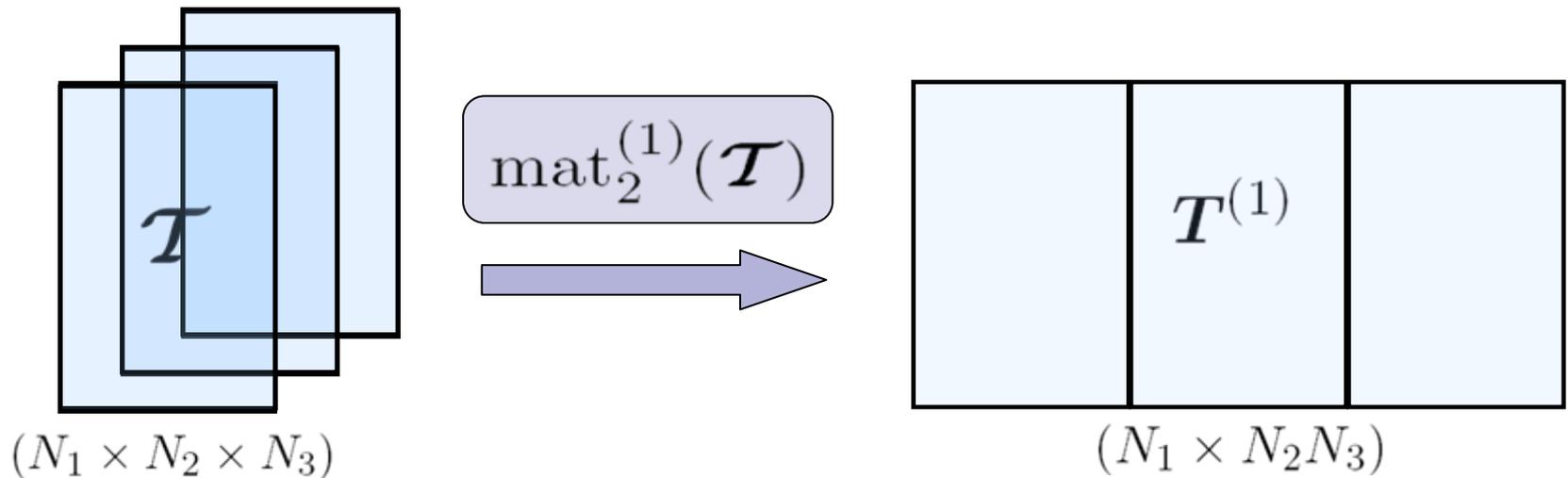
avec : $i = (n_1 - 1)N^2 + (n_2 - 1)N + n_6$
 $j = (n_4 - 1)N^2 + (n_5 - 1)N + n_3$

⁽¹⁾ L'adjectif **cubique** est également employé.

Dépliants matriciels (2/2)

- $\text{mat}_2^{(i)}(\mathcal{T})$: dépliement matriciel d'un tableau d'ordre supérieur dont les dimensions sont quelconques.

➔ tableau d'ordre 3 de dimensions $(N_1 \times N_2 \times N_3)$



- $\text{vec}(\mathcal{T})$: dépliement vectoriel d'un tableau d'ordre supérieur dont les dimensions sont quelconques.

Produits matriciels

- **Produit de Kronecker** $G \otimes H$ entre deux matrices rectangulaires de tailles respectives $(N_G \times P_G)$ et $(N_H \times P_H)$:

$$G \otimes H = \begin{bmatrix} G_{1,1}H & G_{1,2}H & \cdots & G_{1,P_G}H \\ G_{2,1}H & G_{2,2}H & \cdots & G_{2,P_G}H \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{N_G,1}H & G_{N_G,2}H & \cdots & G_{N_G,P_G}H \end{bmatrix}$$

- **Produit de Khatri-Rao** $G \odot H$ entre deux matrices rectangulaires de tailles respectives $(N_G \times P)$ et $(N_H \times P)$:

$$G \odot H = [g_1 \otimes h_1, g_2 \otimes h_2, \cdots, g_P \otimes h_P]$$

où g_j et h_j représentent respectivement la j -ième colonne de G et H .

Extension de la SVD aux ordres supérieurs

Deux manières au moins d'étendre la Décomposition en Valeurs Singulières (SVD) de matrices $T = (A^{(1)}, A^{(2)}) \cdot S$ au cas de tableaux d'ordre supérieur ou égal à 3 :

$$\mathcal{T} = (A^{(1)}, \dots, A^{(q)}) \cdot \mathcal{S}$$

- **en conservant l'orthogonalité** des matrices $A^{(i)}$ de facteurs et l'orthogonalité entre les tableaux d'ordre $q - 1$ extraits du tableau cœur \mathcal{S}

➡ décomposition de Tucker3 orthogonale, HOSVD (Higher Order SVD)

- **en conservant la diagonalité** du tableau cœur \mathcal{S}

➡ décomposition canonique

Rang et décomposition canonique

- **Tableau de rang 1** : tableau \mathcal{T} de la forme $\mathcal{T} = (\mathbf{a}^{(1)}, \dots, \mathbf{a}^{(q)}) \cdot s$ où $\mathbf{a}^{(i)}$ est un vecteur colonne et s un scalaire.
- **Décomposition canonique** d'un tableau \mathcal{T} d'ordre supérieur : somme de R tableaux de rang 1 décrivant exactement le tableau \mathcal{T} où R est le plus petit possible.

$$\mathcal{T} = (\mathbf{A}^{(1)}, \dots, \mathbf{A}^{(q)}) \cdot \mathcal{S} = \sum_{r=1}^R (\mathbf{a}_r^{(1)}, \dots, \mathbf{a}_r^{(q)}) \cdot \mathcal{S}_{p, \dots, p}$$

- **Rang** d'un tableau \mathcal{T} d'ordre supérieur : le nombre R de tableaux de rang 1 dans la décomposition canonique de \mathcal{T} .

- ➡ il peut être strictement supérieur à la plus petite dimension
- ➡ sauf cas particuliers, pas d'algorithme direct de calcul de rang
- ➡ pour un tableau à valeurs réelles, il peut être différent selon que l'on travaille sur \mathbb{R} ou sur \mathbb{C}

Décomposition canonique et unicité (1/2)

- **Matrice triviale** : matrice de la forme $D \Pi$ où D est une matrice diagonale et Π une matrice de permutation.

- **Unicité essentielle** de la décomposition canonique : unicité à des matrices triviales près dites **indéterminations triviales**

$$(A^{(1)}, \dots, A^{(q)}) \cdot \mathcal{S} = (A^{(1)} D^{(1)} \Pi, \dots, A^{(q)} D^{(q)} \Pi) \cdot \mathcal{S}$$

où Π est une matrice de permutation et $D^{(i)}$ une matrice diagonale telle que

$$\prod_{i=1}^q D^{(i)} = \mathbf{I}_R$$

Décomposition canonique et unicité (2/2)

- **Rang de Kruskal** d'une matrice \mathbf{A} , noté $\text{rk}_K(\mathbf{A})$: le plus grand entier naturel ℓ tel que toute famille de ℓ vecteurs colonnes de la matrice \mathbf{A} est libre.

➔ Soit une matrice \mathbf{A} de taille (2×3) définie par $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, son rang de Kruskal vaut alors 1.

- **Condition d'unicité essentielle** de la décomposition canonique $\mathcal{T} = (\mathbf{A}^{(1)}, \dots, \mathbf{A}^{(q)}) \cdot \mathcal{S}$ d'un tableau \mathcal{T} d'ordre q :

$$2R + q - 1 \leq \sum_{i=1}^q \text{rk}_K(\mathbf{A}^{(i)})$$

Tableaux cumulants d'ordre q (1/3)

- Soit $\Psi_{\mathbf{x}}$ la **fonction caractéristique** de seconde espèce d'un vecteur aléatoire \mathbf{x} à valeurs dans \mathbb{R}^N définie par $\Psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}) = \ln(\mathbb{E}[e^{i\mathbf{u}^T \mathbf{x}}])$.

- Soit $\mathcal{C}_{q,\mathbf{x}} = (\mathcal{C}_{n_1,\dots,n_q,\mathbf{x}})$ le **tableau cumulant d'ordre q ($q \geq 1$)** de \mathbf{x} défini par :

$$\mathcal{C}_{n_1,\dots,n_q,\mathbf{x}} = (-i)^q \frac{\partial^q \Psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{u})}{\partial u_{n_1} \dots \partial u_{n_q}} \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{0}}$$

- **Extension** au cas d'un vecteur aléatoire \mathbf{x} à valeurs dans \mathbb{C}^N : considérer la fonction définie de $\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N$ dans \mathbb{C} par $\Psi_{\mathbf{x},\mathbf{x}^*}(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*) = \ln(\mathbb{E}[e^{i\Re(\mathbf{u}^H \mathbf{x})}])$.

- Soit $\mathcal{C}_{r,\mathbf{x}}^{q-r} = (\mathcal{C}_{n_1,\dots,n_r,\mathbf{x}}^{n_{r+1},\dots,n_q})$ le **tableau cumulant d'ordre q ($q \geq 1$)** de \mathbf{x} défini par :

$$\mathcal{C}_{n_1,\dots,n_r,\mathbf{x}}^{n_{r+1},\dots,n_q} = (-2i)^q \frac{\partial^q \Psi_{\mathbf{x},\mathbf{x}^*}(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*)}{\partial u_{n_1}^* \dots \partial u_{n_r}^* \partial u_{n_{r+1}} \dots \partial u_{n_q}} \Big|_{(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})}$$

Tableaux cumulants d'ordre q (2/3)

- **Relation** entre cumulants d'ordre q et moments d'ordre inférieur ou égal à q : **formule de Leonov-Shirayev**

➔ Tableaux cumulants d'ordre 2, 3 et 4 d'un vecteur aléatoire centré à valeurs dans \mathbb{C}^N :

$$\mathcal{C}_{1,\mathbf{x}}^1 = (\mathcal{C}_{n_1,\mathbf{x}}^{n_2}) \quad \text{donné par :} \quad \mathcal{C}_{n_1,\mathbf{x}}^{n_2} = \mathbb{E}[x_{n_1} x_{n_2}^*]$$

$$\mathcal{C}_{2,\mathbf{x}}^1 = (\mathcal{C}_{n_1,n_2,\mathbf{x}}^{n_3}) \quad \text{donné par :} \quad \mathcal{C}_{n_1,n_2,\mathbf{x}}^{n_3} = \mathbb{E}[x_{n_1} x_{n_2} x_{n_3}^*]$$

$$\mathcal{C}_{2,\mathbf{x}}^2 = (\mathcal{C}_{n_1,n_2,\mathbf{x}}^{n_3,n_4}) \quad \text{donné par :}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{n_1,n_2,\mathbf{x}}^{n_3,n_4} = & \mathbb{E}[x_{n_1} x_{n_2} x_{n_3}^* x_{n_4}^*] - \mathbb{E}[x_{n_1} x_{n_2}] \mathbb{E}[x_{n_3}^* x_{n_4}^*] \\ & - \mathbb{E}[x_{n_1} x_{n_3}^*] \mathbb{E}[x_{n_2} x_{n_4}^*] - \mathbb{E}[x_{n_1} x_{n_4}^*] \mathbb{E}[x_{n_2} x_{n_3}^*] \end{aligned}$$

Tableaux cumulants d'ordre q (3/3)

- Quelques propriétés...

➔ **Caractère hermitien** du tableau cumulant d'un vecteur aléatoire complexe ;

➔ **Indépendance** : soit \mathbf{s} un vecteur aléatoire dont les composantes sont mutuellement indépendantes, alors $\mathbf{C}_{r,\mathbf{s}}^{q-r}$ est diagonal ;

➔ **Additivité** : soient \mathbf{y} et \mathbf{v} deux vecteurs aléatoires indépendants, alors $\mathbf{C}_{r,\mathbf{y}+\mathbf{v}}^{q-r} = \mathbf{C}_{r,\mathbf{y}}^{q-r} + \mathbf{C}_{r,\mathbf{v}}^{q-r}$;

➔ **Gaussianité** : soit \mathbf{v} un vecteur gaussien, alors $\mathbf{C}_{r,\mathbf{v}}^{q-r} = \mathbf{0}$;

➔ **Multi-linéarité** : soit $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{s}$, on a alors

$$\mathbf{C}_{r,\mathbf{x}}^{q-r} = \underbrace{(\mathbf{A}, \dots, \mathbf{A})}_{r \text{ matrices}} \underbrace{(\mathbf{A}^*, \dots, \mathbf{A}^*)}_{q-r \text{ matrices}} \cdot \mathbf{C}_{r,\mathbf{s}}^{q-r}$$

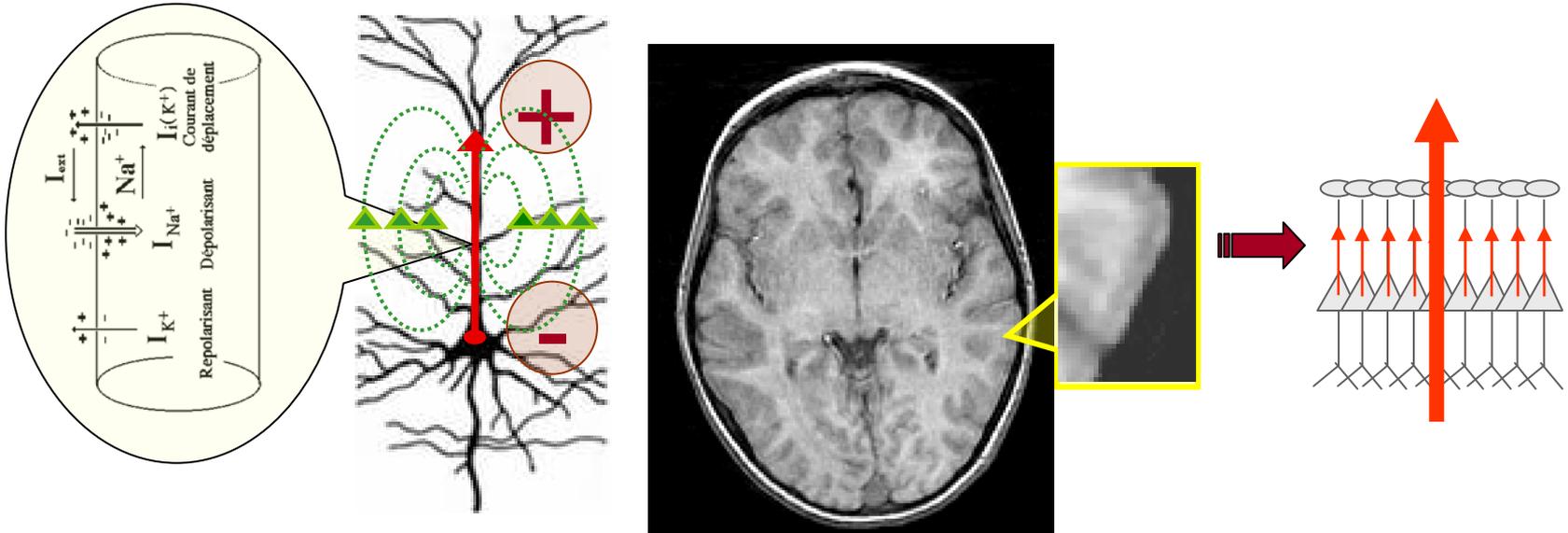
- I. Applications, signaux et méthodes
 1. Modalités d'acquisitions
 2. Problèmes applicatifs
 3. Méthodes de séparation de sources
- II. Interfaces cerveau-machine
 1. Problématique
 2. Données exploitées
 3. Etude proposée
- III. Epilepsies pharmacorésistantes
 1. Quelques outils
 2. Localisation de réseaux épileptogènes
 3. Débruitage d'activités épileptiques

L'épilepsie

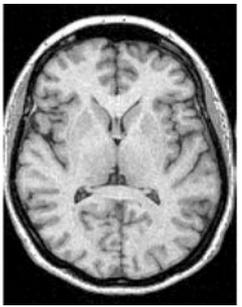


- Maladie neurologique caractérisée par la répétition de crises
➡ conséquences socioprofessionnelles importantes
- Fonctionnement anormal, aigu et transitoire de l'**activité électrique du cerveau** ➡ Foyer épileptique
- Trouble neurologique le plus courant : 1% de la population
- Epilepsie **pharmaco-résistantes** ➡ Foyer épileptique

Modélisation



Maillage réaliste de la surface corticale



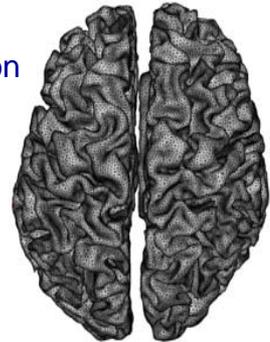
IRM anatomique

Segmentation (gris/blanc)
Séparation des 2 hémisphères



Volume binaire

Reconstruction de surface
Maillage surfacique (triangles)

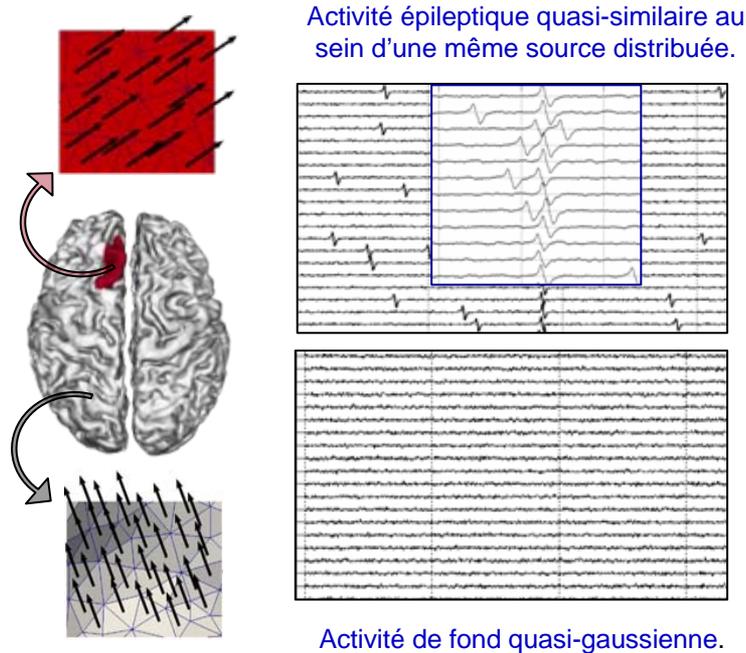


1 triangle = 1 dipôle



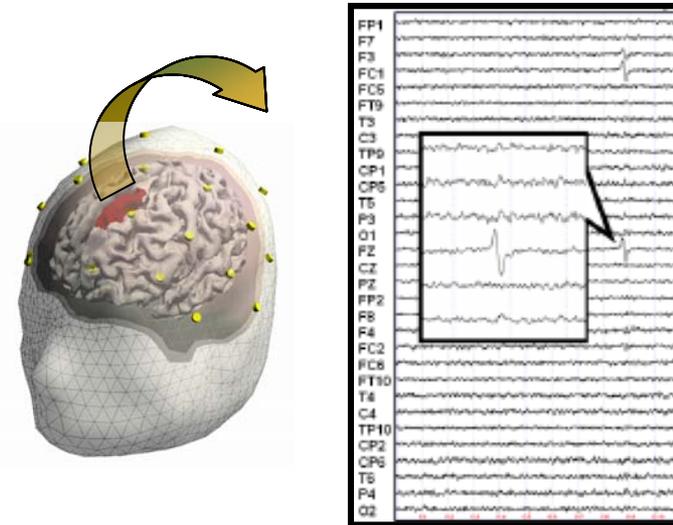
Localisation de générateurs épileptiques

Activité à la surface du cortex



Activité à la surface du scalp

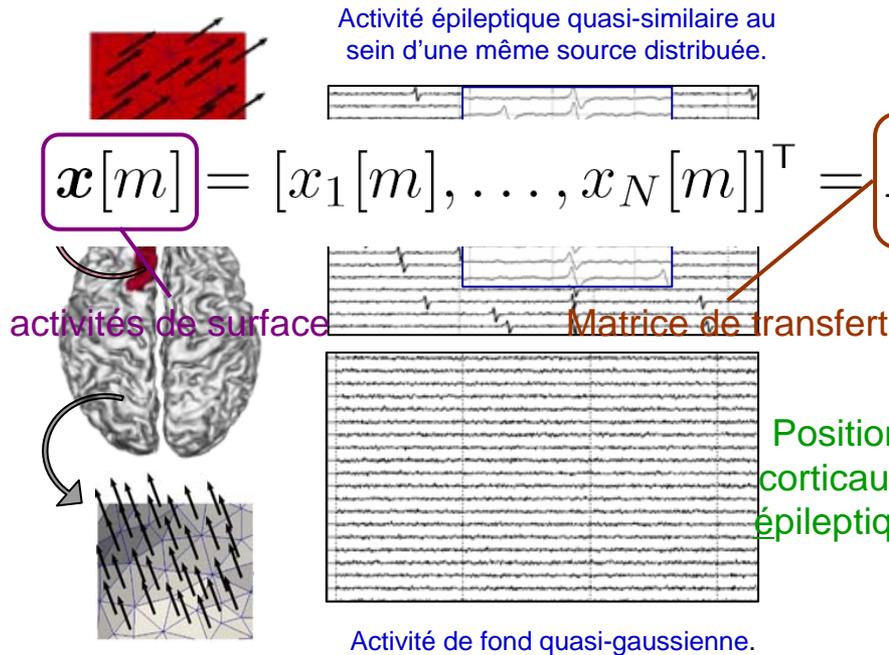
Activité de surface (reflet de l'activité cérébrale + bruit d'instrumentation gaussien).



- **Objectif** : localiser les générateurs cérébraux d'activité électrique pathologique et spatialement distribuée à partir de signaux de scalp ;
- **Difficultés** : problème mal posé, erreurs de modèle, faible SNR, etc.

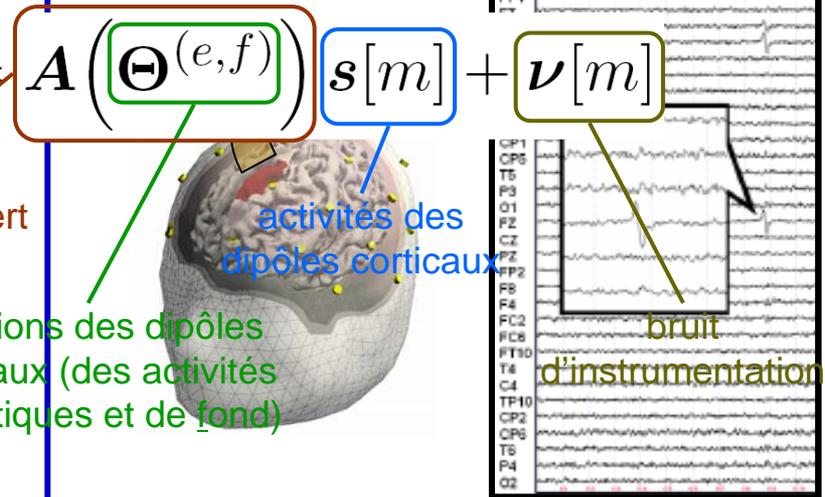
Localisation de générateurs épileptiques

Activité à la surface du cortex



Activité à la surface du scalp

Activité de surface (reflet de l'activité cérébrale + bruit d'instrumentation gaussien).



- **Objectif** : localiser les générateurs cérébraux d'activité électrique pathologique et spatialement distribuée à partir de signaux de scalp ;
- **Difficultés** : problème mal posé, erreurs de modèle, faible SNR, etc.

La méthode 2q-ExSo-MUSIC ($q \geq 2$)

- **Différents types d'activités** corticales (épileptiques ou de fond) :

$$\mathbf{x}[m] = \mathbf{A}(\Theta^{(e)}) \mathbf{s}^{(e)}[m] + \mathbf{A}(\Theta^{(f)}) \mathbf{s}^{(f)}[m] + \boldsymbol{\nu}[m]$$

- **Quasi-similarité** des activités épileptiques au sein d'une source distribuée :

$$\mathbf{s}^{(e)}[m] \approx \left[[1, \dots, 1]^\top \bar{\mathbf{s}}_1^{(e)}[m], \dots, [1, \dots, 1]^\top \bar{\mathbf{s}}_P^{(e)}[m] \right]^\top$$

- ➡ « **Compression** » du vecteur de sources épileptiques :

$$\mathbf{x}[m] \approx \bar{\mathbf{A}}(\Theta^{(e)}) \bar{\mathbf{s}}^{(e)}[m] + \mathbf{A}(\Theta^{(f)}) \mathbf{s}^{(f)}[m] + \boldsymbol{\nu}[m]$$

- **Localisation** par décomposition de Tucker3 contrainte (non orthogonale) :

$$\mathbf{C}_{q,\mathbf{x}} \approx (\bar{\mathbf{A}}(\Theta^{(e)}), \dots, \bar{\mathbf{A}}(\Theta^{(e)})) \cdot \mathbf{C}_{q,\bar{\mathbf{s}}^{(e)}} + (\mathbf{A}(\Theta^{(f)}), \dots, \mathbf{A}(\Theta^{(f)})) \cdot \mathbf{C}_{q,\mathbf{s}^{(f)}} + \mathbf{C}_{q,\boldsymbol{\nu}}$$

La méthode 2q-ExSo-MUSIC ($q \geq 2$)

Illustration de l'approche avec le tableau cumulatif $\mathcal{C}_{q,x}$ d'ordre 4

- **Dépliage matriciel** du tableau cumulatif avec $\Lambda_s = \text{mat}_1(\mathcal{C}_{4,s})$:

$$\begin{aligned} T &= \text{mat}_1(\mathcal{C}_{4,x}) \\ &\approx (\bar{\mathbf{A}}(\Theta^{(e)}) \otimes \bar{\mathbf{A}}(\Theta^{(e)})) \Lambda_s (\bar{\mathbf{A}}(\Theta^{(e)}) \otimes \bar{\mathbf{A}}(\Theta^{(e)}))^T \end{aligned}$$

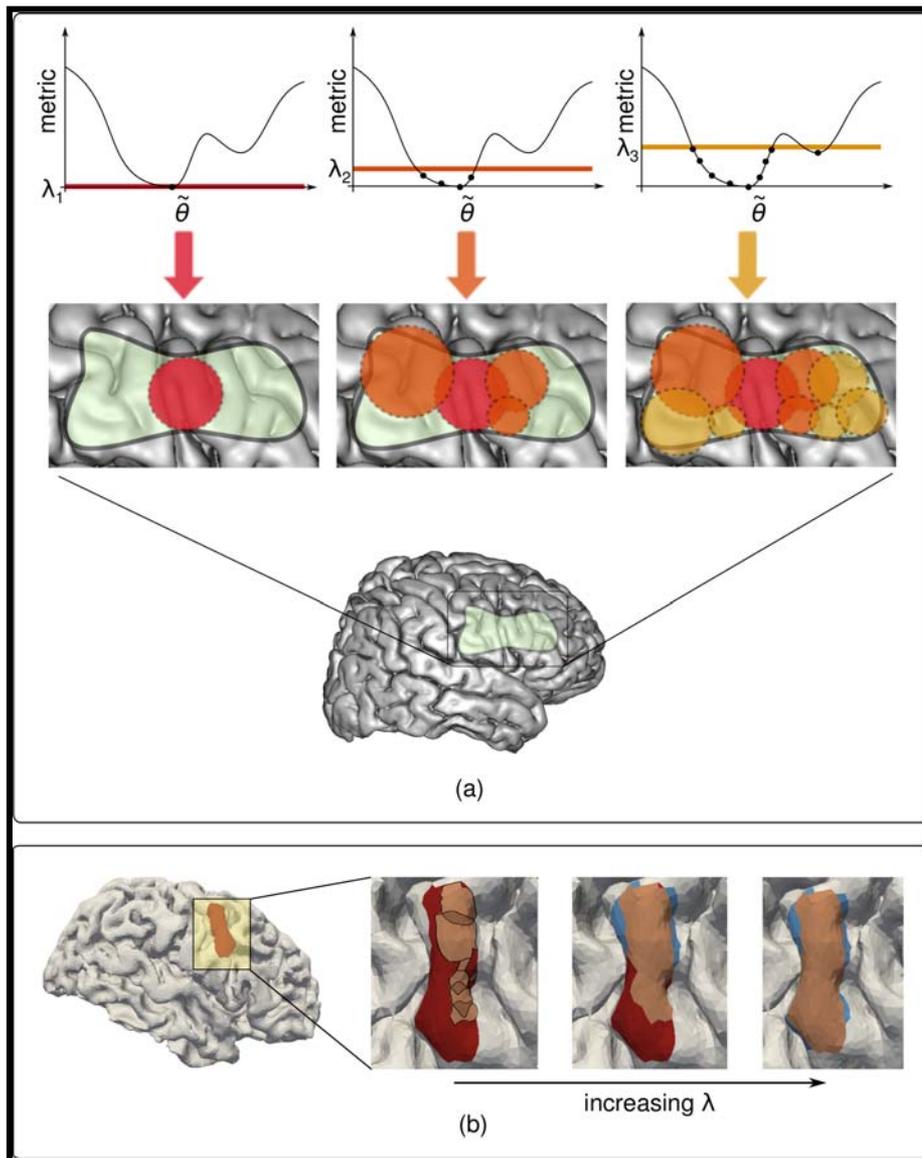
- Calcul de la matrice E_s des **vecteurs propres** associés aux **valeurs propres non nulles** de T :

$$T = E_s \Lambda_s E_s^T$$

- Calcul d'une **métrique** de type 4-MUSIC :

$$\begin{aligned} \Psi(\bar{\mathbf{a}}(\Theta) \otimes \bar{\mathbf{a}}(\Theta), E_s) = \\ (\bar{\mathbf{a}}(\Theta) \otimes \bar{\mathbf{a}}(\Theta))^T E_s (E_s^T E_s)^{-1} E_s^T (\bar{\mathbf{a}}(\Theta) \otimes \bar{\mathbf{a}}(\Theta)) \end{aligned}$$

La méthode 2q-ExSo-MUSIC ($q \geq 2$)



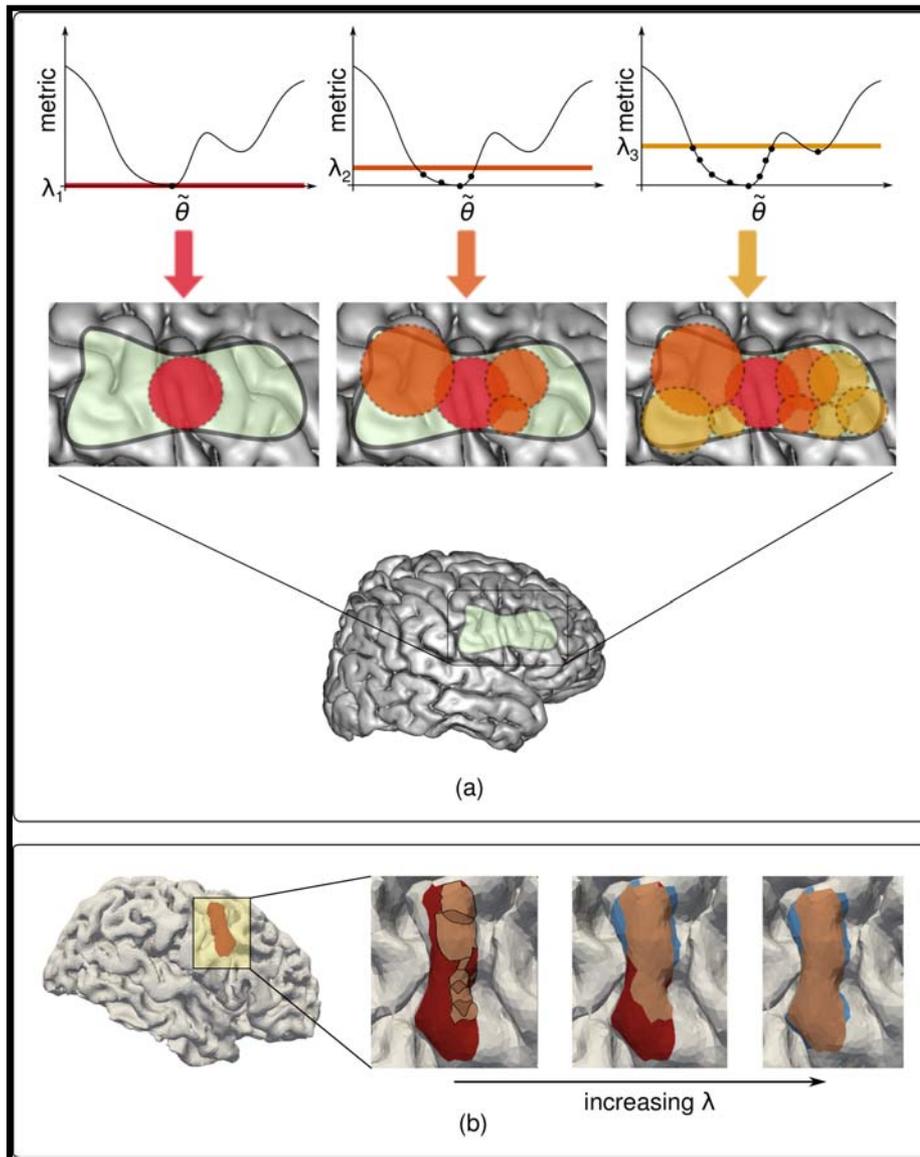
- **Calculer la métrique Ψ** pour tous les vecteurs $\bar{a}(\Theta) \otimes \bar{a}(\Theta)$ susceptibles d'être solution où :

$$\bar{a}(\Theta) = \sum_{\theta \in \Theta} a(\theta)$$

et où Θ désigne un sous-ensemble de $\Theta^{(e,f)}$ contenant les positions de dipôles contigus.

- **Identifier les P maxima globaux** de Ψ .

La méthode 2q-ExSo-MUSIC ($q \geq 2$)



- **Calculer la métrique Ψ** pour tous les vecteurs $\bar{a}(\Theta) \otimes \bar{a}(\Theta)$ susceptibles d'être solution où :

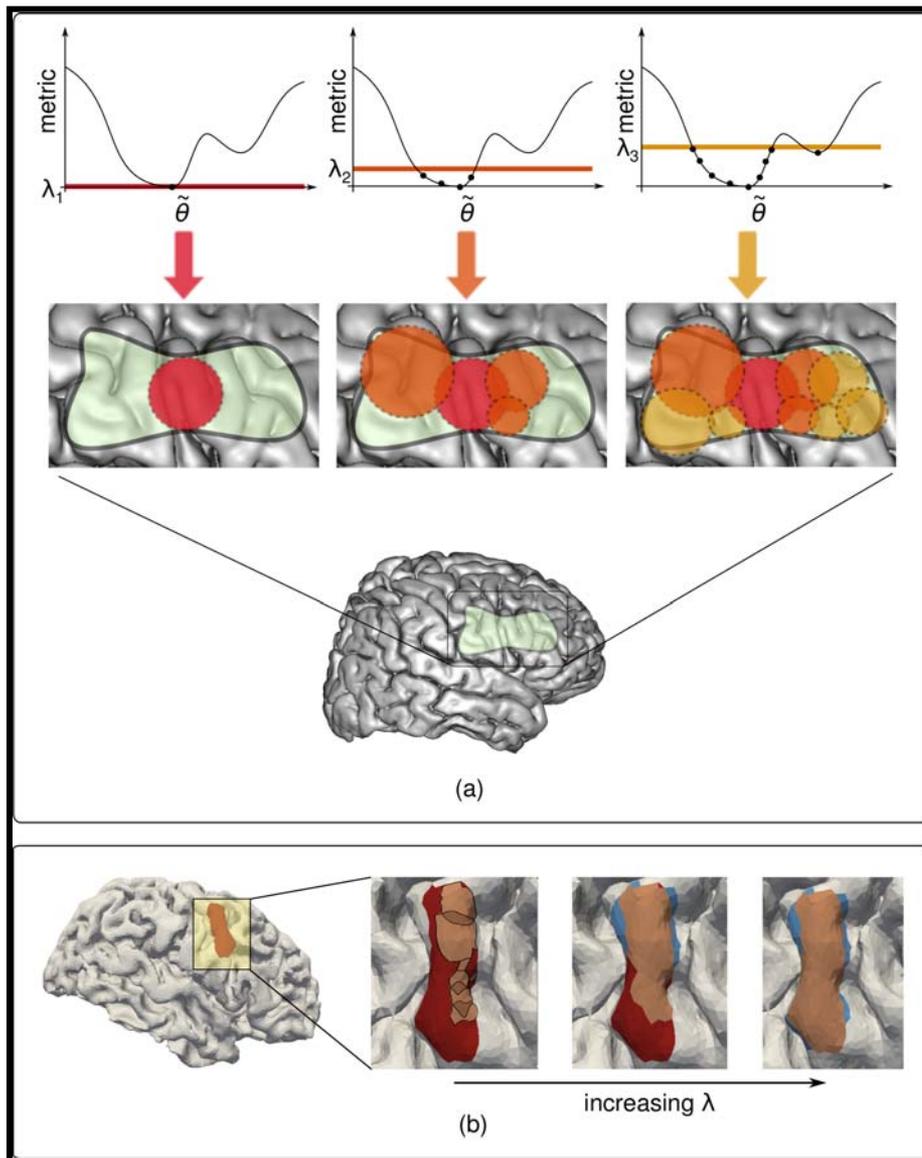
$$\bar{a}(\Theta) = \sum_{\theta \in \Theta} a(\theta)$$

et où Θ désigne un sous-ensemble de $\Theta^{(e,j)}$ contenant les positions de dipôles contigus.

- **Identifier les P maxima globaux** de Ψ .

- **Solution trop chère** en coût de calcul : beaucoup trop de vecteurs $\bar{a}(\Theta) \otimes \bar{a}(\Theta)$ candidats.

La méthode 2q-ExSo-MUSIC ($q \geq 2$)



- **Calculer la métrique Ψ** pour les vecteurs $\bar{a}(\Theta) \otimes \bar{a}(\Theta)$ tels que :

$$\bar{a}(\Theta) = \sum_{\theta \in \Theta} a(\theta)$$

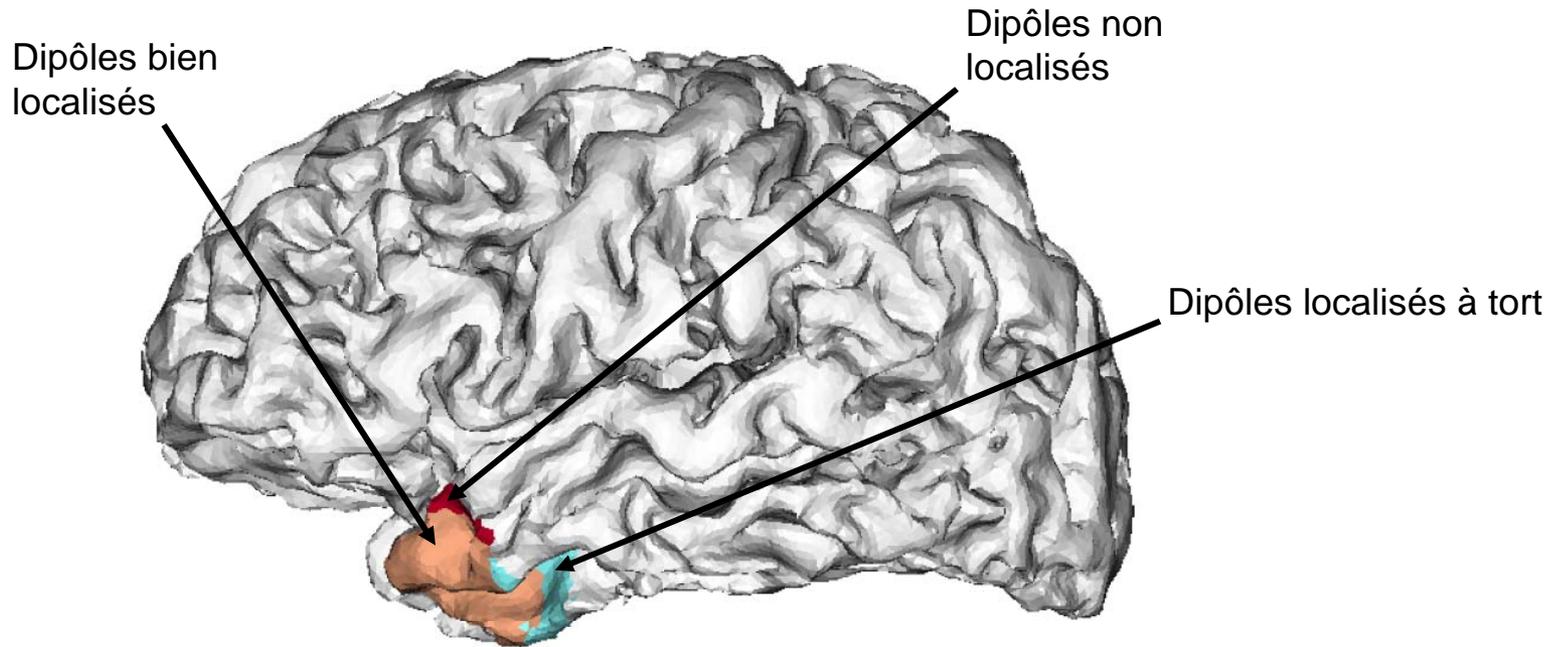
où Θ rassemble les positions d'un amas de dipôles de forme quasi-circulaire.

- **Seuiller** la métrique obtenue.

$$\bar{a}(\Theta) \otimes \bar{a}(\Theta)$$

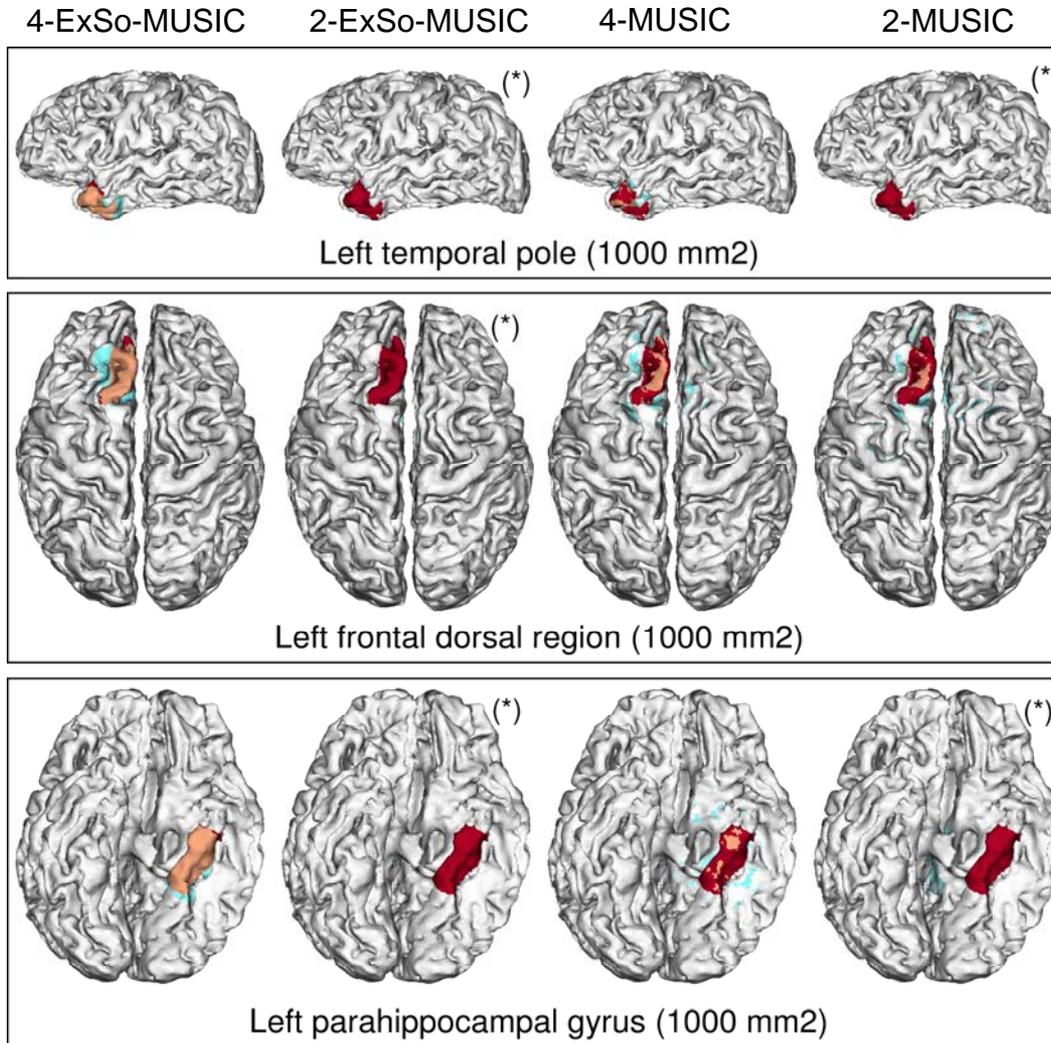
Résultats sur signaux simulés à partir de modèles réalistes

Décomposition de Tucker3 contrainte d'un tableau cumulant d'ordre 4



Pôle temporal gauche : 10 cm²

Influence de la position de la source distribuée



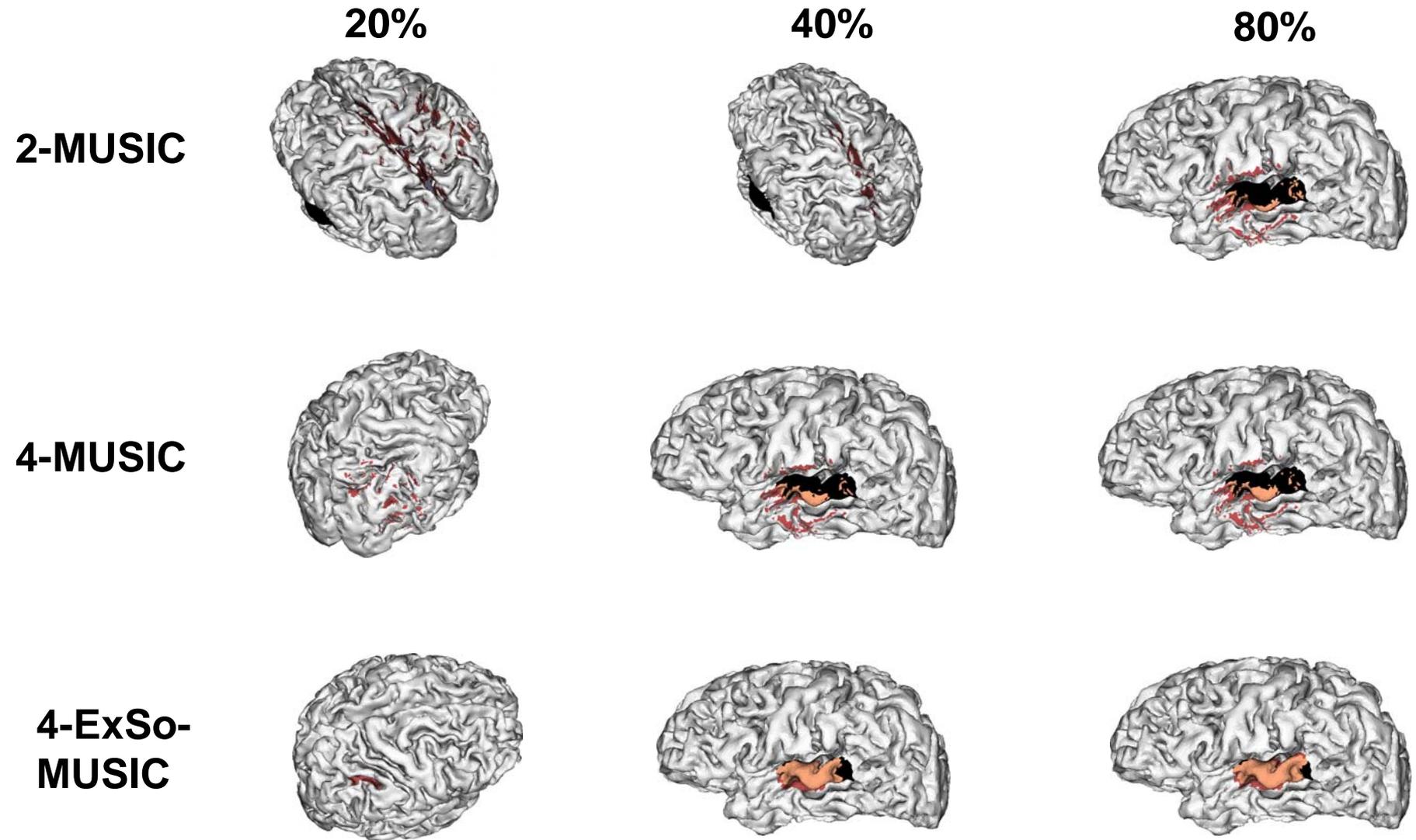
■ Dipôles non localisés

■ Dipôles bien localisés

■ Dipôles localisés à tort

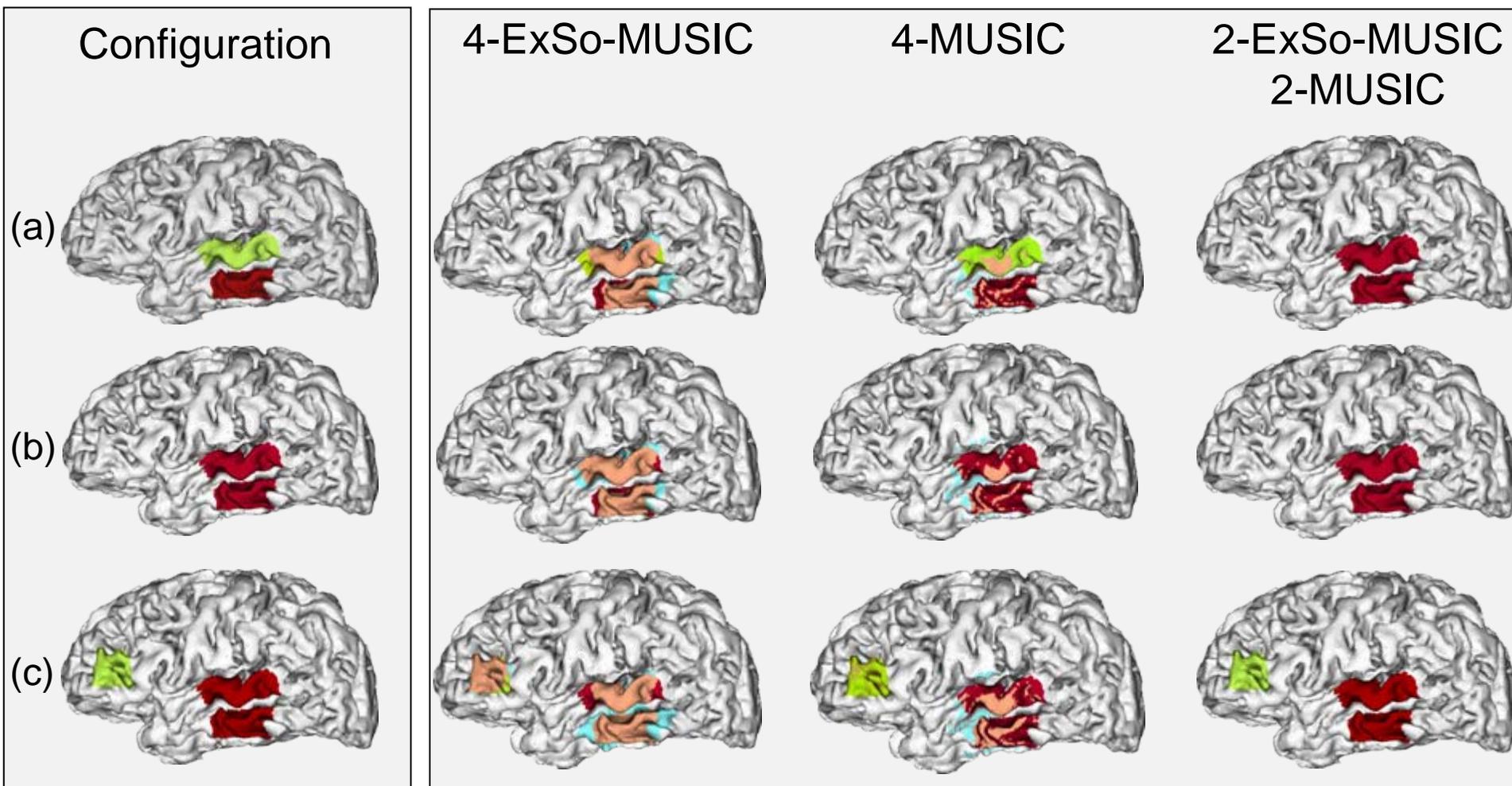
(*) Dipôles localisés dans le gyrus cingulaire

Influence du degré de dépendance au sein de la source distribuée



Gyrus temporal surface gauche : 10 cm²

Influence du nombre de patches (dépendant ou non)

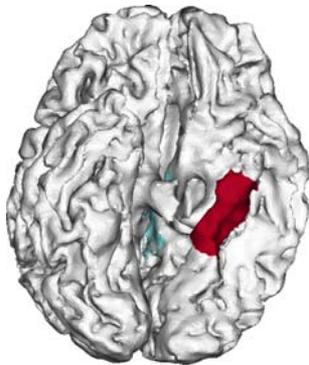
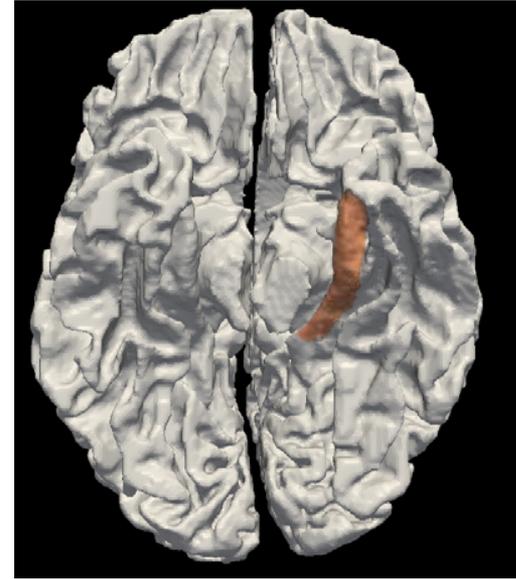
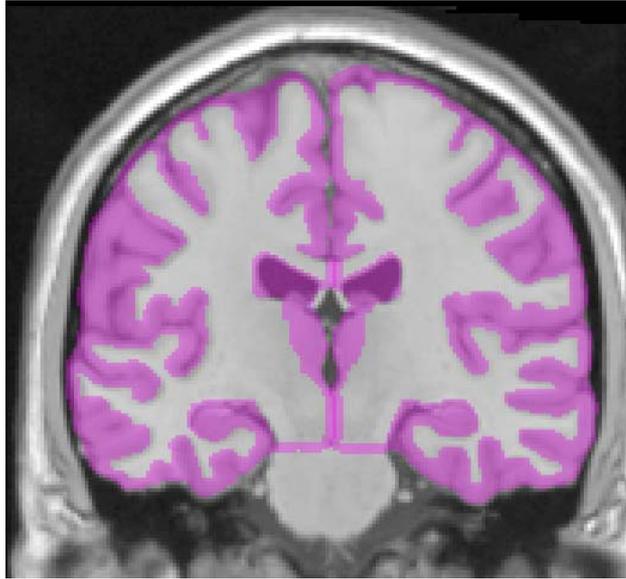


Source distribuée n° 1
 Source distribuée n° 2

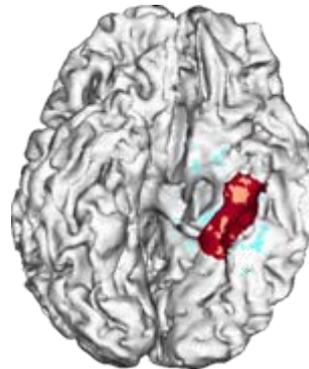
Indépendance spatiale des sources n° 1 et n° 2

Dipôles non localisés
 Dipôles bien localisés
 Dipôles localisés à tort

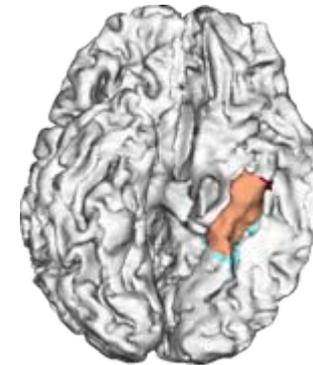
Localisation de structures plus internes



2-MUSIC



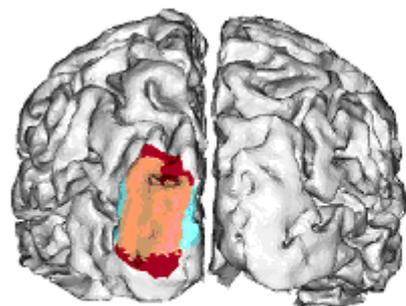
4-MUSIC



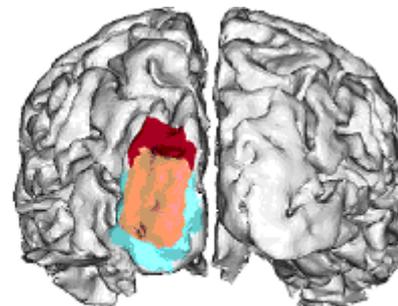
4-EXSO-MUSIC

Influence du nombre d'échantillons

■ Dipôles non localisés ■ Dipôles bien localisés ■ Dipôles localisés à tort



40s (comprising 3 spikes)

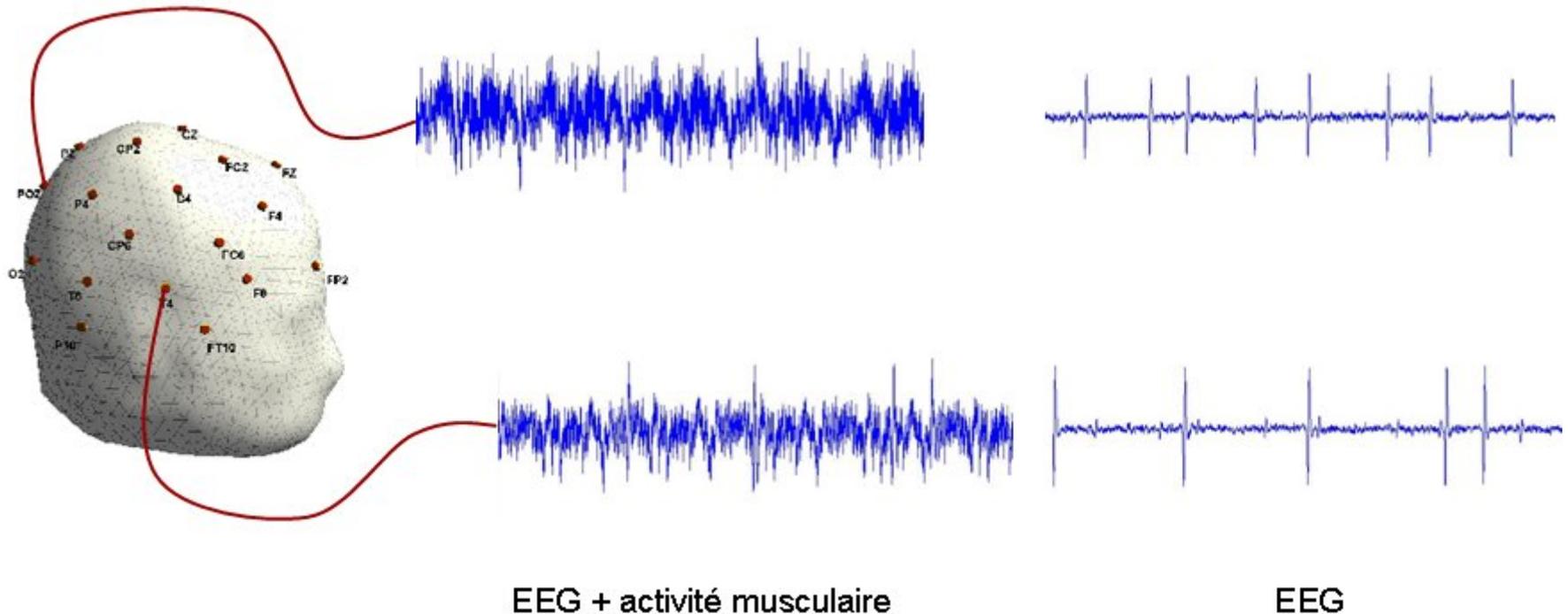


~2s (comprising one spike)

- Résultats obtenus par 4-ExSo-MUSIC à gauche pour un EEG de 40 secondes (10240 échantillons) et à droite pour un EEG de 1.95 seconde (500 échantillons).
- Précision de localisation supérieure à celle des approches classiques de type MUSIC même pour 500 échantillons.

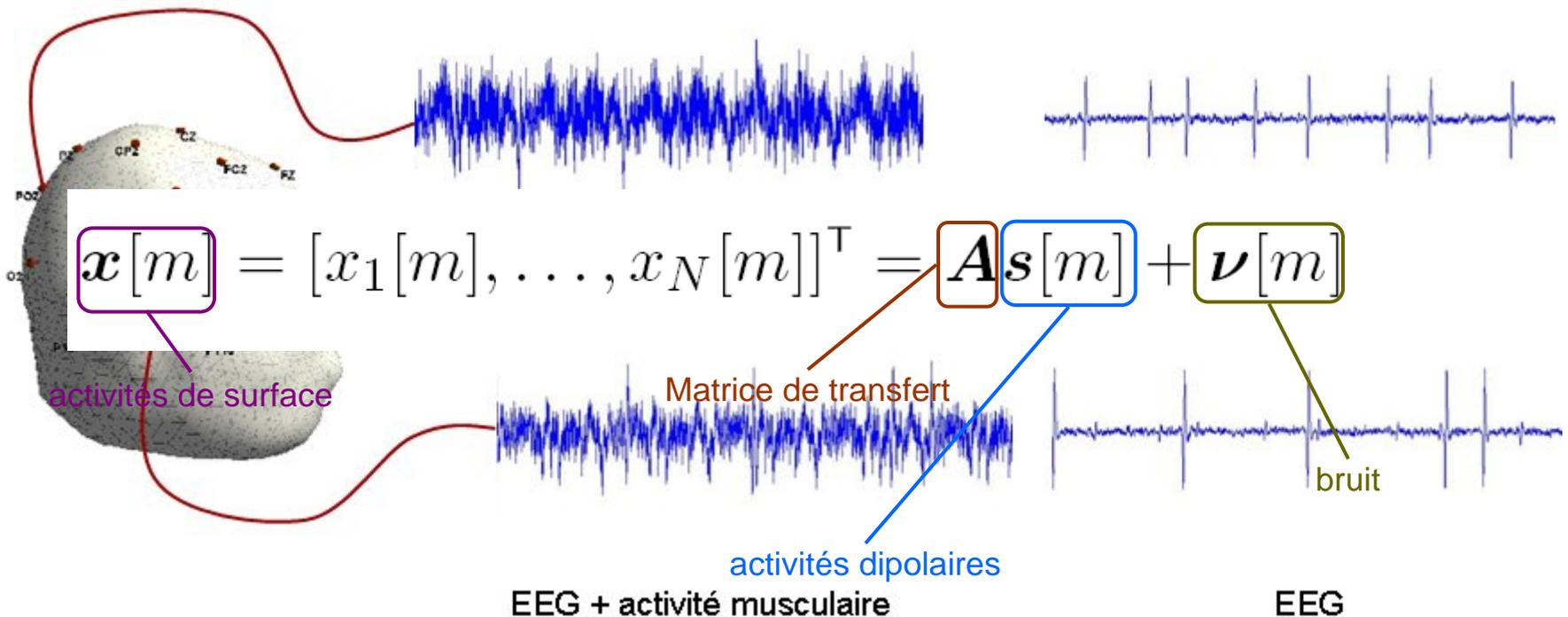
- I. Applications, signaux et méthodes
 1. Modalités d'acquisitions
 2. Problèmes applicatifs
 3. Méthodes de séparation de sources
- II. Interfaces cerveau-machine
 1. Problématique
 2. Données exploitées
 3. Etude proposée
- III. Epilepsies pharmacorésistantes
 1. Quelques outils
 2. Localisation de réseaux épileptogènes
 3. Débruitage d'activités épileptiques

Débruitage de l'activité épileptique de surface



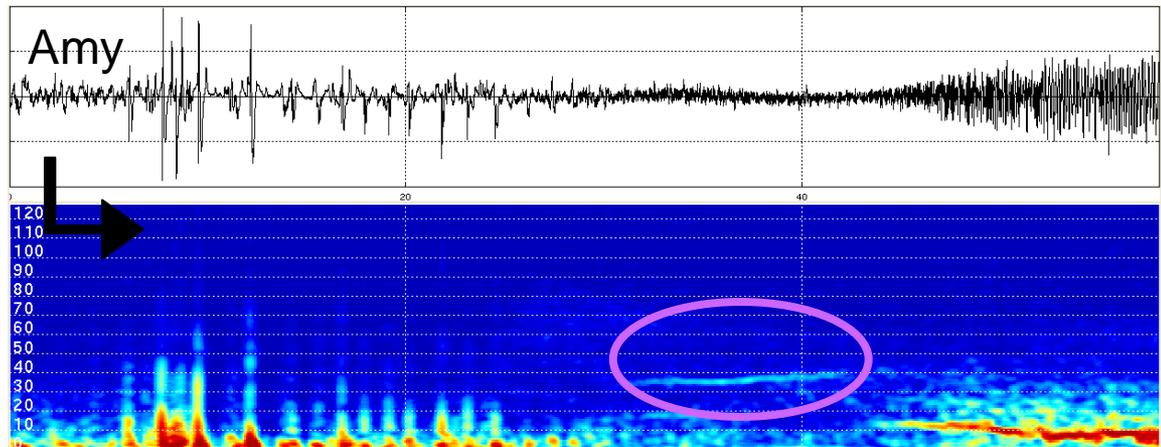
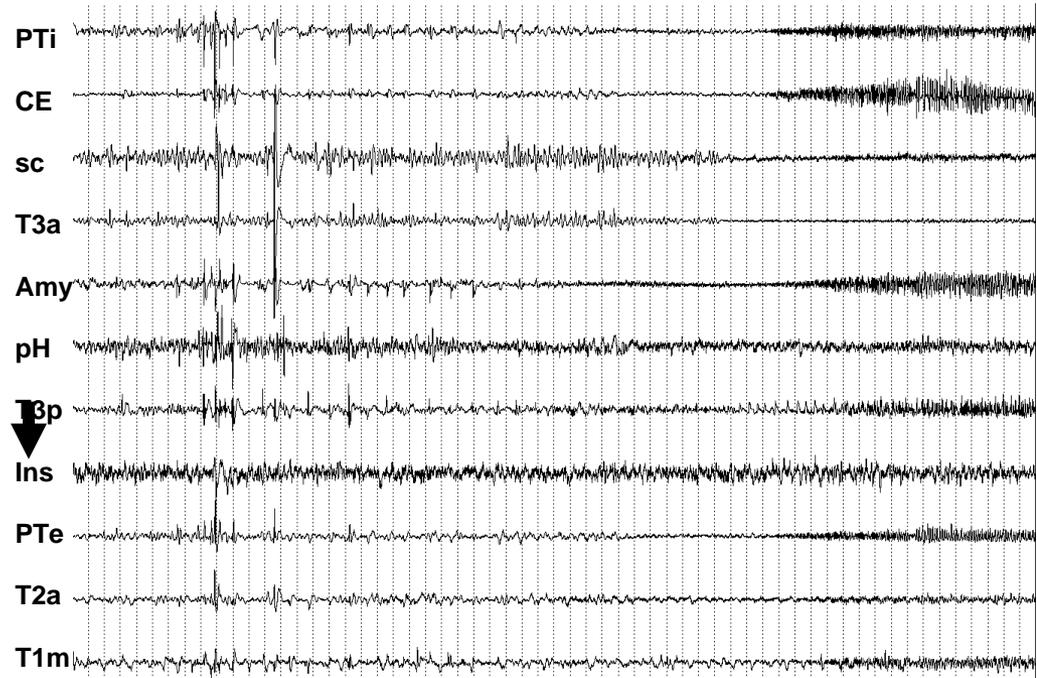
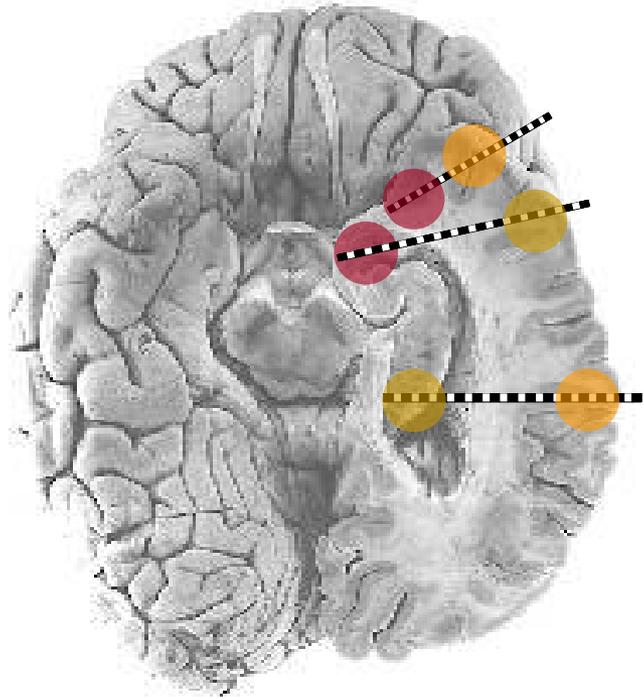
- **Objectif** : éliminer les artefacts présents au sein de l'activité électrique épileptique de surface ;
- **Difficultés** : problème mal posé, faible SNR, etc.

Débruitage de l'activité épileptique de surface



- **Objectif** : éliminer les artefacts présents au sein de l'activité électrique épileptique de surface ;
- **Difficultés** : problème mal posé, faible SNR, etc.

Intérêt en épilepsie du débruitage



La méthode $2q$ -CANDHAP ($q \geq 2$)

- **Indépendance** au sens large à l'ordre $2q$ ($q \geq 2$) des P **sources** électriques reçues sur le réseau d'électrodes.
 - **Cumulants marginaux** d'ordre $2q$ ($q \geq 1$) des sources de **même signe**.
- ➔ **Identification du mélange par** décomposition canonique sous contrainte d'hermitianité et de semi-défini positivité du tableau cumulant d'ordre supérieur considéré ;

$$\mathbf{C}_{q,x}^q = (\mathbf{A}, \dots, \mathbf{A}, \mathbf{A}^*, \dots, \mathbf{A}^*) \cdot \mathbf{C}_{q,s}^q + \cancel{\mathbf{C}_{q,\nu}^q}$$

- ➔ Se ramener algébriquement à une décomposition canonique d'un tableau d'ordre $q+1$ dont l'une des matrices de facteurs est unitaire ;

La méthode 2q-CANDHAP ($q \geq 2$)

Illustration de l'approche avec le tableau cumulant $\mathcal{C}_{3,x}^3$ d'ordre 6

- **Déplie**ment matriciel du tableau cumulant avec $\Lambda_s = \text{diag}\{\mathcal{C}_{3,s}^3\}$:

$$\mathbf{T} = \text{mat}_1(\mathcal{C}_{3,x}^3) = (\mathbf{A} \odot \mathbf{A} \odot \mathbf{A}^*) \Lambda_s (\mathbf{A} \odot \mathbf{A} \odot \mathbf{A}^*)^H$$

- Calcul d'une **racine carré** du tableau déplié par diagonalisation de \mathbf{T} :

$$\mathbf{T}^{1/2} = \mathbf{E}_s \mathbf{L}_s^{1/2} = (\mathbf{A} \odot \mathbf{A} \odot \mathbf{A}^*) \Lambda_s^{1/2} \mathbf{B}^H$$

matrice unitaire

- **Repli**ement de la matrice $\mathbf{T}^{1/2}$ dans un tableau d'ordre 4 noté \mathcal{T} .

$$\mathbf{T}^{1/2\top} = \text{mat}_2^{(4)}(\mathcal{T}) = \mathbf{B}^* \Lambda_s^{1/2} (\mathbf{A} \odot \mathbf{A} \odot \mathbf{A}^*)^\top$$

La méthode $2q$ -CANDHAP ($q \geq 2$)

- Calcul de la décomposition canonique $\mathcal{T} = (\mathbf{A}, \mathbf{A}, \mathbf{A}^*, \mathbf{B}^*) \cdot \mathbf{C}_{3,s}^{3 \times 1/2}$ du tableau \mathcal{T} d'ordre 4 sous contrainte d'unitarité de la matrice \mathbf{B} .

➔ **Alternance** jusqu'à convergence entre deux procédures d'optimisation visant :

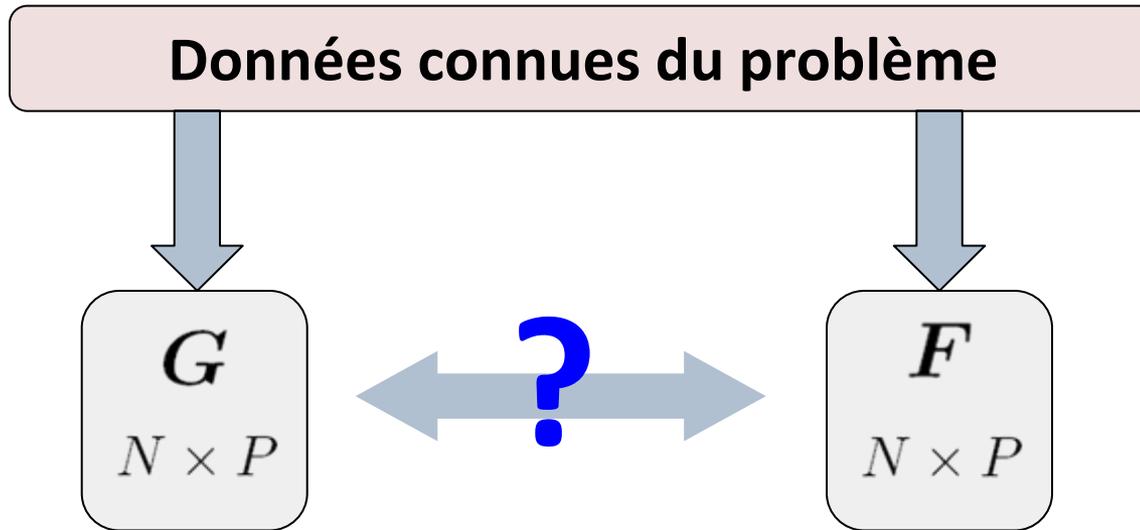
➔ pour la première, à identifier la matrice \mathbf{B} à partir de l'équation suivante

$$\mathbf{T}^{1/2} = (\mathbf{A} \odot \mathbf{A} \odot \mathbf{A}^*) \mathbf{\Lambda}_s^{1/2} \mathbf{B}^H \quad (= \text{mat}_2^{(4)}(\mathcal{T})^T)$$

où la matrice $(\mathbf{A} \odot \mathbf{A} \odot \mathbf{A}^*) \mathbf{\Lambda}_s^{1/2}$ est supposée connue ;

➔ pour la seconde, à identifier la matrice $(\mathbf{A} \odot \mathbf{A} \odot \mathbf{A}^*) \mathbf{\Lambda}_s^{1/2}$ à partir des P colonnes de la matrice $\mathbf{T}^{1/2} \mathbf{B}$.

La méthode 2q-CANDHAP ($q \geq 2$)

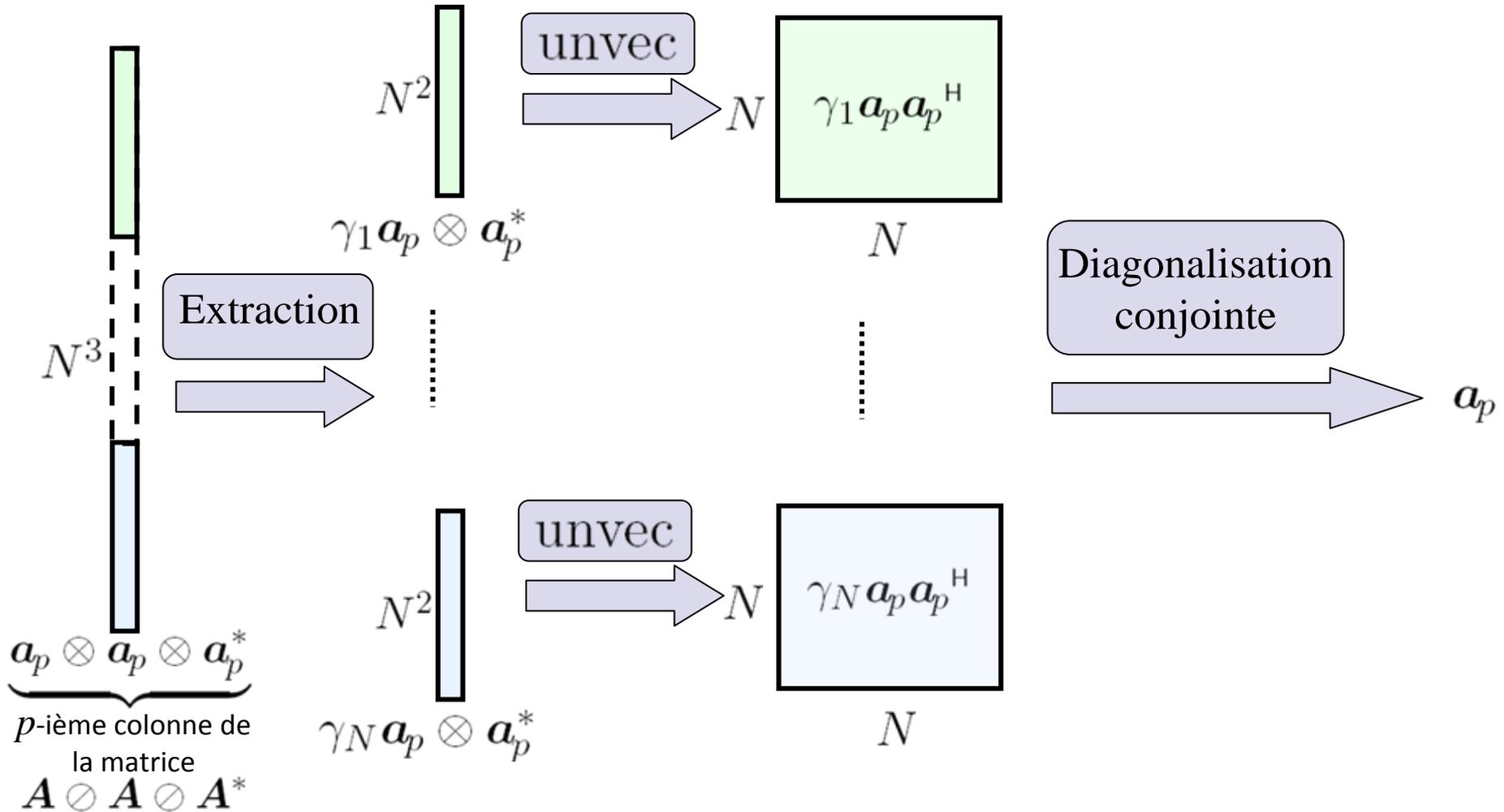


Recherche d'une transformation unitaire B telle que $G = FB^H$

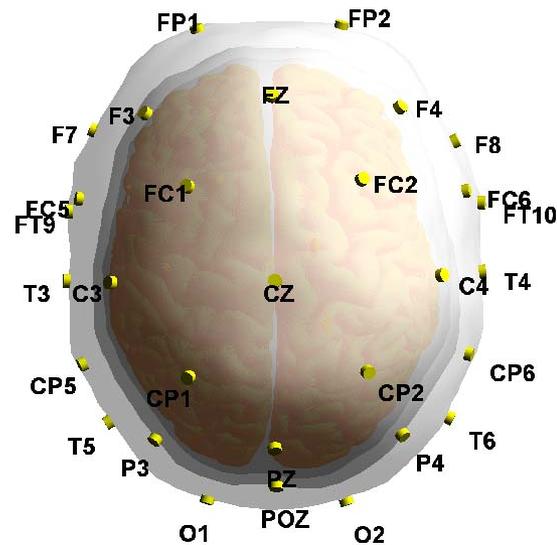
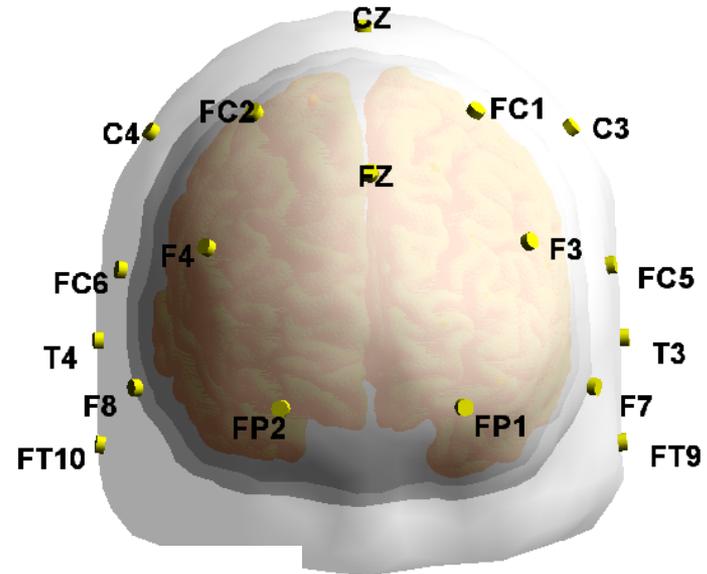
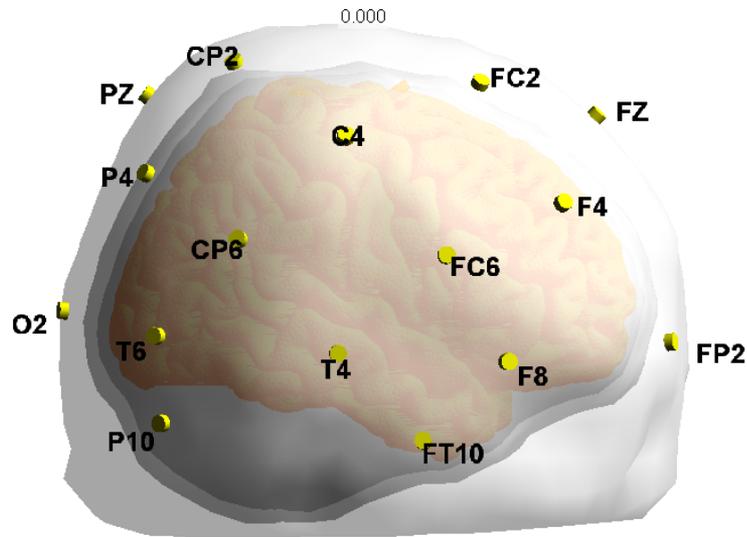
Solution : $B = \underset{U_{\text{unitaire}}}{\operatorname{argmin}} \|G - FU^H\|_F^2 = V_2 V_1^H$ où

- V_1 est la matrice des vecteurs singuliers de gauche de $F^H G$
- V_2 est la matrice des vecteurs singuliers de droite de $F^H G$

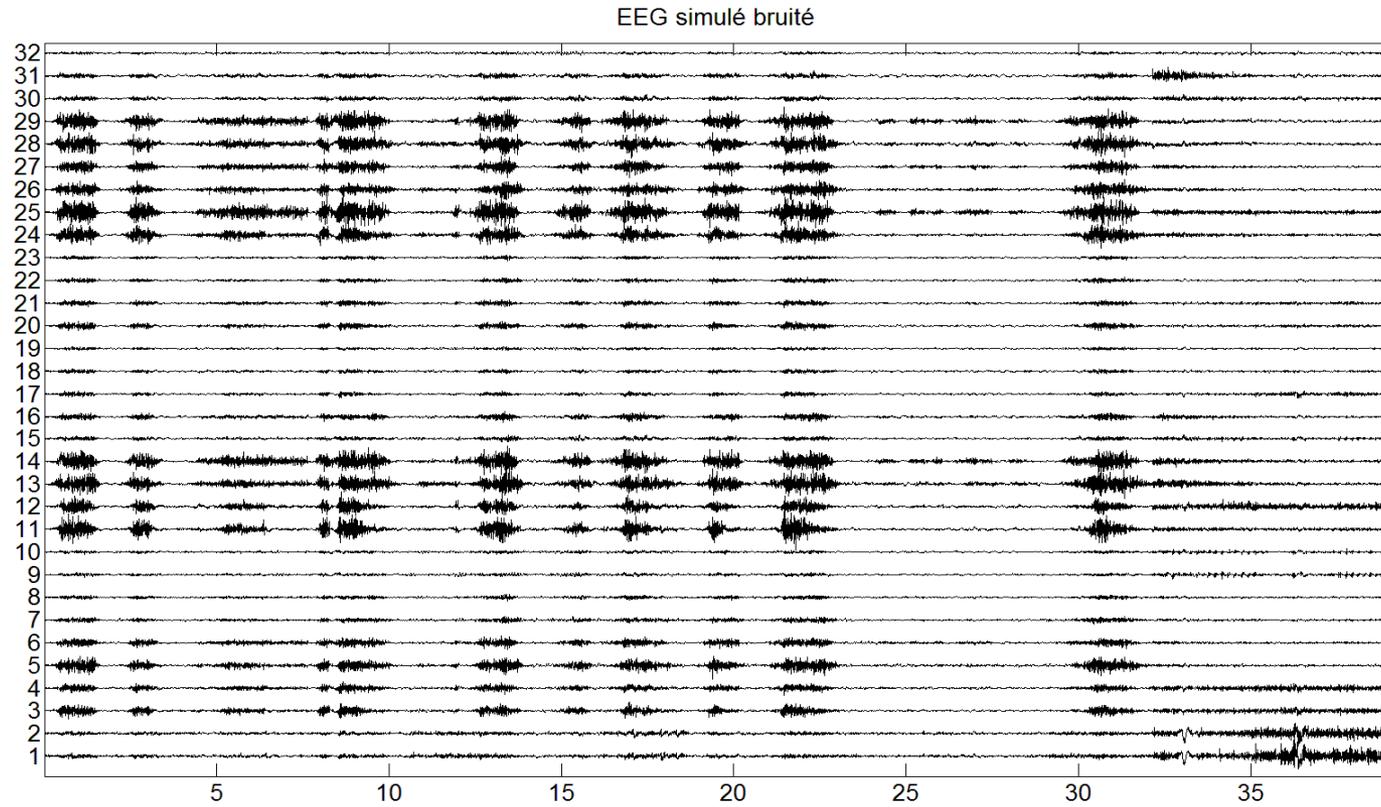
La méthode 2q-CANDHAP ($q \geq 2$)



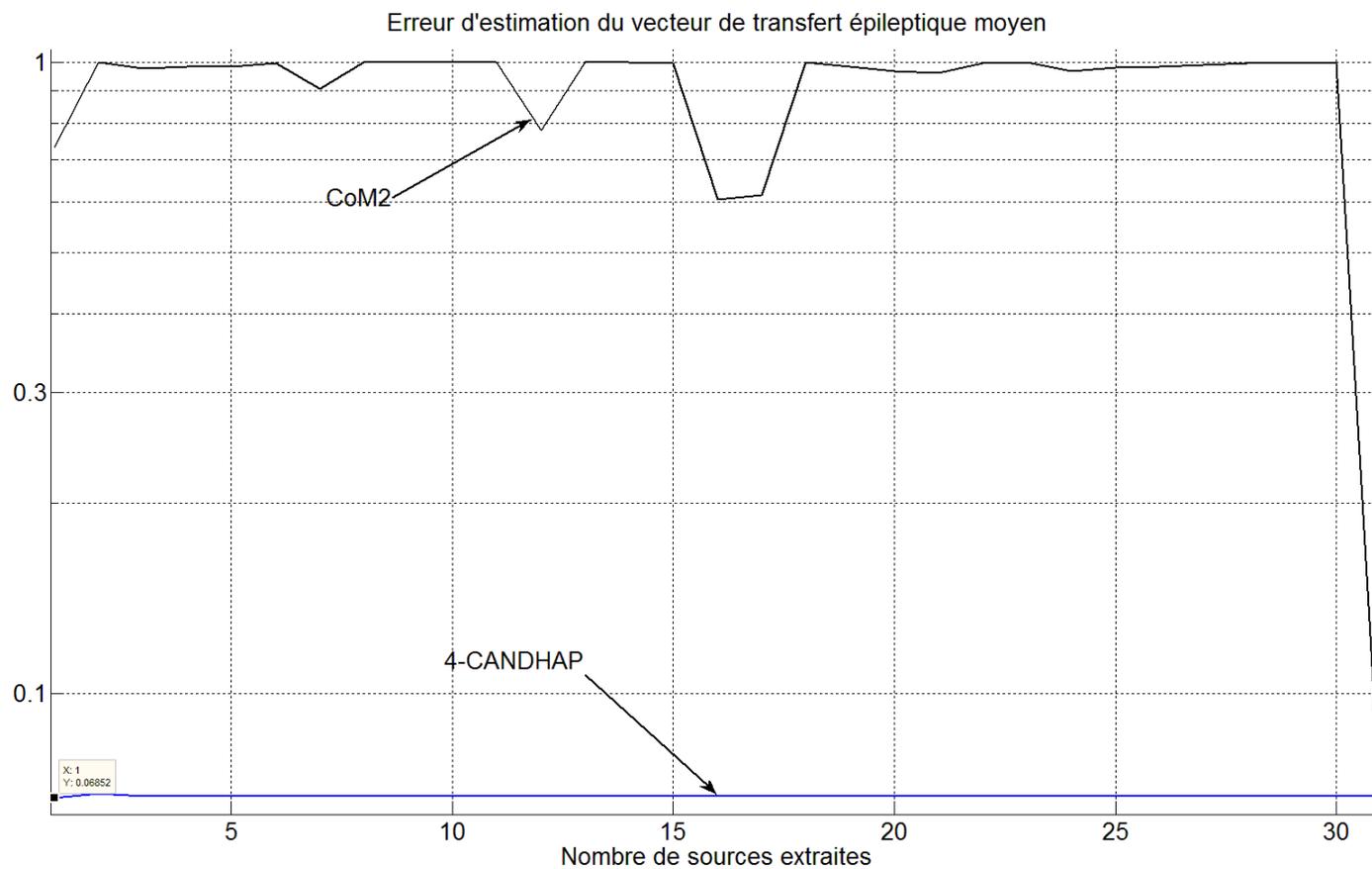
Disposition des 32 électrodes EEG



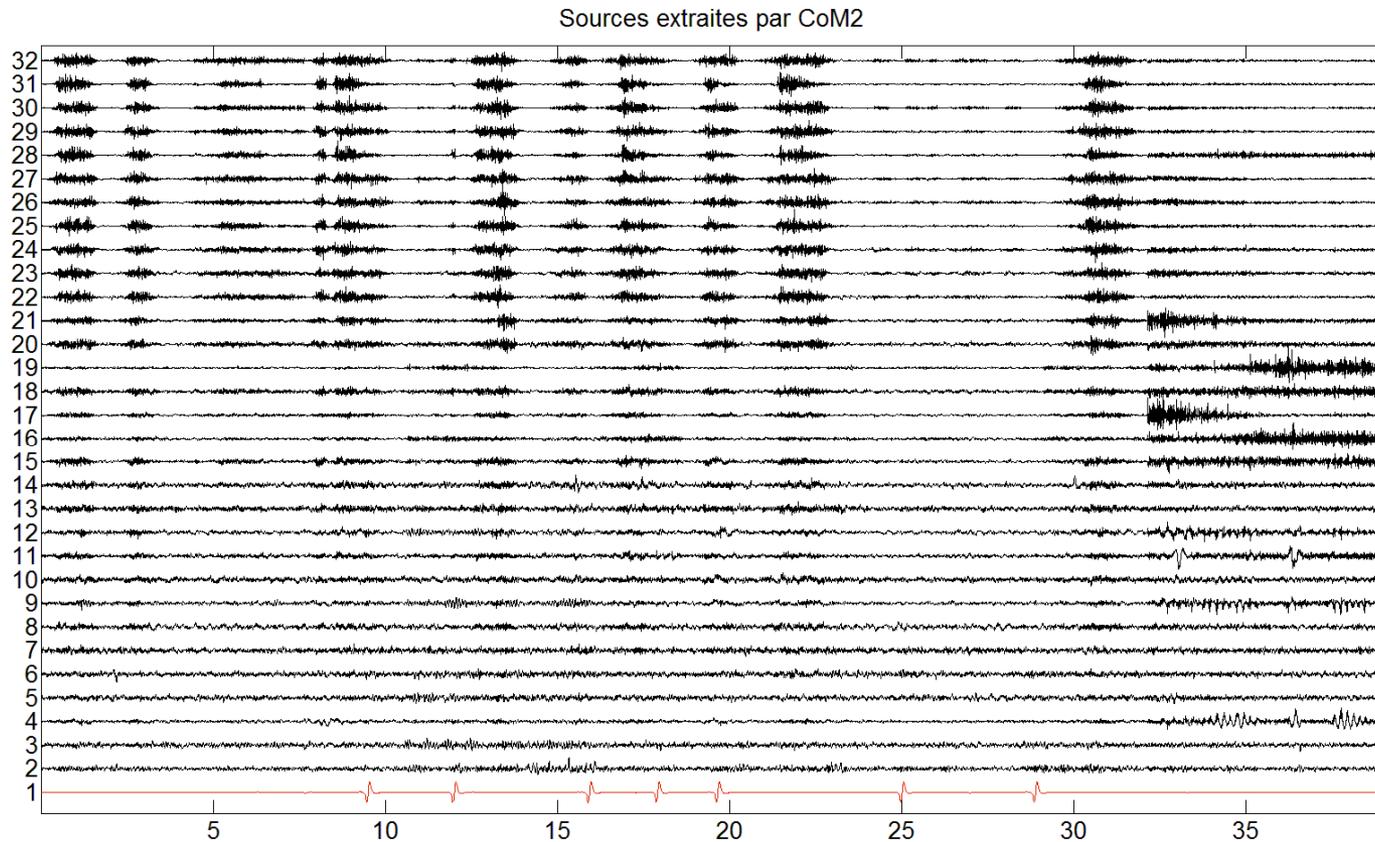
Signaux EEG simulés



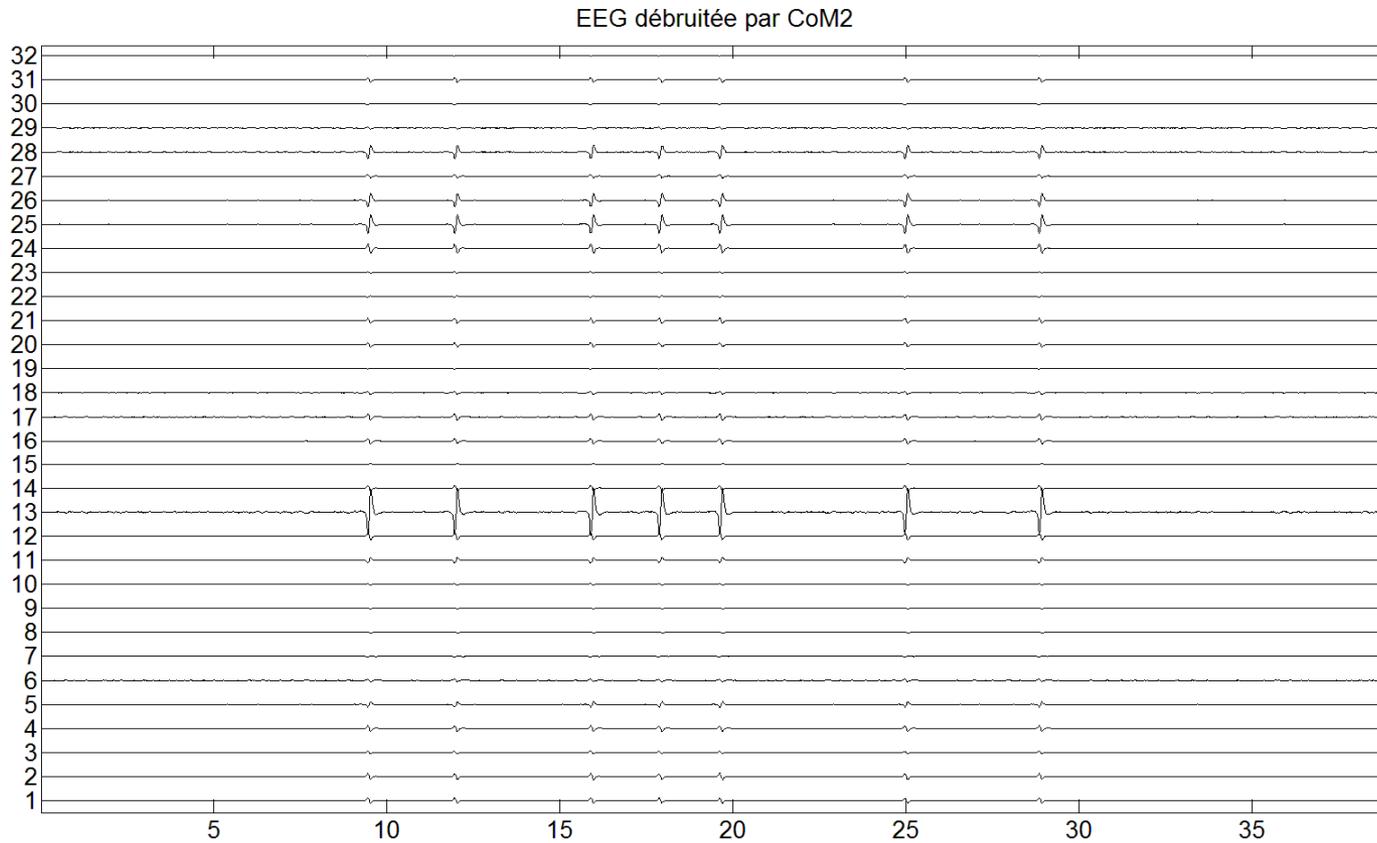
Performance en fonction du nombre de sources extraites



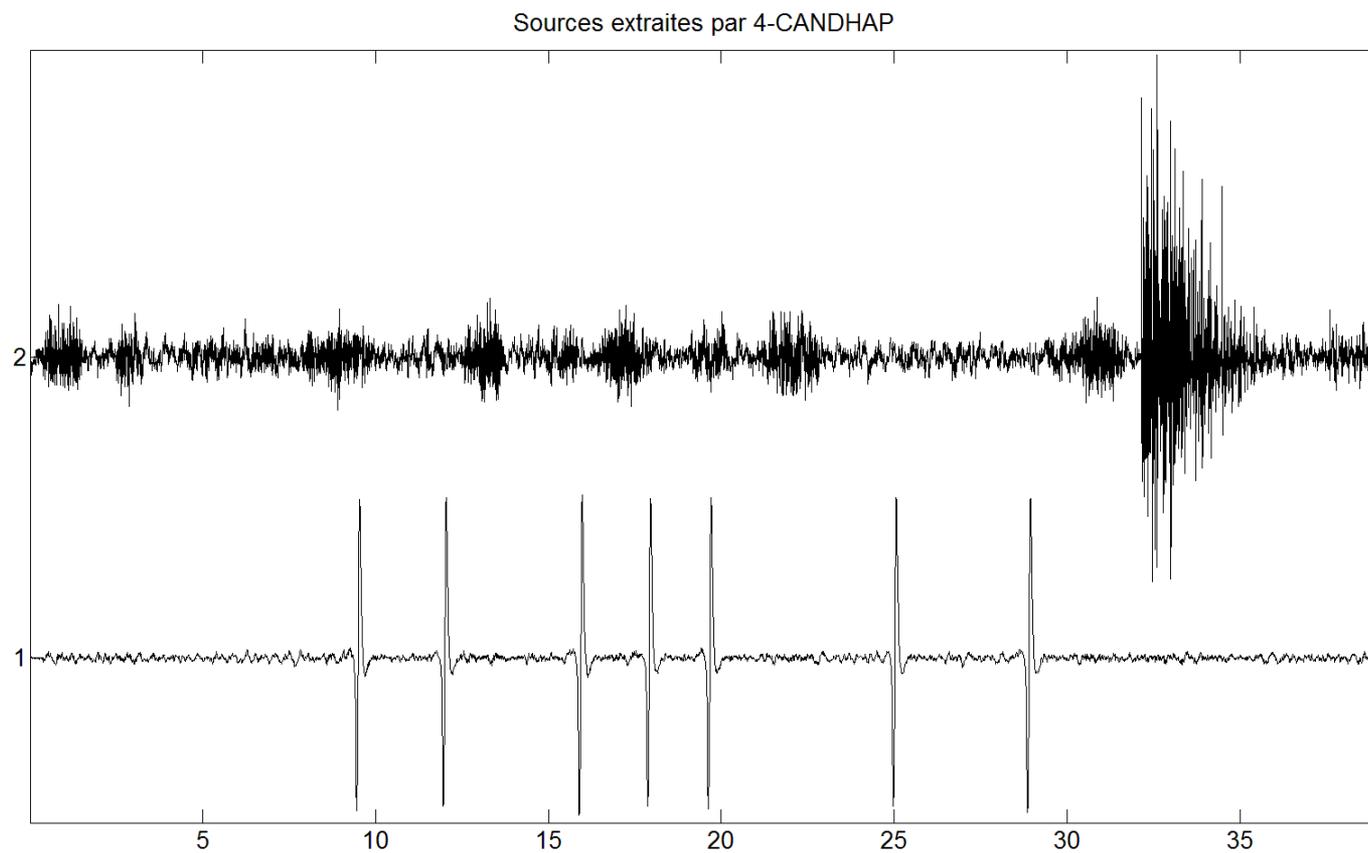
Sources en sortie de CoM2



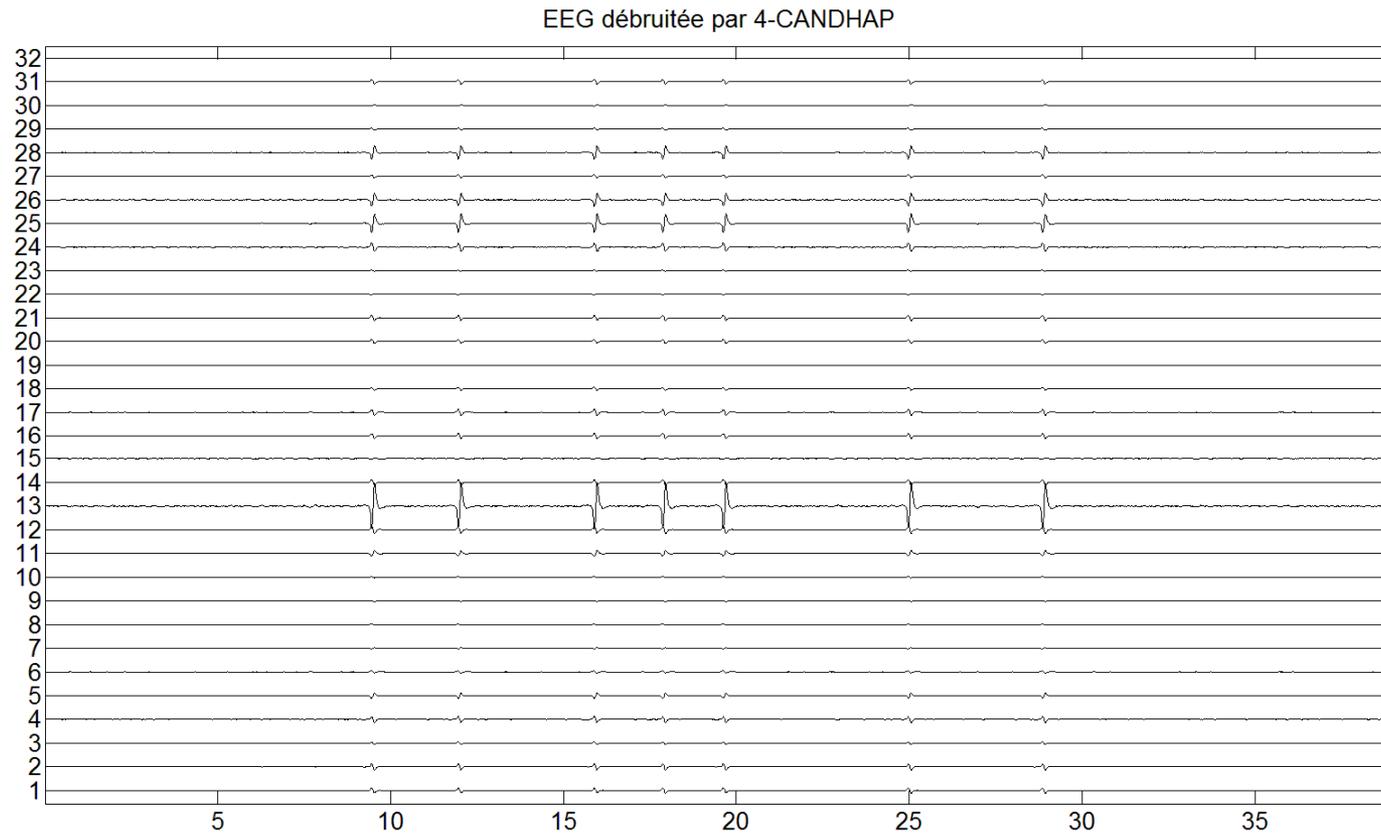
Débruitage à l'aide de CoM2



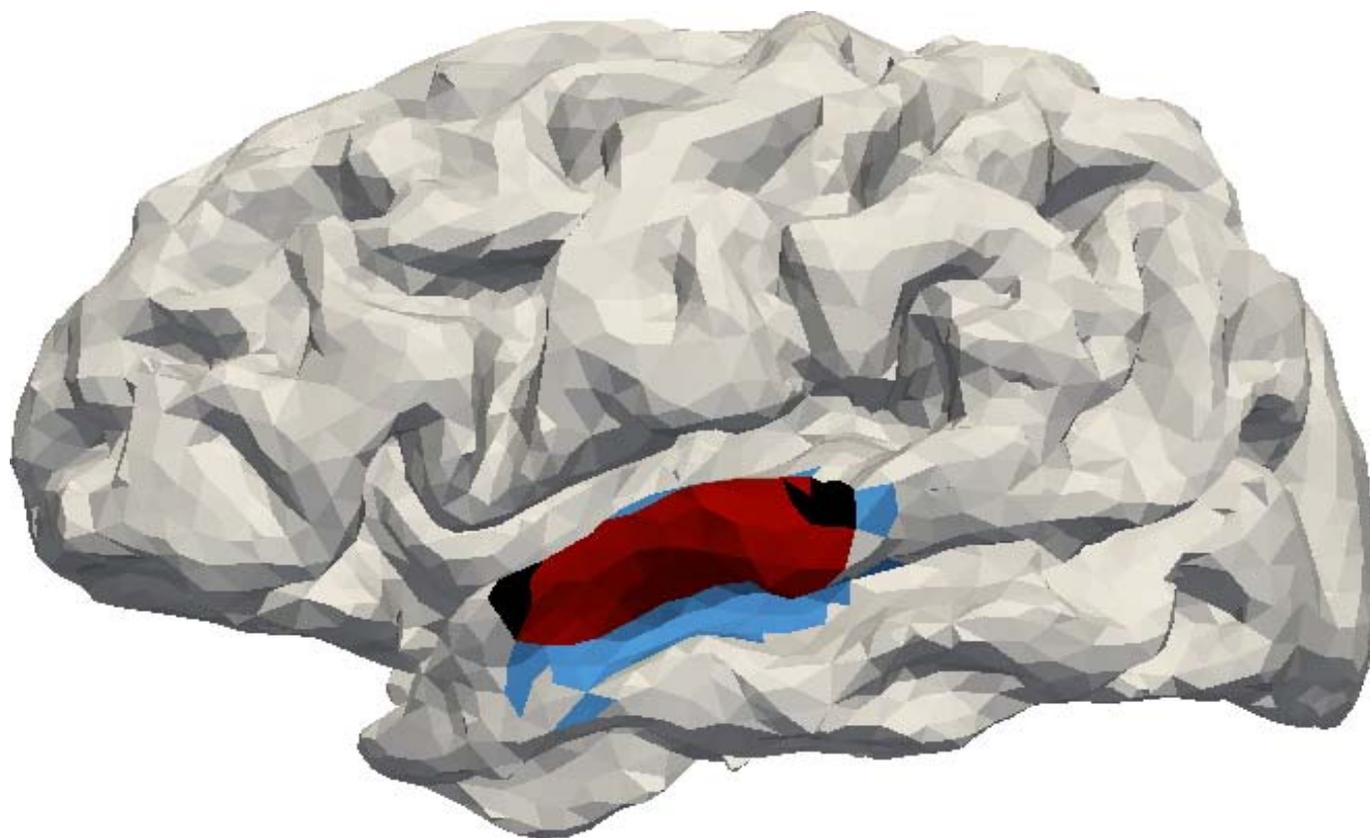
Sources en sortie de 4-CANDHAP



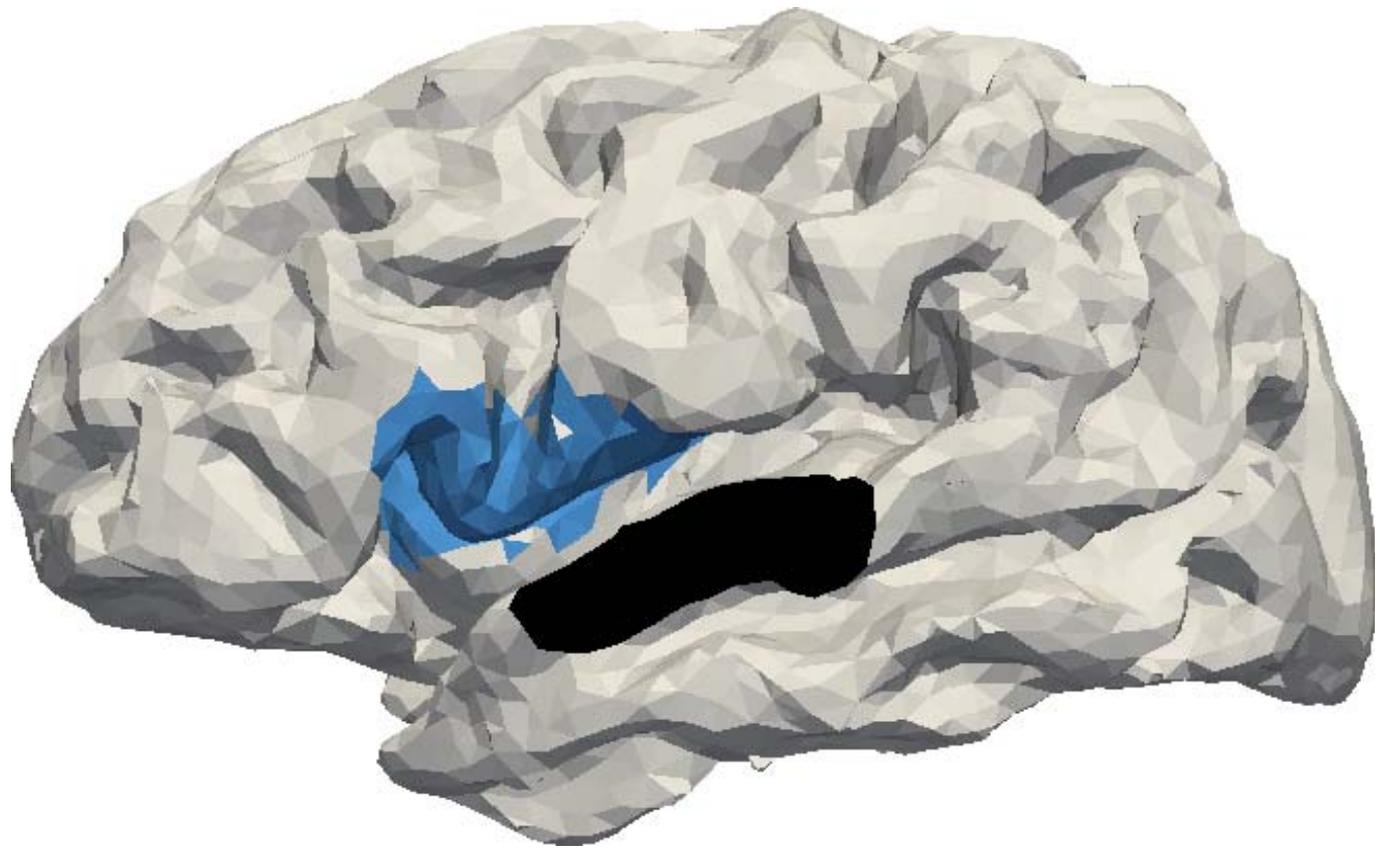
Débruitage à l'aide de 4-CANDHAP



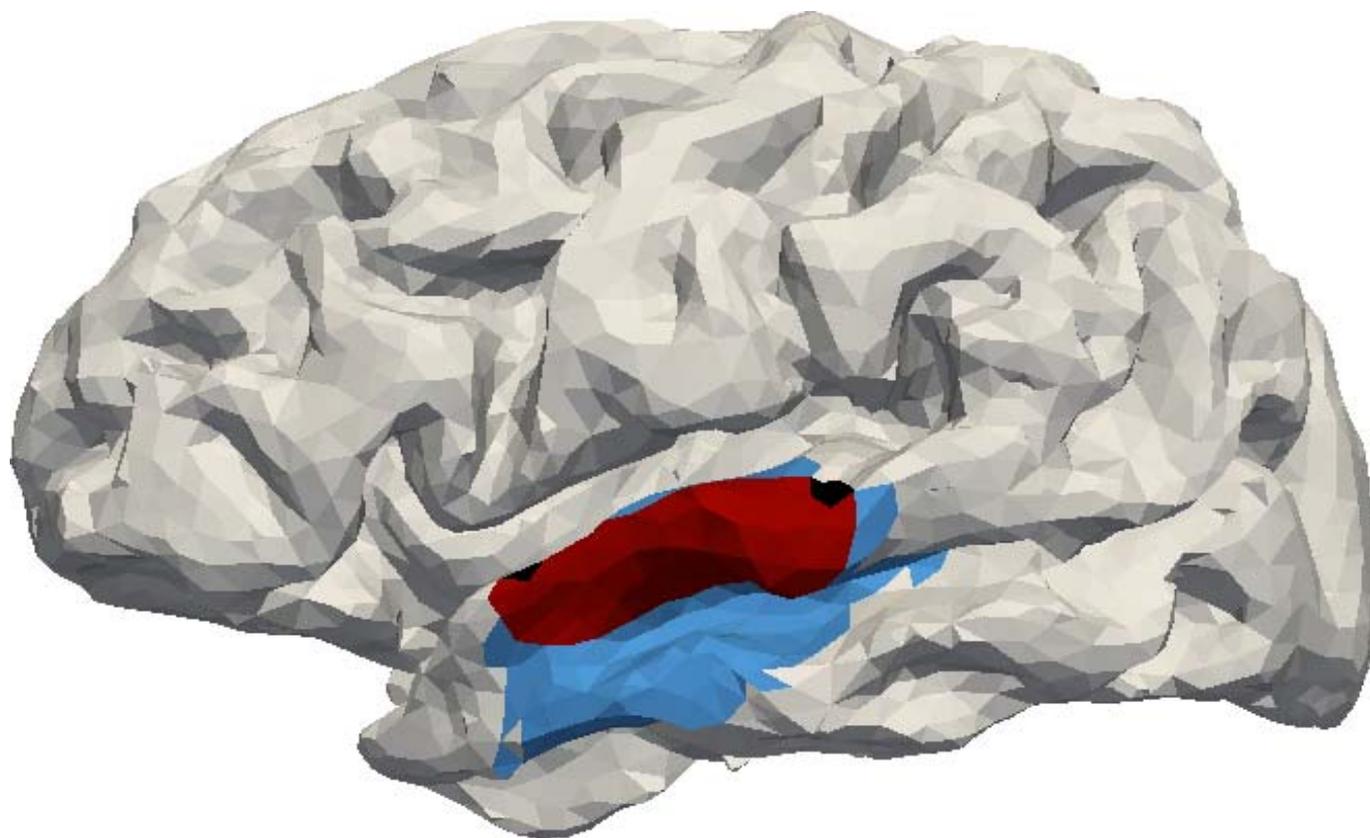
Données simulées non bruitées



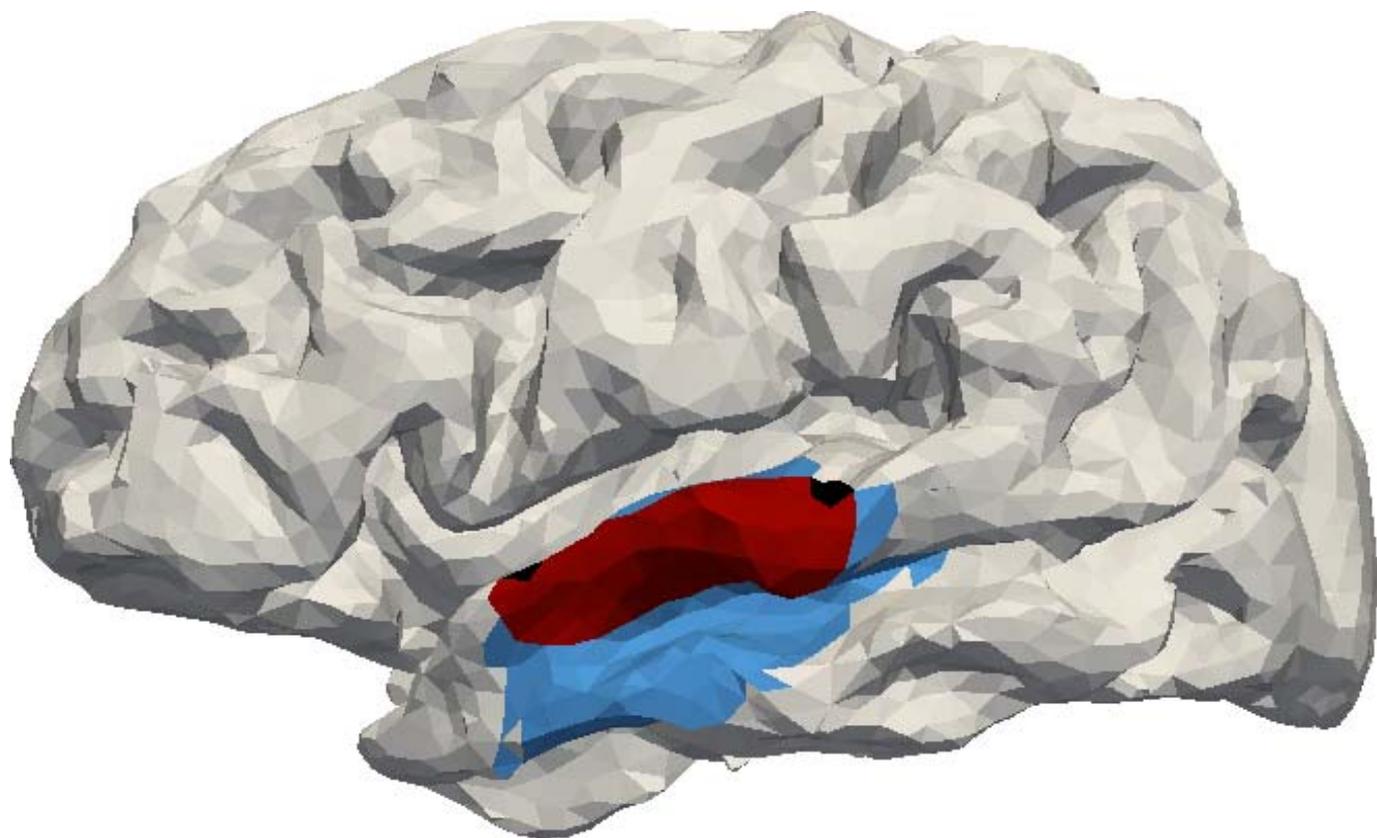
Données simulées bruitées



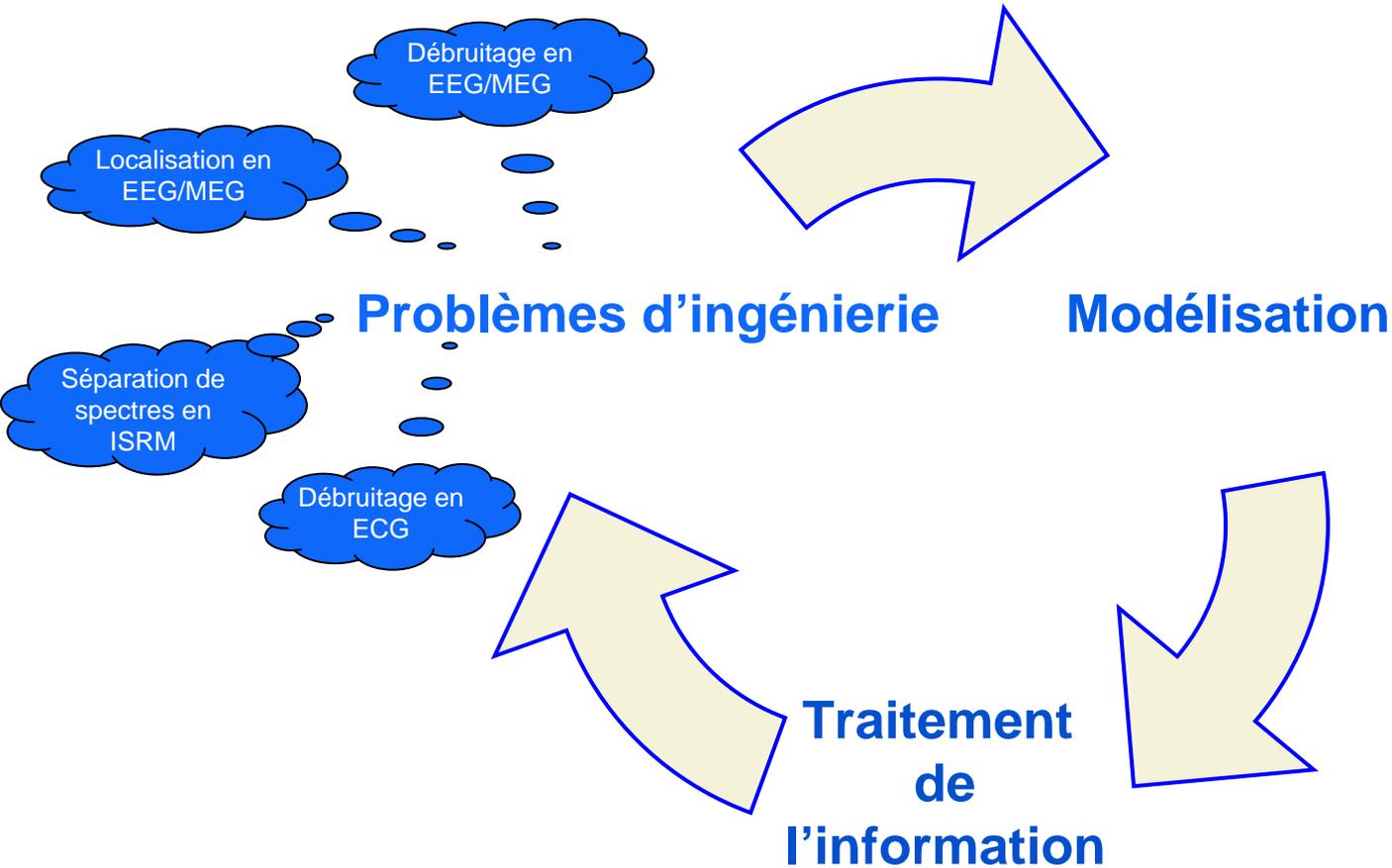
Données simulées débruitées par CoM2



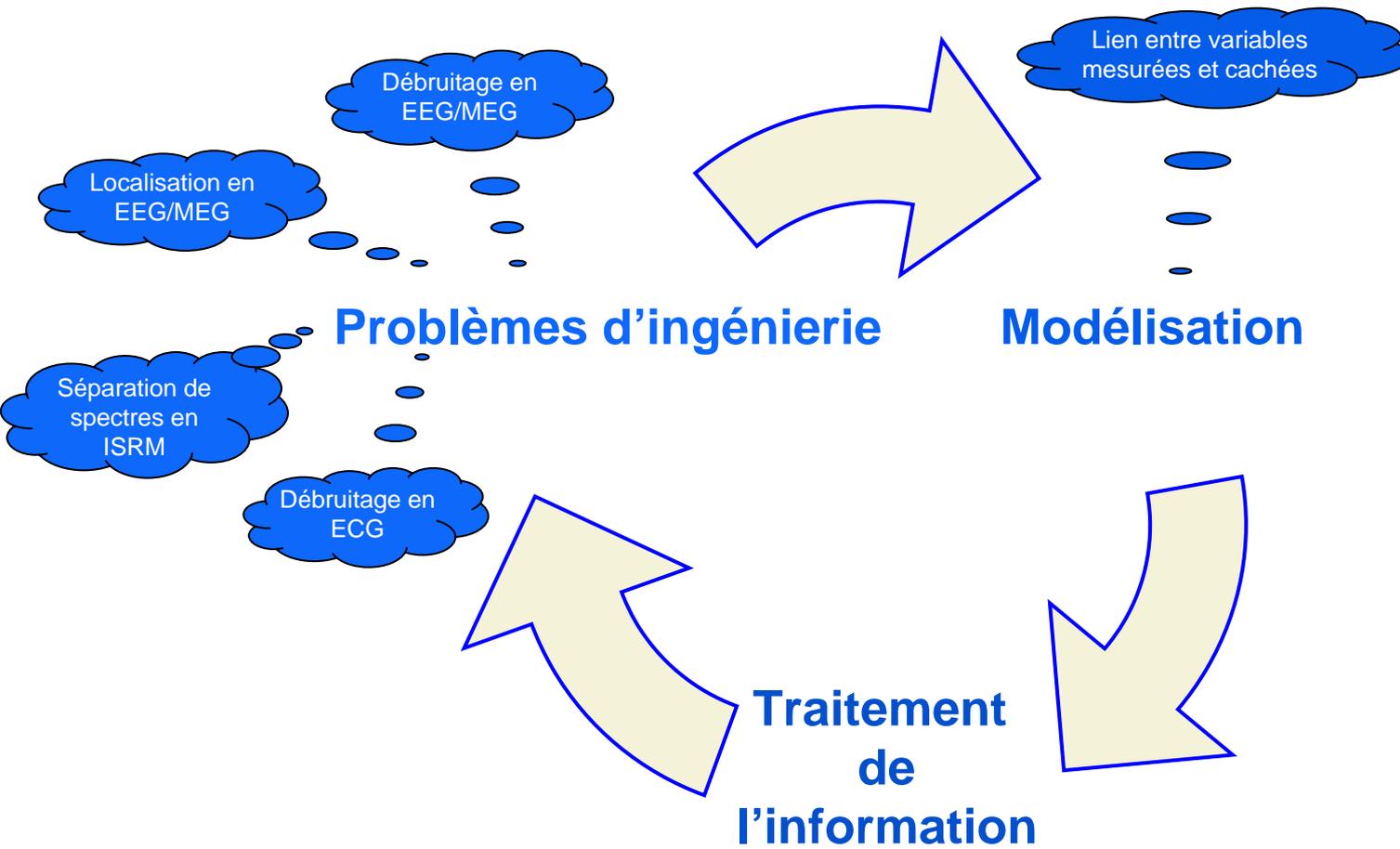
Données simulées débruitées par 4-CANDHAP



Conclusions et perspectives



Conclusions et perspectives



Conclusions et perspectives

Problèmes d'ingénierie

Modélisation

**Traitement
de
l'information**

Lien entre variables
mesurées et cachées

Recherche des
hypothèses de travail
(indépendance,
positivité, parcimonie,
continuité, etc.)

Vers des tableaux
d'ordre supérieur
dont la décom-
position aurait un
sens physique

Identifiabilité des modèles
(conditions d'unicité des
décompositions étudiées)

Méthodes numériques de
décomposition appropriées
(fonction de coût, contraintes,
méthode d'optimisation)

Débruitage en
EEG/MEG

Localisation en
EEG/MEG

Séparation de
spectres en
ISRM

Débruitage en
ECG

Conclusions et perspectives

Problèmes d'ingénierie

Modélisation

Traitement de l'information

Lien entre variables mesurées et cachées

Recherche des hypothèses de travail (indépendance, positivité, parcimonie, continuité, etc.)

Vers des tableaux d'ordre supérieur dont la décomposition aurait un sens physique

Identifiabilité des modèles (conditions d'unicité des décompositions étudiées)

Méthodes numériques de décomposition appropriées (fonction de coût, contraintes, méthode d'optimisation)

Analyse théorique du comportement des méthodes numériques proposées (étude de sensibilité, de vitesse de convergence, etc.)

Vers des méthodes directes de décomposition

Comparaison aux méthodes du domaine d'application à la fois sur données simulées et réelles ;

Débruitage en EEG/MEG

Localisation en EEG/MEG

Séparation de spectres en ISRM

Débruitage en ECG