

---

# Applications de l'approche inverse en *astronomie*<sup>(\*)</sup>

Éric Thiébaud

(Centre de Recherche Astrophysique de Lyon,  
Université Claude Bernard Lyon 1,  
École Normale Supérieure de Lyon)

Peyresq, juillet 2009

(\*) notamment

---

Approche inverse

# 3 Approche inverse (*in a nutshell*)

- **physique**

- **modèle direct**

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{e}$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

$$\mathbf{y}, \mathbf{e} \in \mathbb{R}^m$$

- statistique des erreurs  $\mathbf{e}$  (bruits, approximations, ...)

- terme d'attache aux données, vraisemblance

$$f_{\text{data}}(\mathbf{x}; \mathbf{y})$$

- mathématiques, physique, bon sens, etc.

- contraintes sur le modèle (espace faisable :  $\mathbf{x} \in \Omega$ )

- **régularisation**  $f_{\text{prior}}(\mathbf{x})$

- résolution d'un problème d'**optimisation sous contraintes**

$$\mathbf{x}^+(\mu) = \arg \max_{\mathbf{x} \in \Omega} f(\mathbf{x}; \mu) \quad \text{avec} \quad f(\mathbf{x}; \mu) = f_{\text{data}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) + \mu f_{\text{prior}}(\mathbf{x})$$

- grande dimension (jusqu'à  $n \sim 10^9$ ) et  $m \leq n$
  - problème non-linéaire
  - non-convexe

# 4 Critère d'adéquation aux données

- approche bayésienne :

$$f_{\text{data}}(\mathbf{x}) = -c_1 \log[\text{pdf}(\mathbf{y}|\mathbf{x})] + c_0$$

- erreurs gaussiennes

$$f_{\text{data}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} [\mathbf{m}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}]^T \cdot \mathbf{C}_{\text{err}}^{-1} \cdot [\mathbf{m}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}]$$

$$\mathbf{C}_{\text{err}} = \langle \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^T \rangle \quad \mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{m}(\mathbf{x})$$

- bruit gaussien, modèle linéaire  $f_{\text{data}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} [\mathbf{H} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{y}]^T \cdot \mathbf{C}_{\text{err}}^{-1} \cdot [\mathbf{H} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{y}]$

- bruit de Poisson  $f_{\text{data}}(\mathbf{x}) = \sum_j [\mathbf{m}_j(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_j \log \mathbf{m}_j(\mathbf{x})]$

$$f_{\text{data}}(\mathbf{x}) = \sum_j \frac{[\mathbf{m}_j(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_j]^2}{\mathbf{y}_j \mathbf{m}_j(\mathbf{x}) + \sigma_j^2} \simeq \sum_j \frac{[\mathbf{m}_j(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_j]^2}{\mathbf{y}_j \max(0, \mathbf{y}_j) + \sigma_j^2}$$

gain

bruit de lecture

(e.g., Mugnier et al., 2004)

- autre..., e.g. interférométrie

---

# Régularisation

# 6

## Déconvolution d'image : équation de formation d'image

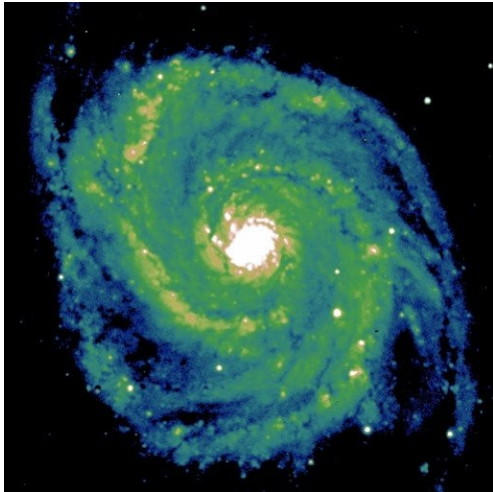
objet

FEP

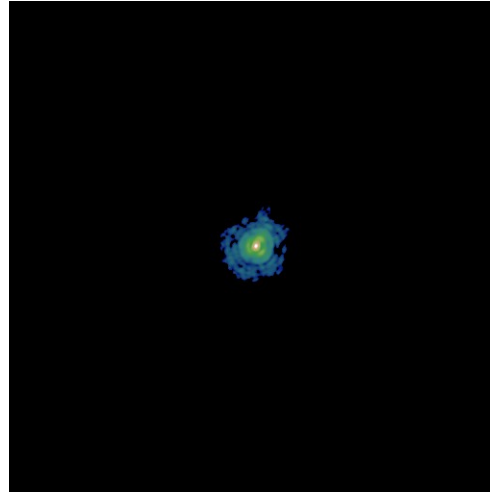
bruit

image observée

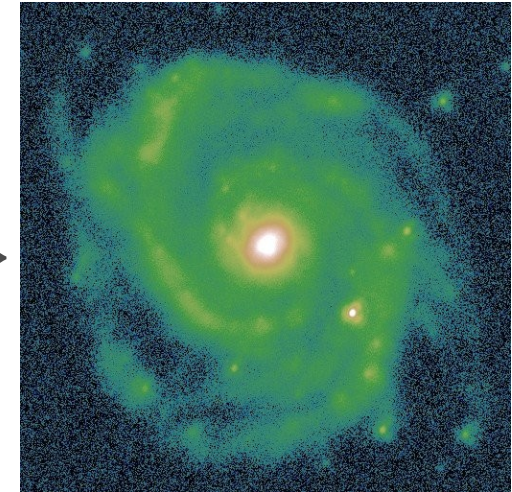
$$\iint x(\omega') h(\omega - \omega') d^2\omega' + e(\omega) = y(\omega)$$



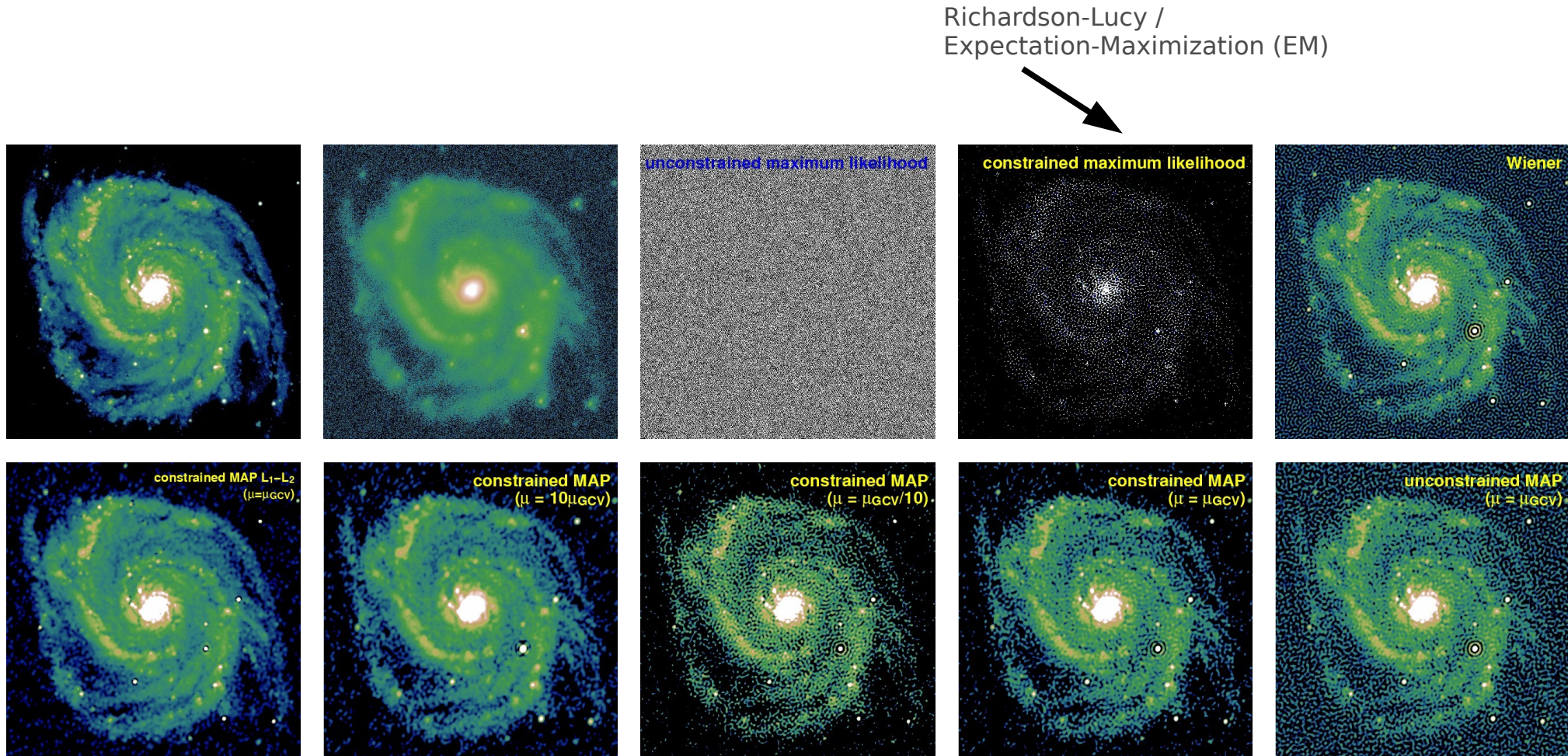
\*



+ bruit →



# 7 Résultats en déconvolution d'image

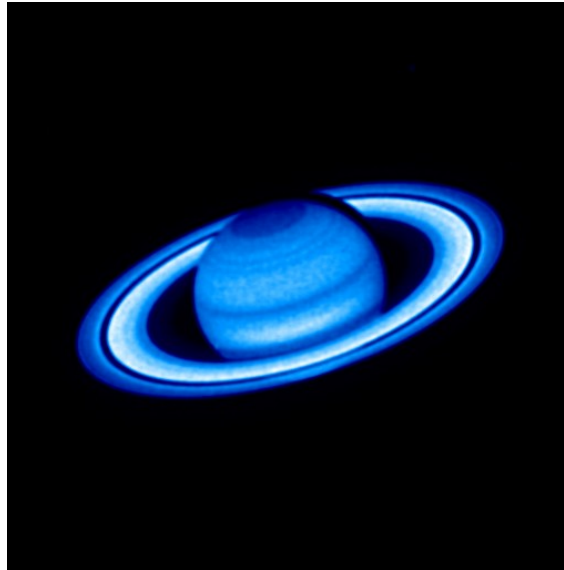


# 8 Image de Saturne par le *Hubble Space Telescope*

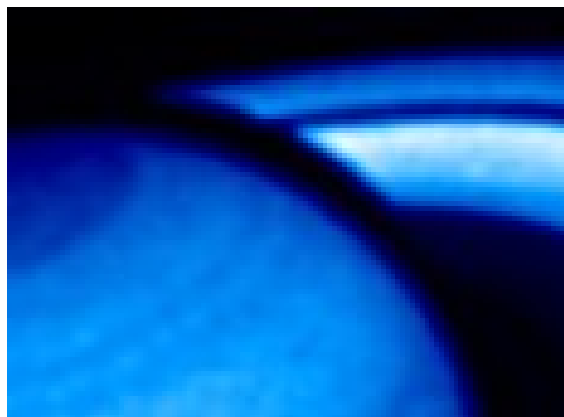
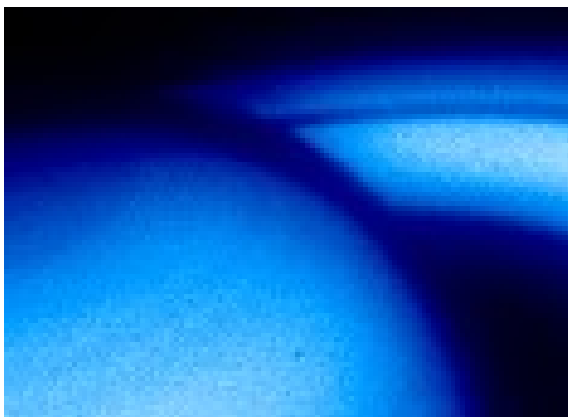
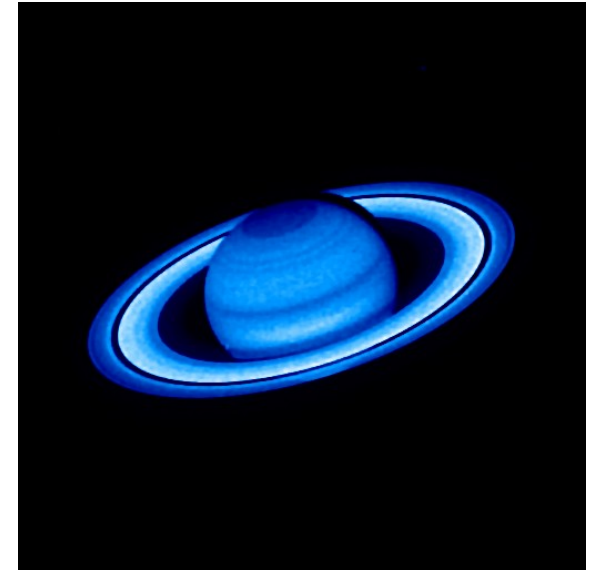
image brute



régularisation quadratique ( $\ell_2$ )

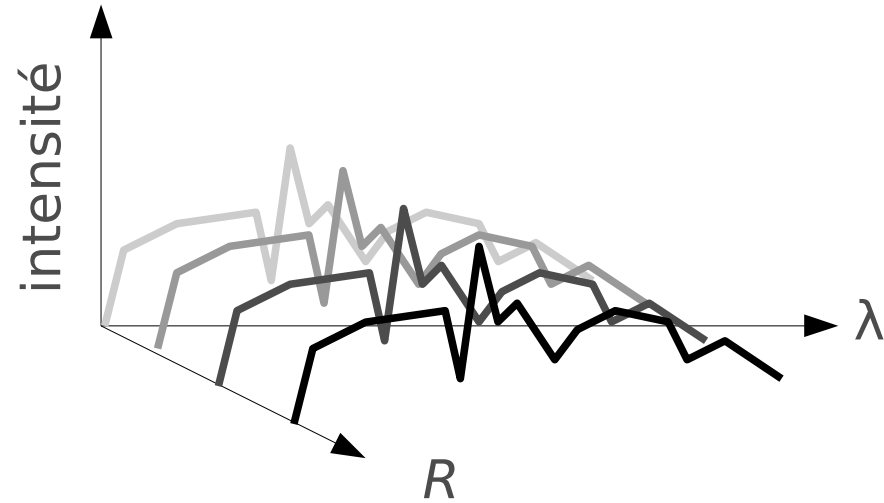
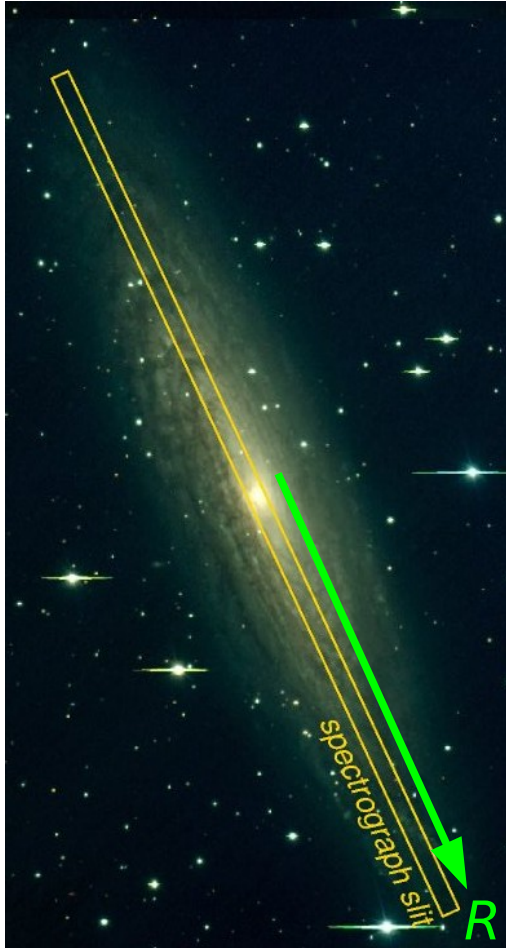


régularisation  $\ell_2$ - $\ell_1$

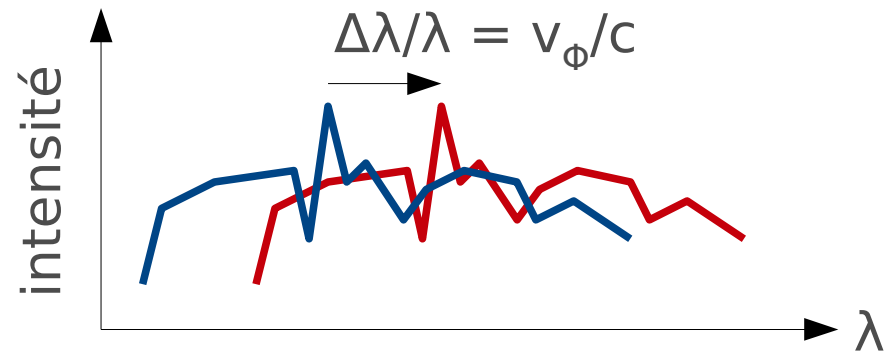




# 9 Spectroscopie longue fente ( $x, \lambda$ )



effet Doppler  $\rightarrow$  vitesse projetée



# 10

## Dynamique dans un disque galactique mince



**observables** : LOSVD's

→ distribution des vitesses (cinématique)

$$F_{\phi}(R, v_{\phi})$$

**inconnues** : distribution des orbites

$$f(\epsilon, R, v_{\phi})$$

physique → **modèle direct**

$$F_{\phi}(R, v_{\phi}) = \sqrt{2} \int_{\frac{1}{2} v_{\phi}^2 - \psi(R)}^0 \frac{f(\epsilon, R, v_{\phi})}{\sqrt{\epsilon + \psi(R) - \frac{1}{2} v_{\phi}^2}} d\epsilon$$

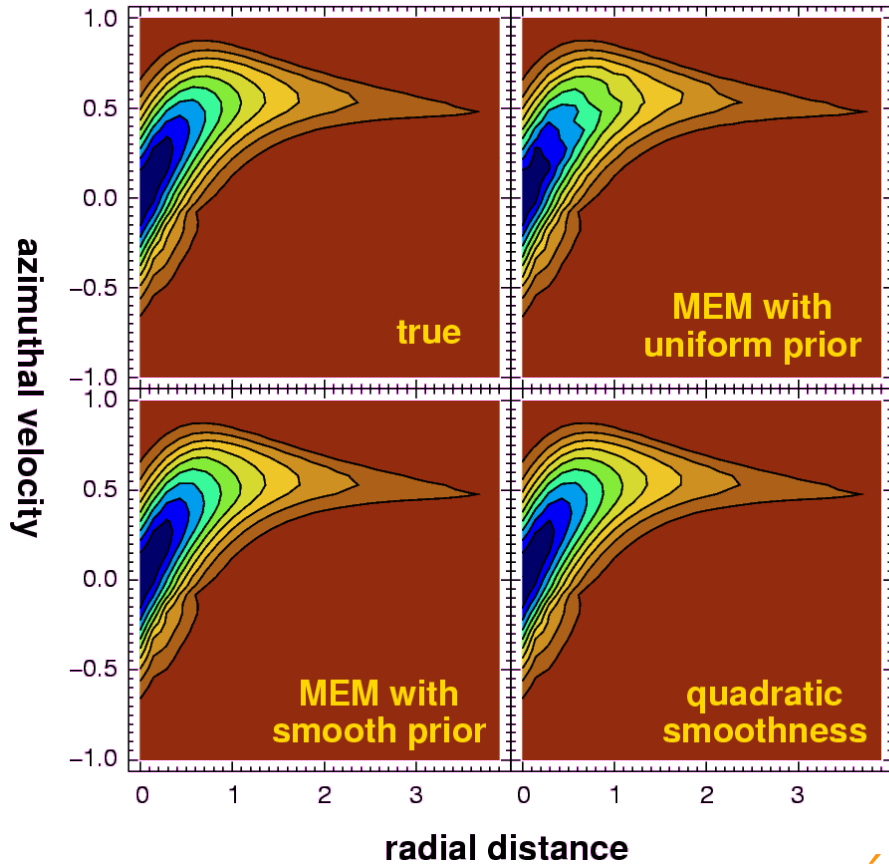
**hypothèses** :

- disque mince (équation d'Abel)
- cinématique du gaz HI
- potentiel gravitationnel

$$\psi(R)$$

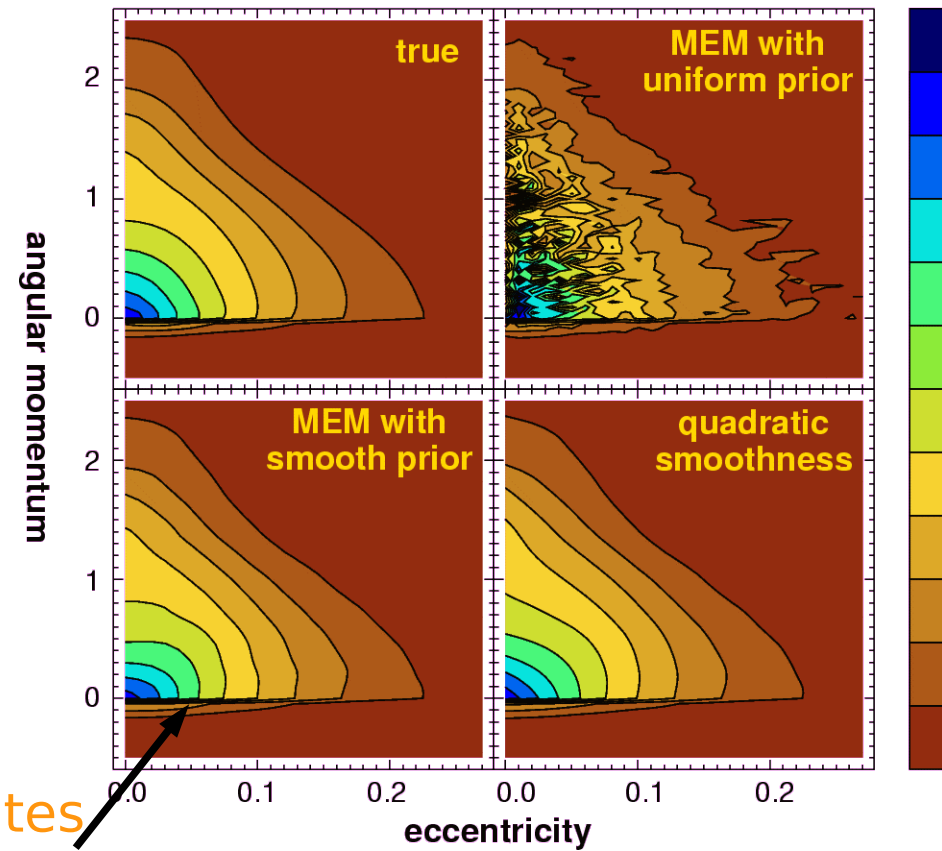
# 11 Inversion de l'équation d'Abel

**Observable Distribution Function**



**observables :**  $F_{\phi}(R, v_{\phi})$

**Orbit Distributions**



orbites  
rétrogrades

**paramètres :**  $f(\epsilon, R, v_{\phi})$

---

# Déconvolution aveugle

# 13 Déconvolution myope

solution MAP du problème de **déconvolution myope** :

$$\{\mathbf{x}, \mathbf{h}\}_{\text{MAP}} = \arg \min_{\mathbf{x}, \mathbf{h}} \{f_{\text{data}}(\mathbf{x}, \mathbf{h}) + f_{\text{obj}}(\mathbf{x}) + f_{\text{PSF}}(\mathbf{h})\}$$

avec par exemple (cas Gaussien) :

$$f_{\text{ML}}(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = (\mathbf{y}_{\text{obj}} - \mathbf{h} * \mathbf{x})^T \cdot \mathbf{C}_{\text{obj}}^{-1} \cdot (\mathbf{y}_{\text{obj}} - \mathbf{h} * \mathbf{x}) \\ + (\mathbf{y}_{\text{ref}} - \mathbf{h})^T \cdot \mathbf{C}_{\text{ref}}^{-1} \cdot (\mathbf{y}_{\text{ref}} - \mathbf{h})$$

image de l'objet

image de la référence

$$f_{\text{obj}}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{prior}})^T \cdot \mathbf{C}_{\text{img}}^{-1} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{prior}})$$

$$f_{\text{PSF}}(\mathbf{h}) = (\mathbf{h} - \mathbf{h}_{\text{prior}})^T \cdot \mathbf{C}_{\text{PSF}}^{-1} \cdot (\mathbf{h} - \mathbf{h}_{\text{prior}})$$

$$\mathbf{C}_{\text{ref}} = \langle (\mathbf{y}_{\text{ref}} - \mathbf{h} * \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y}_{\text{ref}} - \mathbf{h} * \mathbf{x})^T \rangle$$

# 14 Déconvolution aveugle

solution MAP du problème de **déconvolution aveugle** :

$$\{\mathbf{x}, \mathbf{h}\}_{\text{MAP}} = \arg \min_{\mathbf{x}, \mathbf{h}} \{f_{\text{data}}(\mathbf{x}, \mathbf{h}) + f_{\text{obj}}(\mathbf{x}) + f_{\text{PSF}}(\mathbf{h})\}$$

avec par exemple (cas Gaussien) :

$$f_{\text{data}}(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = (\mathbf{y}_{\text{obj}} - \mathbf{h} * \mathbf{x})^T \cdot \mathbf{C}_{\text{obj}}^{-1} \cdot (\mathbf{y}_{\text{obj}} - \mathbf{h} * \mathbf{x})$$

$$f_{\text{obj}}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{prior}})^T \cdot \mathbf{C}_{\text{img}}^{-1} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{prior}})$$

$$f_{\text{PSF}}(\mathbf{h}) = (\mathbf{h} - \mathbf{h}_{\text{prior}})^T \cdot \mathbf{C}_{\text{PSF}}^{-1} \cdot (\mathbf{h} - \mathbf{h}_{\text{prior}})$$

$$\mathbf{C}_{\text{obj}} = \langle (\mathbf{y}_{\text{obj}} - \mathbf{h} * \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y}_{\text{obj}} - \mathbf{h} * \mathbf{x})^T \rangle$$

convolution

image de l'objet

régularisations

# 15

## Aveugle, myope ou... parfaitement calibré

- on retrouve les  $\neq$  cas selon que  $C_{\text{ref}}$  est finie, infinie ou nulle :
  - si  $C_{\text{ref}} \approx 0$  alors déconvolution **conventionnelle** (calibrage parfait)
  - si  $C_{\text{ref}} > 0$  finie alors déconvolution **myope**
  - si  $C_{\text{ref}} \rightarrow \infty$  alors déconvolution **aveugle** (pas de calibrage)
- dans le cas de la déconvolution myope / aveugle le problème n'est plus nécessairement convexe
  - optimisation globale (attention aux dégénérescences)
  - bien plus difficile
- le terme d'attache aux données sur la PSF permet de prendre en compte d'autres types de mesures (e.g. résidus d'analyse de surface d'onde, cf. J.-P. Véran)

# 16 Déconvolution aveugle

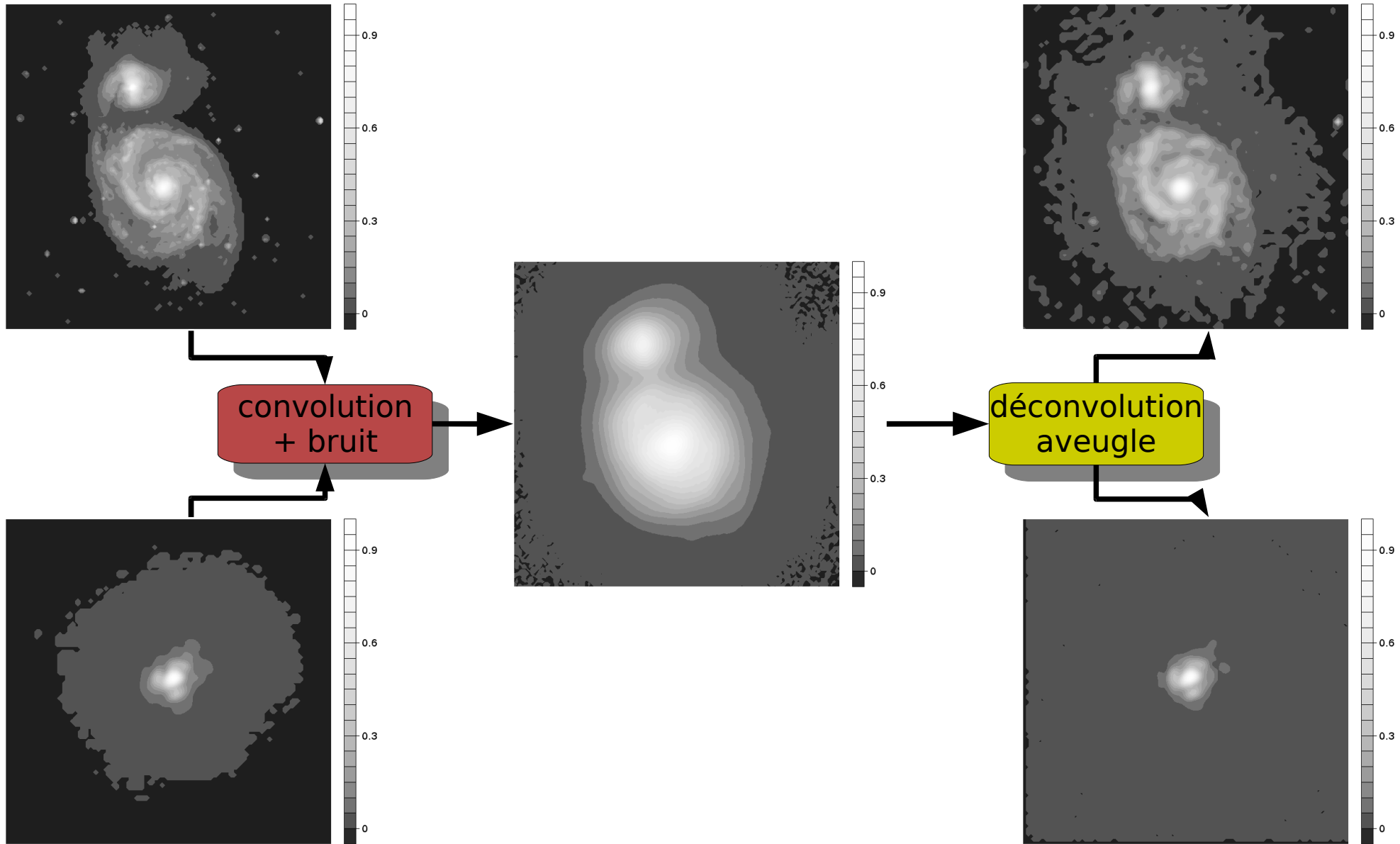
- **contraintes strictes**
  - ***PSF positive et normalisée***

$$h(s) \geq 0 \quad \int h(s) ds = 1$$

- **régularisation**
    - PSF : support compact, en forme de cloche, ...
    - objet : lisse au sens  $\ell_2$  ou  $\ell_2$ - $\ell_1$
  - images astronomiques : objet non-négatif ( $\approx$  contrainte de ***support adaptatif***)
  - autres images : ***positivité inutile*** (ou inapplicable)
  - **optimisation**
    - $h$  et  $x$  en même temps (e.g., méthode du sous-espace)
    - alternée
- ***importance du point de départ***



# 17 La déconvolution aveugle à l'œuvre



# 18 Autocalibrage sur les bords

- **∃ sources de référence dans l'image**
  - points brillants (e.g., étoiles en astronomie)
  - bords francs (dans la direction normale)
- **algorithme (Soulez, 2008) :**
  - **segmentation d'image brutale** suivie d'une déconvolution à objet fixé → 1ère estimation de la PSF
  - minimisation alternée



image originale  
(image sur 8 bits)



flou disque  $R = 7$  pixels  
+ bruit  $\sigma = 1$  niveau



image brute  
segmentée

# 19

## Déconvolution aveugle : estimation de la PSF

Problèmes inverses en astronomie - Éric Thiébaud - Peyresq, 2009



image originale  
(image sur 8 bits)



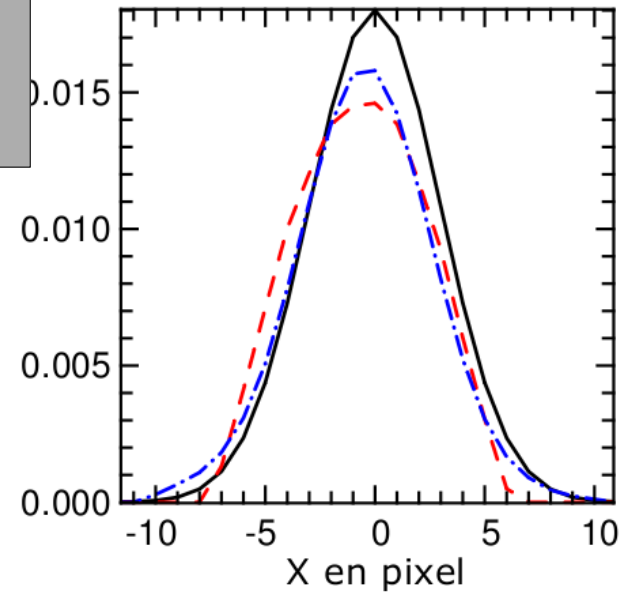
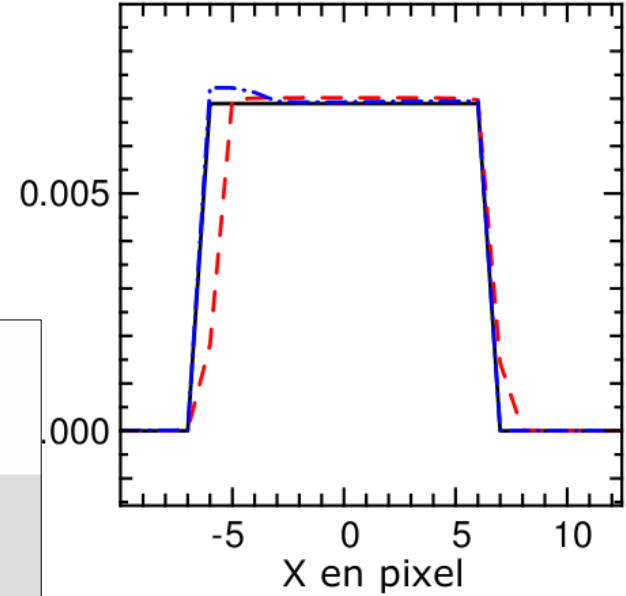
flou disque  $R = 7$  pixels  
+ bruit  $\sigma = 1$  niveau



image brute  
segmentée



flou gaussien  
FWHM = 7 pixels  
+ bruit  $\sigma = 1$  niveau



# 20

## Déconvolution aveugle : estimation de l'objet

- Peyresq, 2009

flou disque  $R = 7$  pixels  
+ bruit  $\sigma = 1$  niveau



objet reconstruit  
(EQM = 25.2 dB)



objet reconstruit à PSF connue  
(EQM = 23.8 dB)



image originale  
(image sur 8 bits)



flou gaussien  
FWHM = 7 pixels  
+ bruit  $\sigma = 1$  niveau



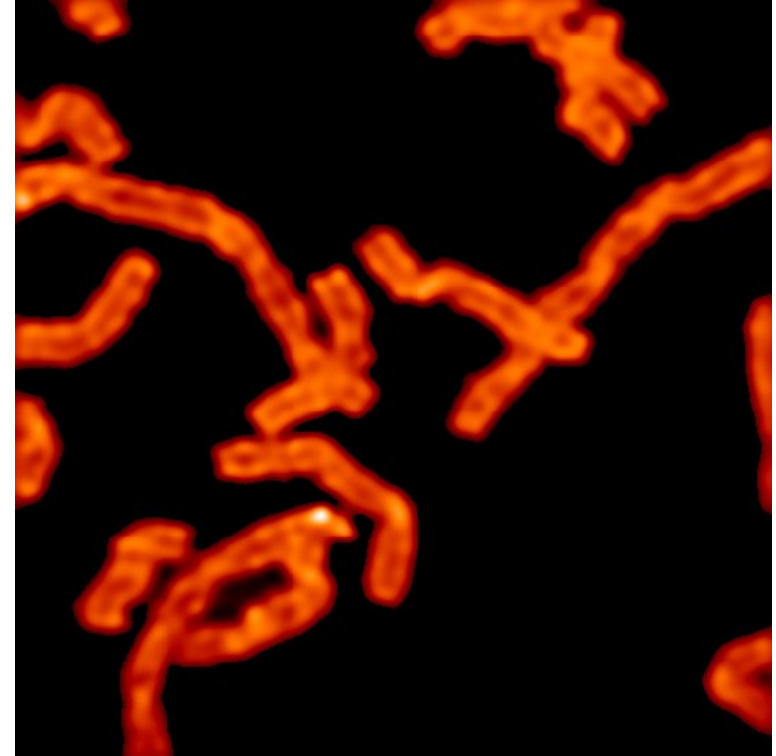
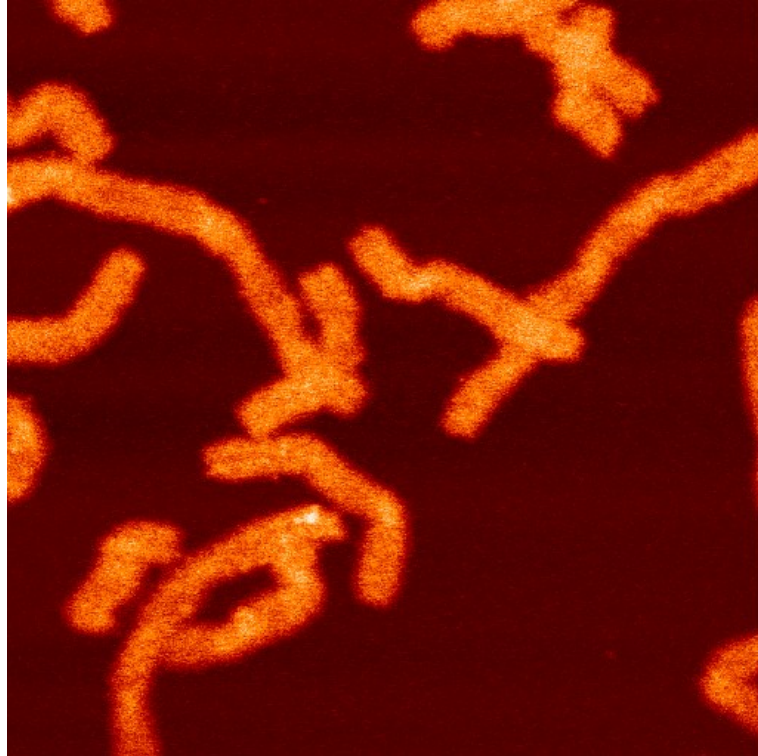
objet reconstruit  
(EQM = 22.5 dB)

Problèmes inverses en

# 21

## Déconvolution aveugle en microscopie confocale

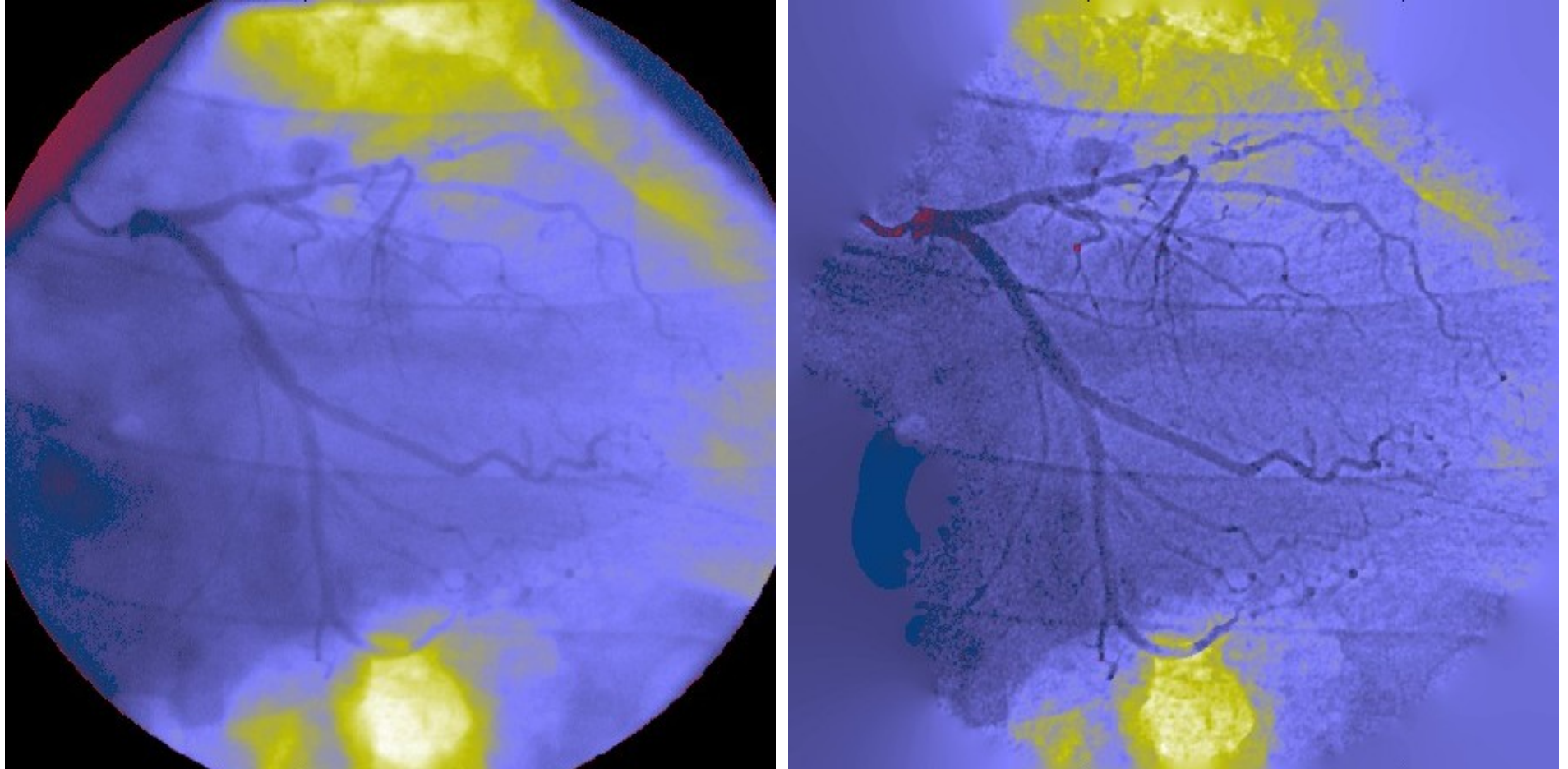
---



**Chromosomes en microscopie confocale.** Données Centre commun de Quantimétrie. Algorithme de déconvolution aveugle (Thiébaud, 2002).

# 22

## Déconvolution aveugle en coronarographie

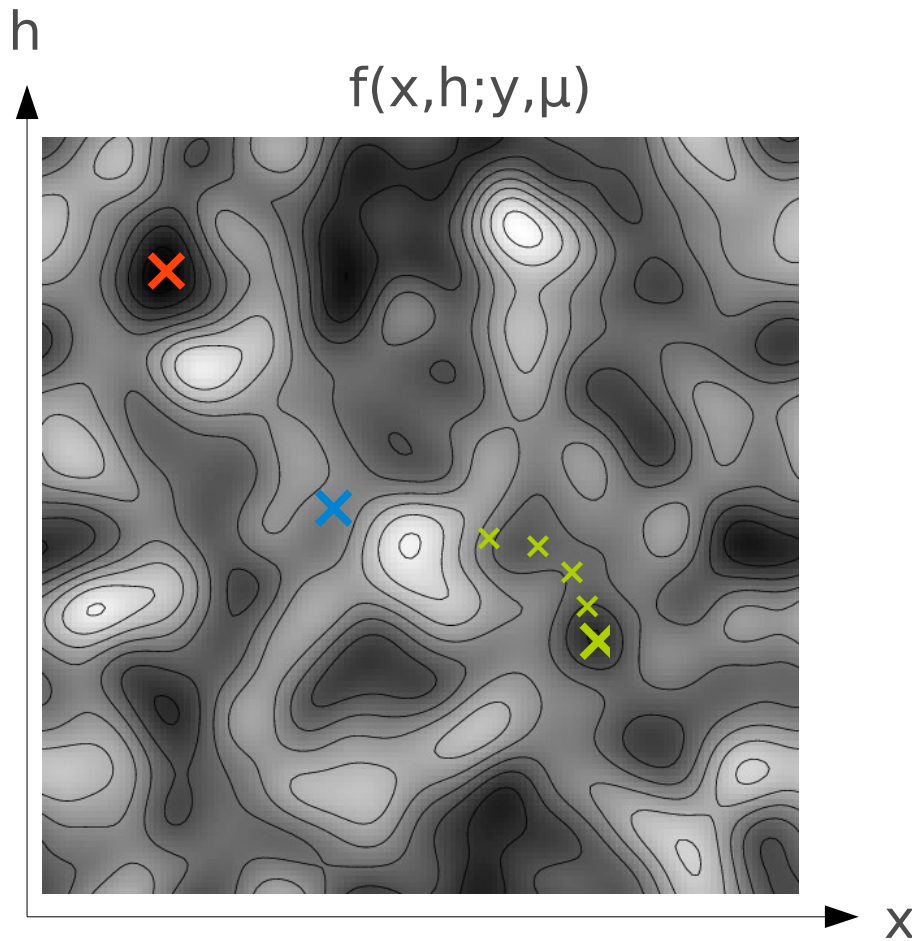


**Coronarographie.** Données service de cardiologie de l'Hôpital de la Croix Rousse. Algorithme de déconvolution aveugle multi-images (Soulez et al. 2008).

→ meilleur diagnostic, moins de radiations

# 23

## Déconvolution aveugle → optimisation globale / locale / MCMC ?



- fonction de pénalisation très multi-modale
- MAP (✗)
  - minimum global
  - temps de calcul
- $\langle x \rangle$  (✗) = moyenne au sens de la distribution a posteriori marginale
  - MCMC
  - temps de calcul
- solution initiale + minimisation locale (✗)
  - robustesse ?
- quelle est la meilleure stratégie ?

---

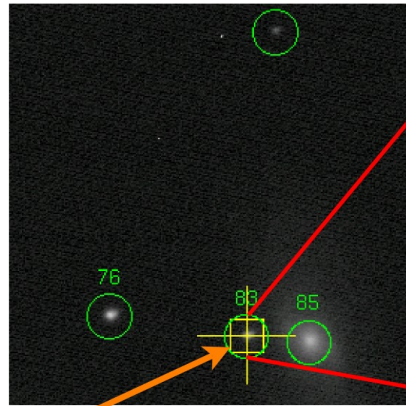
# Spectrographie intégrale de champ



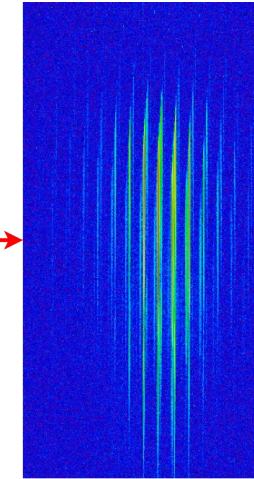
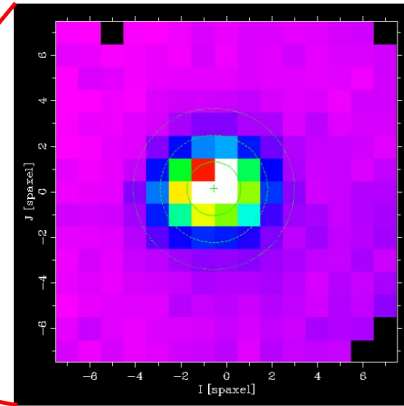
# 25

## Spectroscopie intégrale de champ : principe

focal plane of the telescope

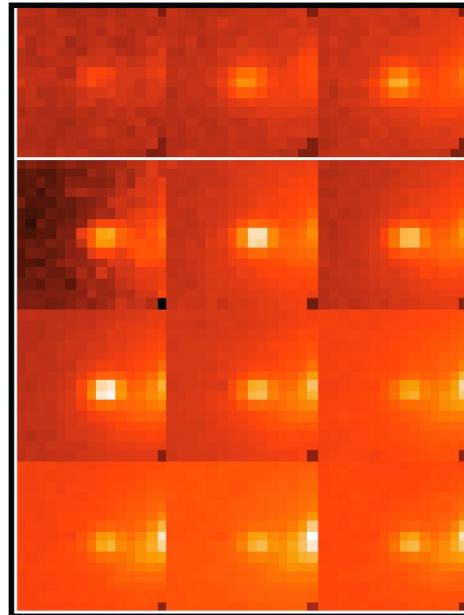


pick-off prism



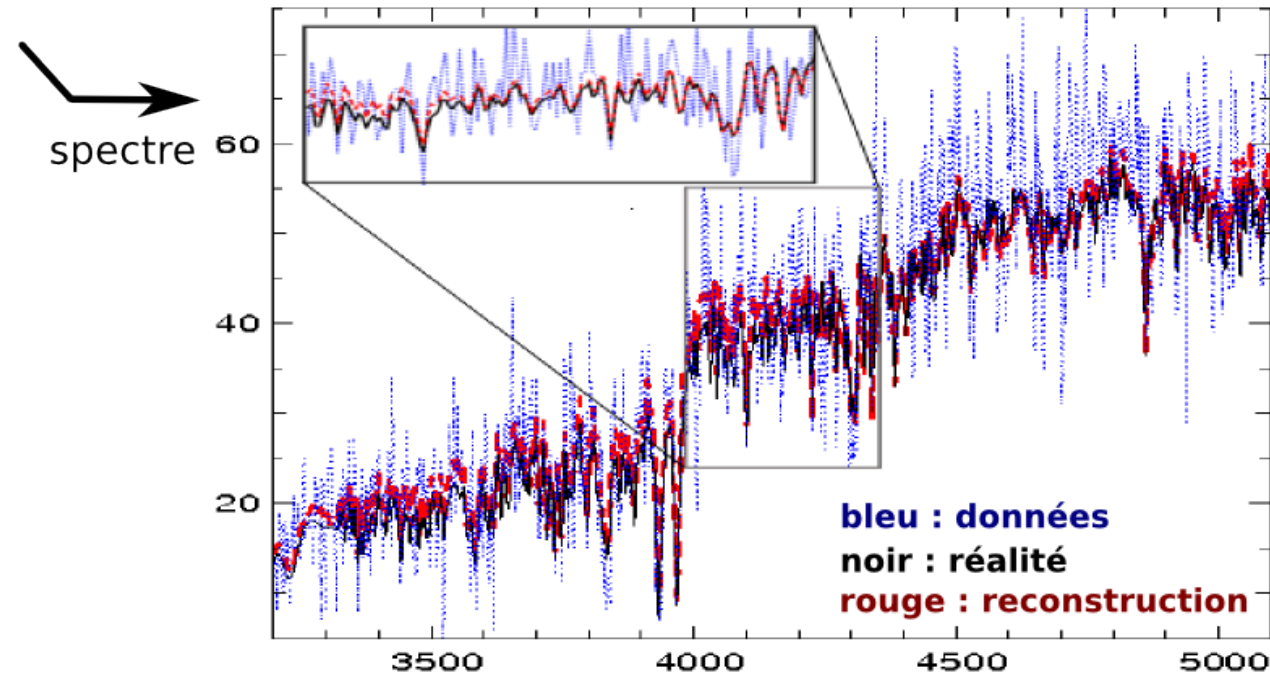
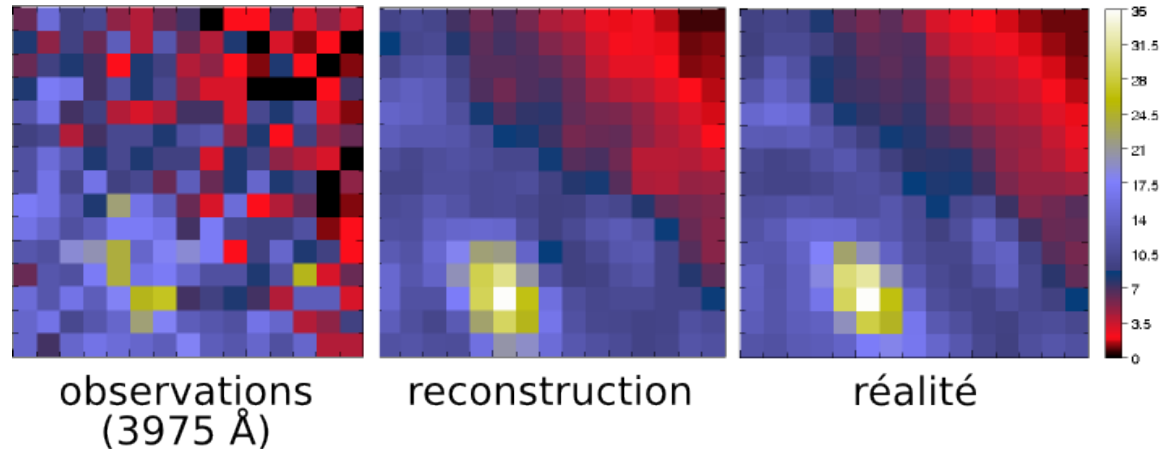
detector

reconstructed data cube



# 26 Spectrographie intégrale de champ

- spectrographie intégrale de champ → images multi-spectrales  $(x,y,\lambda)$  et même  $(x,y,\lambda,t)$
- traitement simultané de toutes les données (pas par canal spectral)
  - déconvolution spatiale
  - régularisation spatiale & spectrale
  - « normalisation » des termes de régularisation pour réduire le nombre d'hyper-paramètres



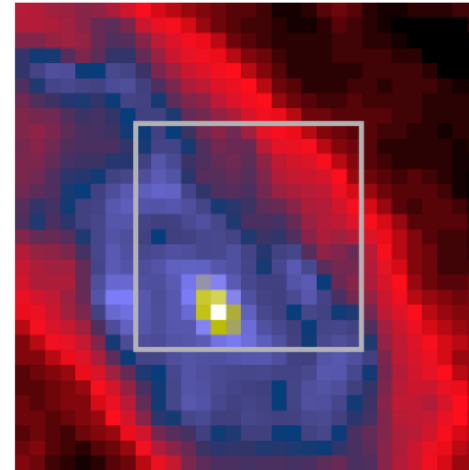
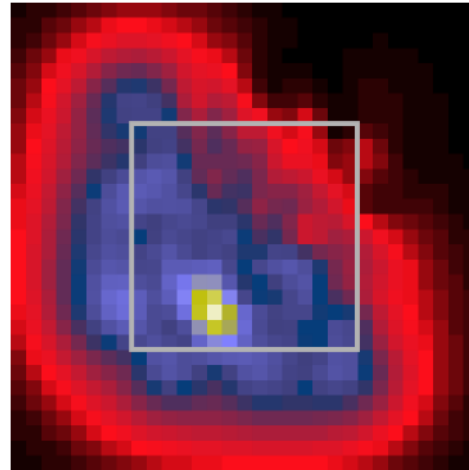
**Reconstruction d'image 3D  $(x,y,\lambda)$  pour SNIFS.**  
(Bongard, Soulez, Thiébaud & Pécontal, 2008)

# 27

## Spectroscopie intégrale de champ : extrapolation de champ

---

champ reconstruit →

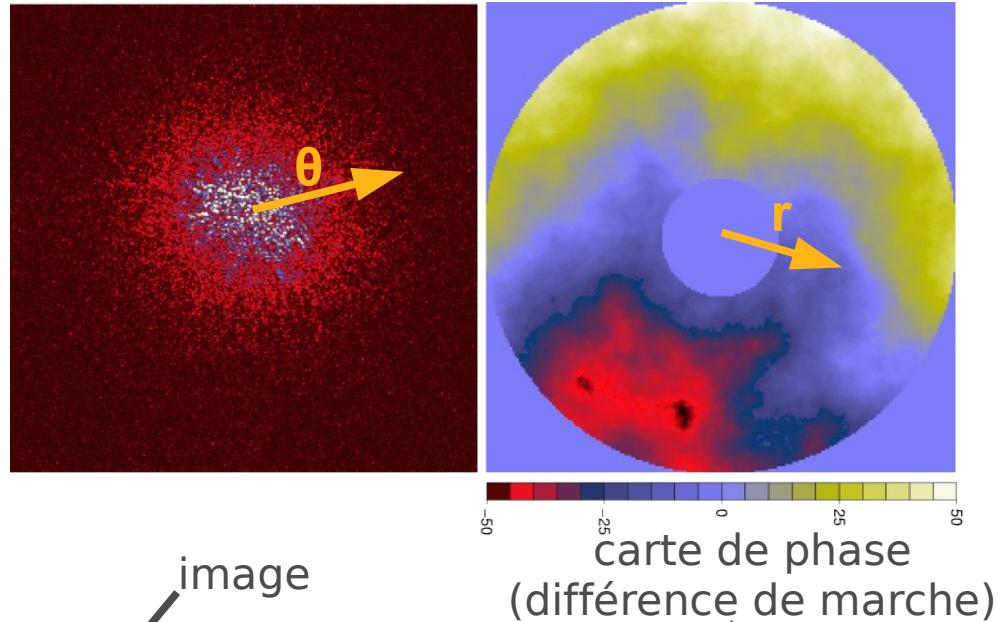
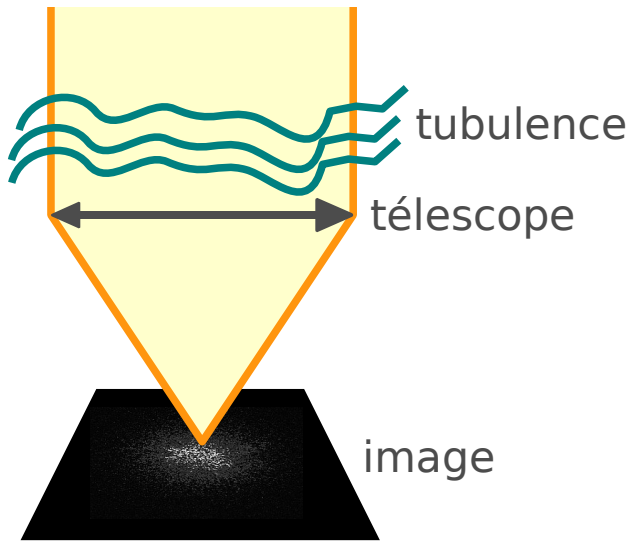


← réalité

---

# Reconstruction de phase

# 29 Reconstruction de phase : modèle direct



$$I(\mathbf{a}) = \left| \iint P(\mathbf{r}) \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda} [\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} + \delta(\mathbf{r})]\right) d^2 \mathbf{r} \right|^2$$

longueur d'onde

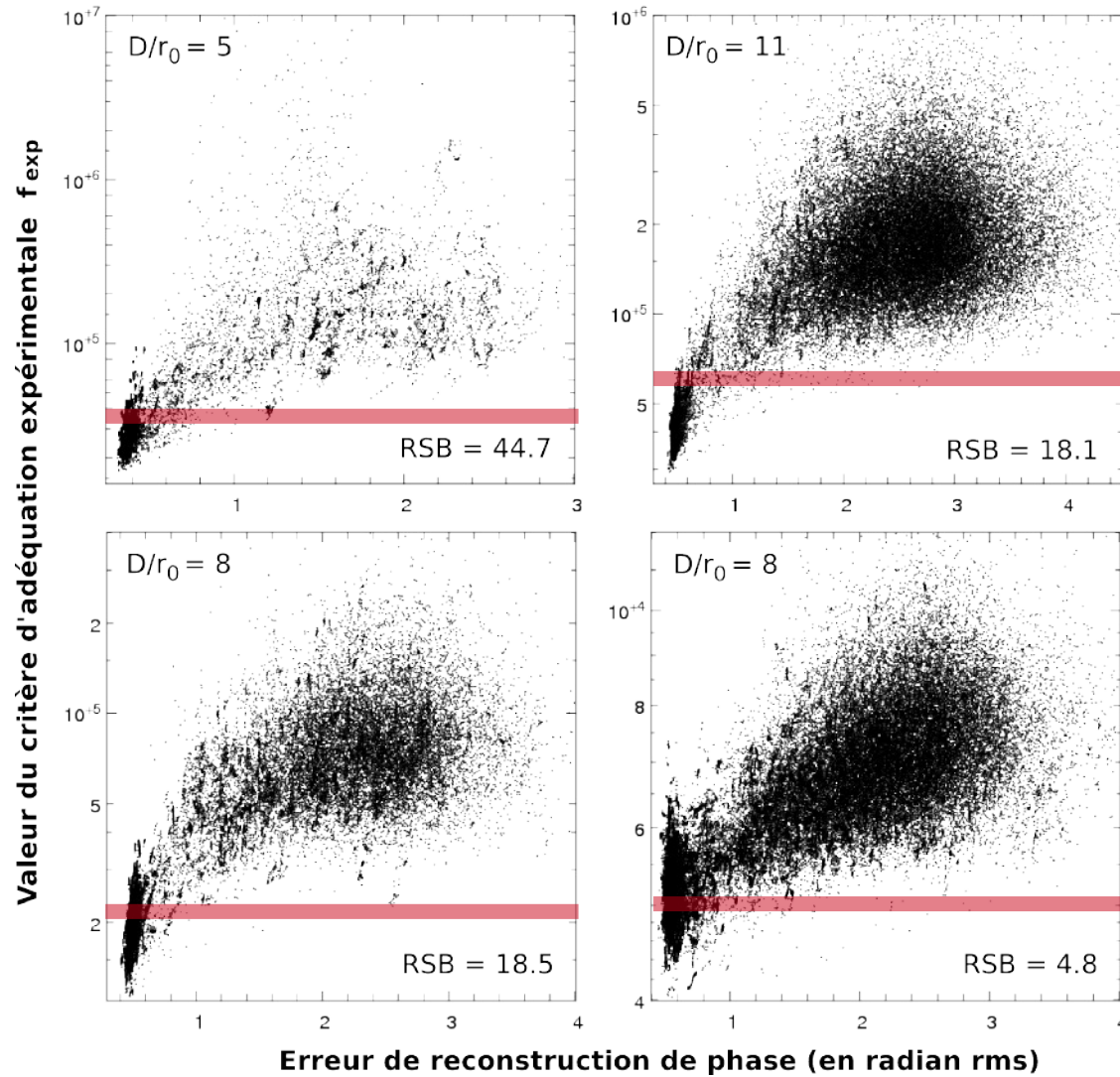
fonction pupille (normalisée)

Arrows point from the labels to the corresponding terms in the equation:  $\lambda$  is the wavelength,  $P(\mathbf{r})$  is the normalized pupil function, and  $\delta(\mathbf{r})$  is the phase difference.

problème de restauration de phase **très non-linéaire** et **multi-modal**  
→ **optimisation globale** à grand nombre de paramètres ( $>10^3$ )

# 30 Pertinence du critère expérimental

$\| \text{model} - \text{data} \|^2$



$\| \varphi_{\text{true}} - \varphi_{\text{model}} \|$

# 31 Algorithme de restauration de phase

## Stratégie d'optimisation globale :

- 1** tirage aléatoire d'une phase (selon statistique Kolmogorov)
- 2** optimisation locale limitée à quelques (50-75) pas et contrôlée par la régularisation
- 3** si  $\chi^2 < \chi^2$ -seuil, alors on poursuit l'optimisation et fin ; sinon retraitage

- Restauration monochromatique jusqu'à  $D/r_0 = 11$ .

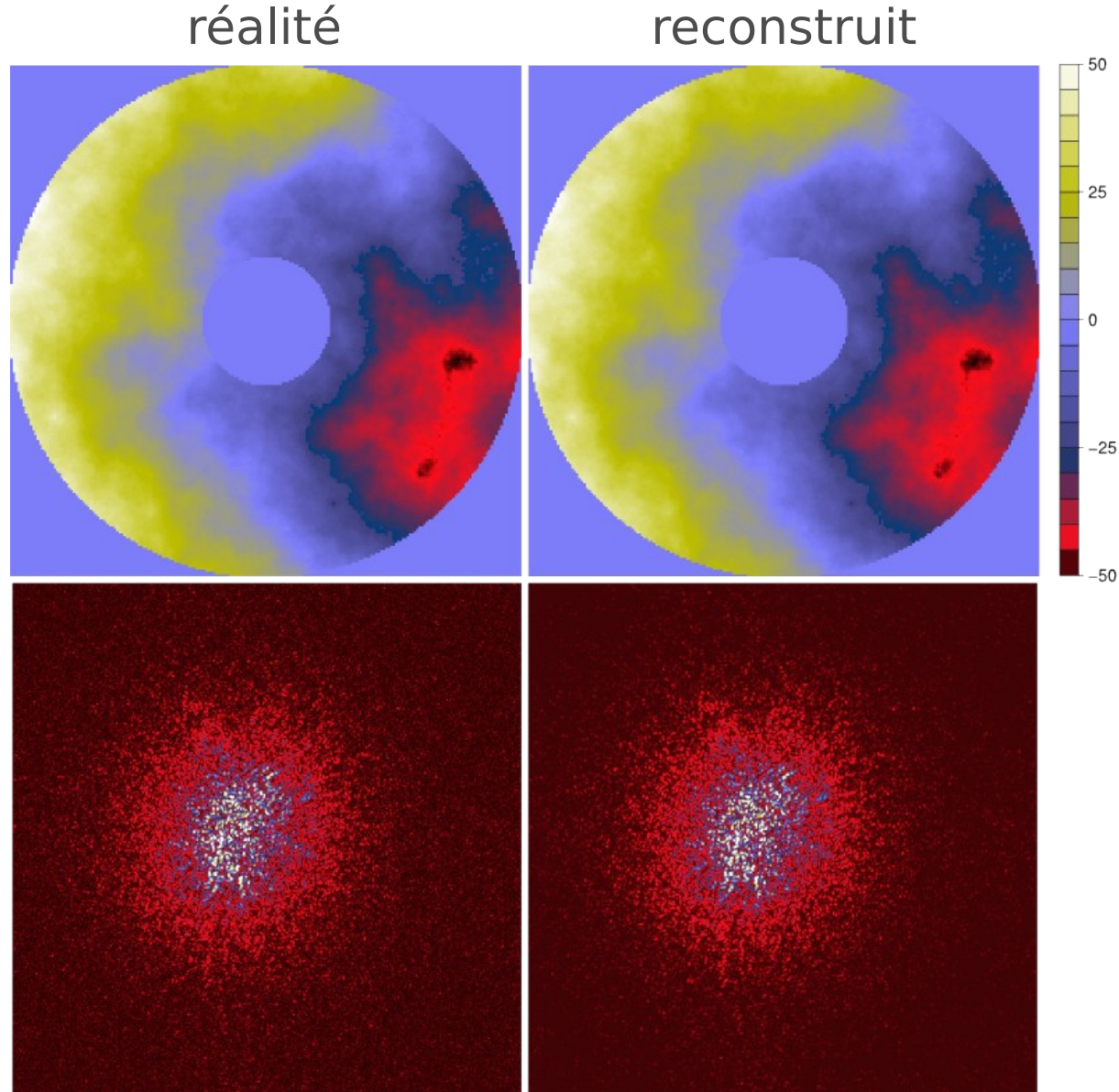
(Rondeau et al., 2007).

- Restauration par diversité de phase chromatique, restauration jusqu'à  $D/r_0 = 70$ .

(Rondeau, PhD thesis, 2007)

# 32

## Reconstruction par diversité chromatique sous très forte turbulence

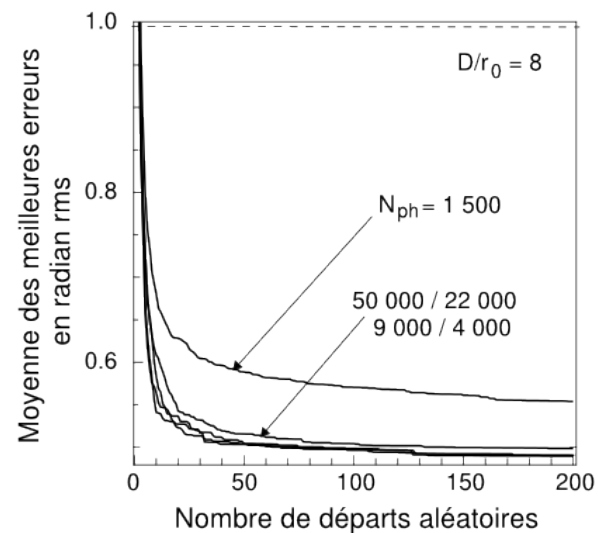
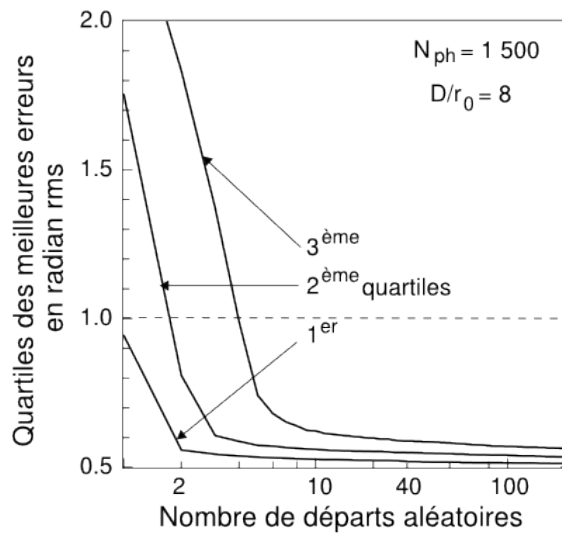
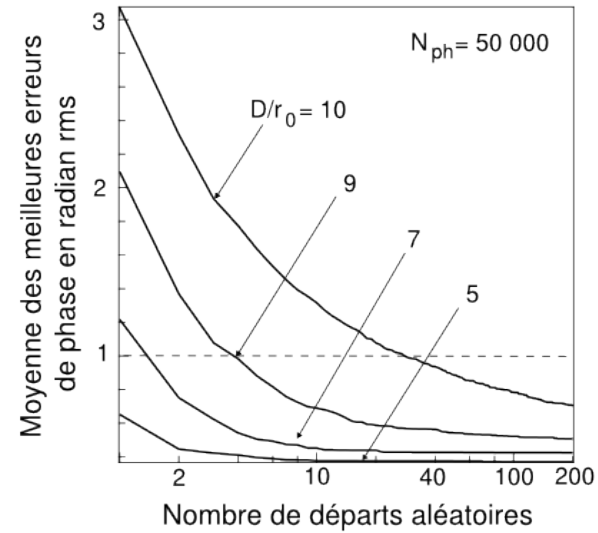
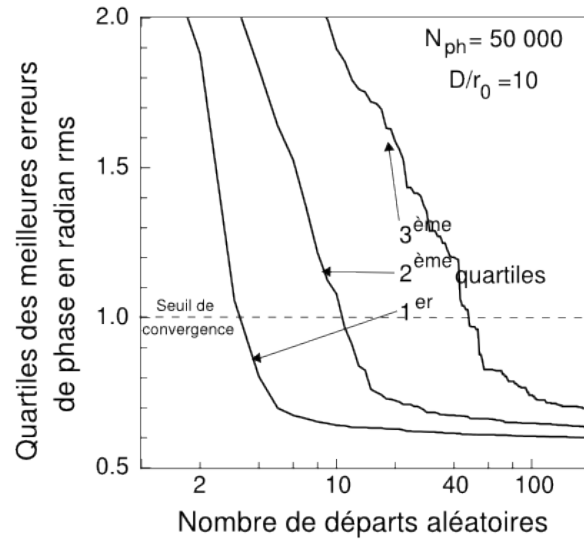


(Rondeau, PhD thesis, 2007).



# 33

## Convergence de l'optimisation globale



---

Détection

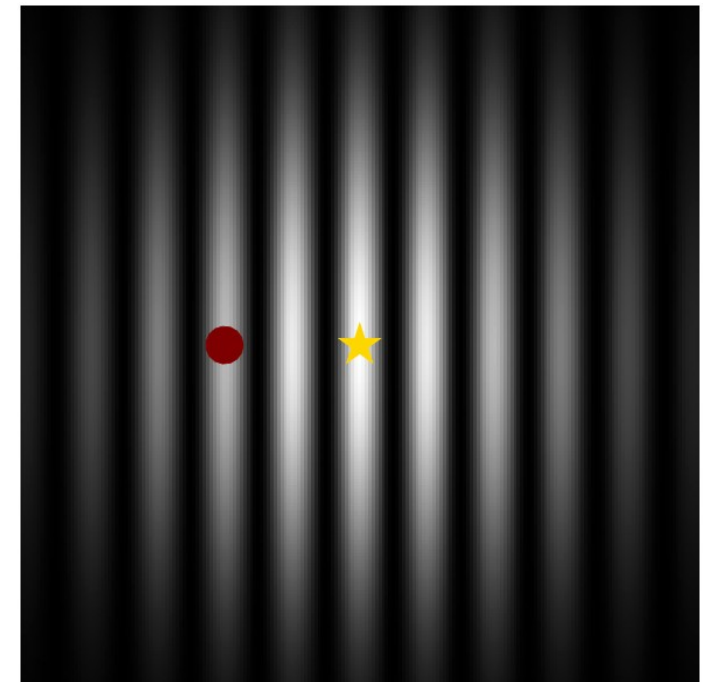
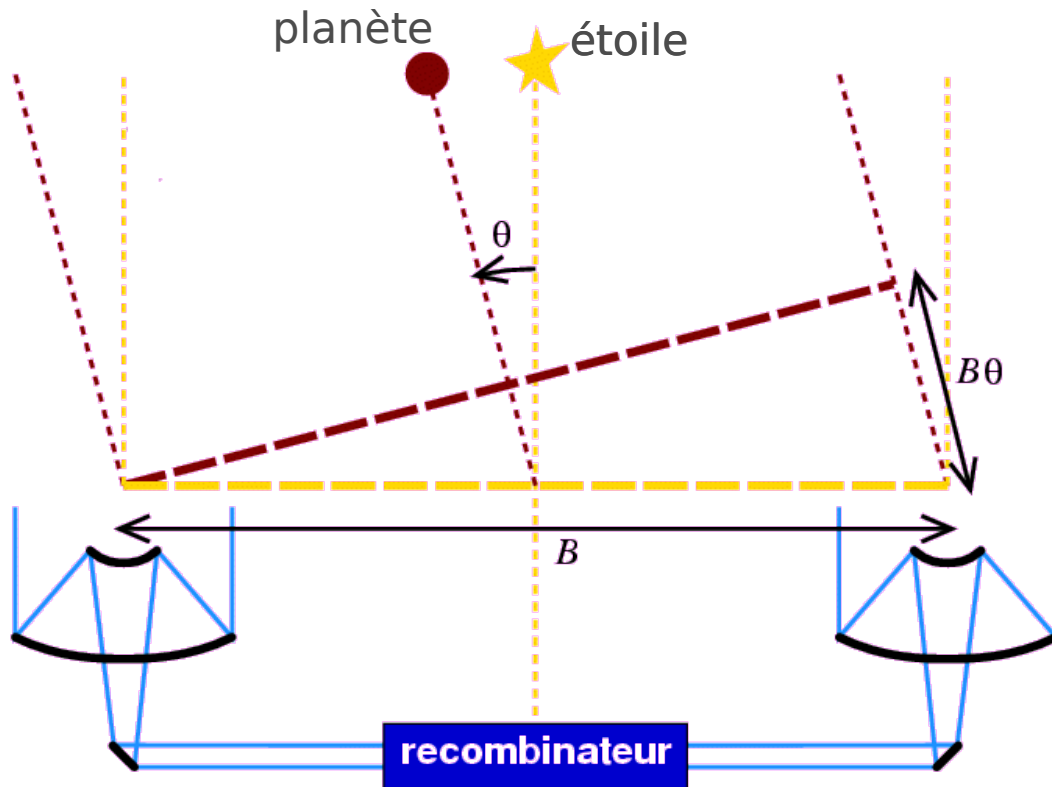
# 35 Problèmes de détection

---

- holographie numérique
  - détection 4-D  $(x,y,z,r)$
  - extension du champ utile
- détection d'exoplanètes
  - interférométrie à annulation de phase
  - approche Bayésienne
  - problème 3-D  $(x,y,\lambda)$
  - détection et caractérisation des planètes

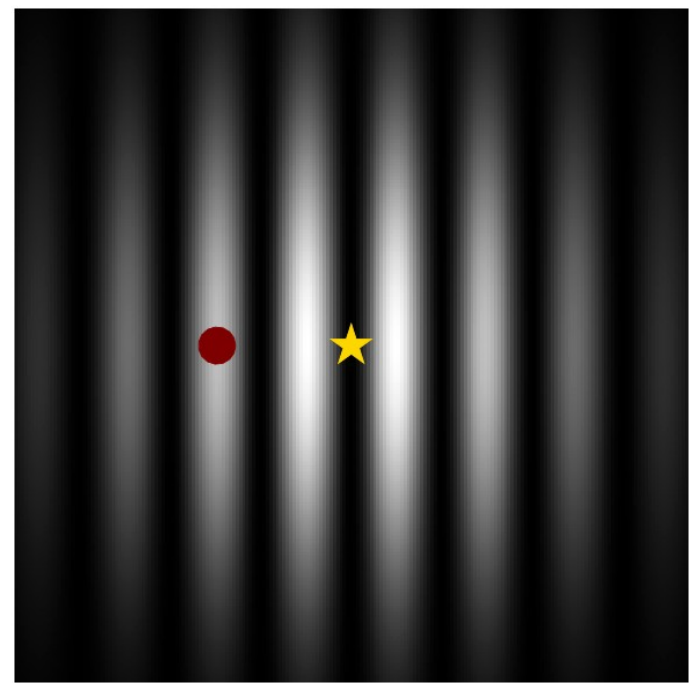
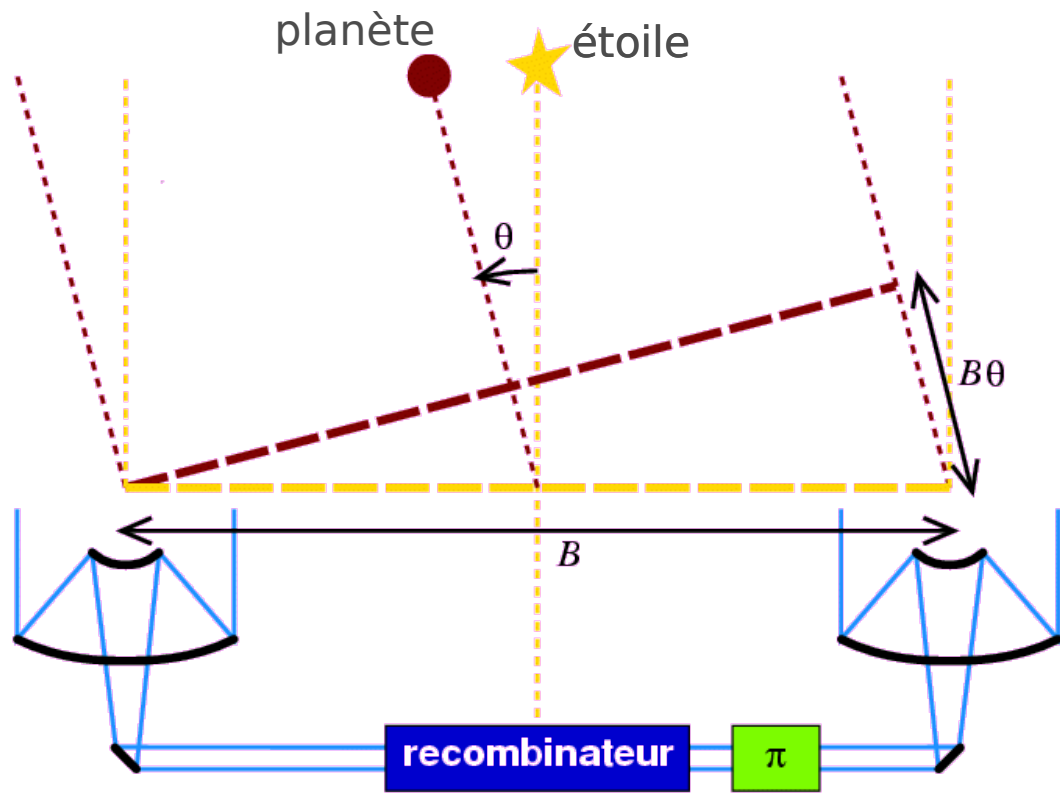
# 36 Interféromètre de Michelson classique

Problèmes inverses en astronomie - Éric Thiébaud - Peyresq, 2009



# 37 Interféromètre de Bracewell

Problèmes inverses en astronomie - Éric Thiébaud - Peyresq, 2009



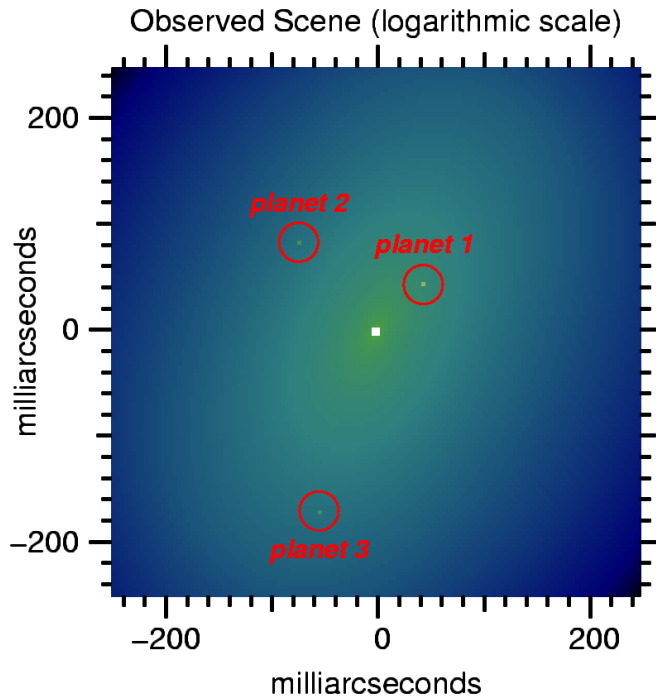
# 38 Interférométrie annulante : Darwin



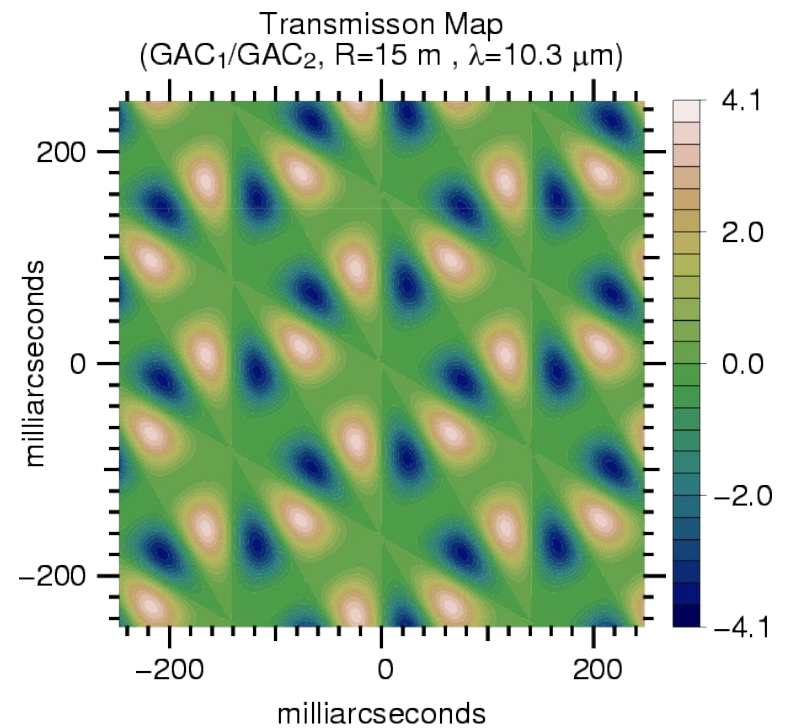
$$A(\lambda, t) = \iint_{\Omega} R(s, \lambda, t) F(s, \lambda, t) ds$$

observable      instrument      objet observé  
 direction      longueur d'onde      temps

$$F(s, \lambda, t)$$



$$R(s, \lambda, t)$$



# 39 Critère de détection

Scène observée :  $F(s, \lambda, t) = \sum_n F_n(\lambda) \delta(s - s_n(t))$   
spectre de la  $n$ -ème planète  $\nearrow$  position de la  $n$ -ème planète  $\nearrow$

Modèle direct :  $A(\lambda, t) = \sum_n R(s_n, \lambda, t) F_n(s) + e(\lambda, t)$

Vraisemblance :  $f_{\text{data}}(\mathbf{s}) = \sum_{\lambda, t} w_{\lambda, t} \left[ A(\lambda, t) - \sum_n R(s_n, \lambda, t) F_n(\lambda) \right]^2$

Pénalisation :  $f_{\text{MAP}}(\mathbf{s}; \boldsymbol{\mu}) = f_{\text{data}}(\mathbf{s}) + \underbrace{\sum_n \mu_n \sum_{\lambda} \left( F_n(\lambda + \Delta \lambda) - F_n(\lambda) \right)^2}_{\text{régularisation spectrale}}$

Meilleures distributions spectrales :  $F^+(\mathbf{s}; \boldsymbol{\mu}) = \arg \min_F f_{\text{MAP}}(\mathbf{s}; \boldsymbol{\mu})$

Carte de détection :  $f_{\text{MAP}}(\mathbf{s}; \boldsymbol{\mu})^+ = f_{\text{MAP}}(\mathbf{s}; \boldsymbol{\mu})|_{F=F^+}$

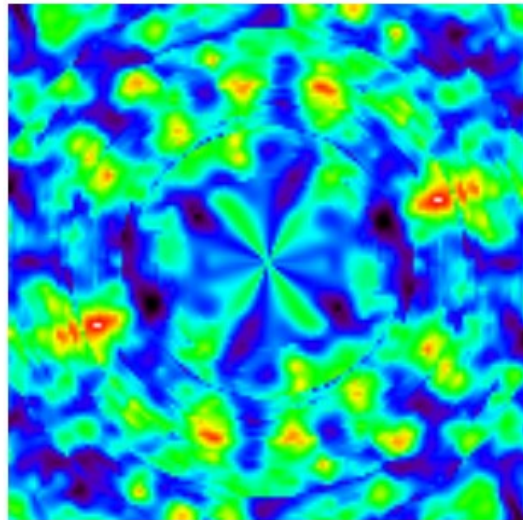
→ **position la plus vraisemblable**

# 40 Carte de détection

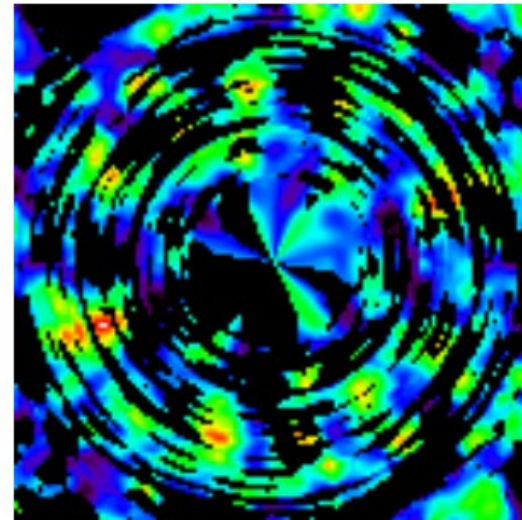
Détection 1ère planète

Importance de la contrainte de positivité et de la régularisation spectrale

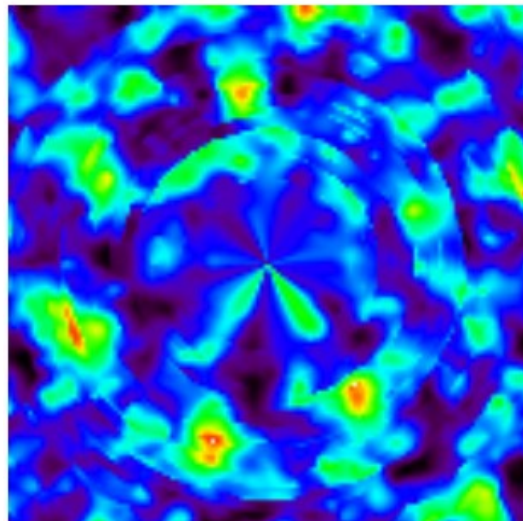
$f_{\text{data}}(s)^+$



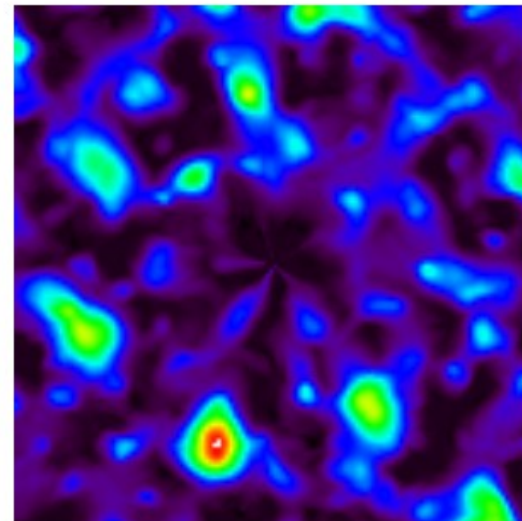
$f_{\text{data}}(s)^+$   
+ troncature



$f_{\text{data}}(s)^+$   
+ positivité



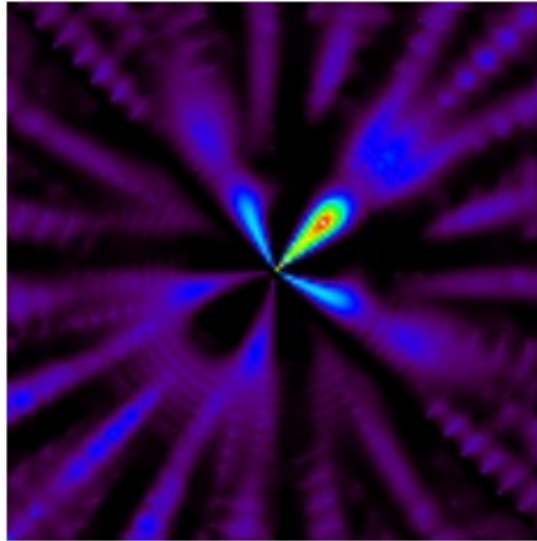
$f_{\text{MAP}}(s)^+$   
+ positivité  
+ régularisation spectrale



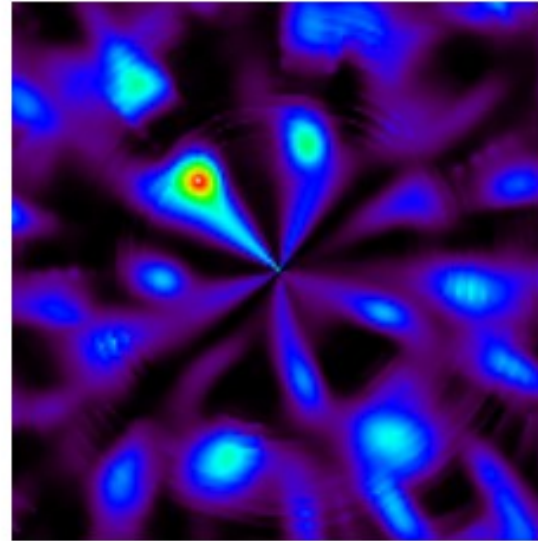


# 41 Etapes de détection

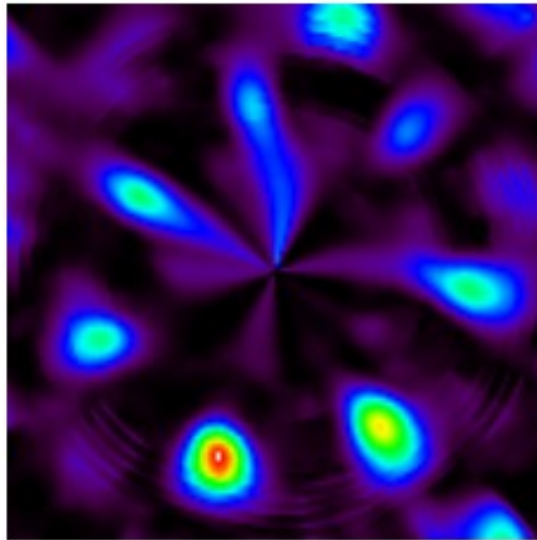
recherche  
1ère planète



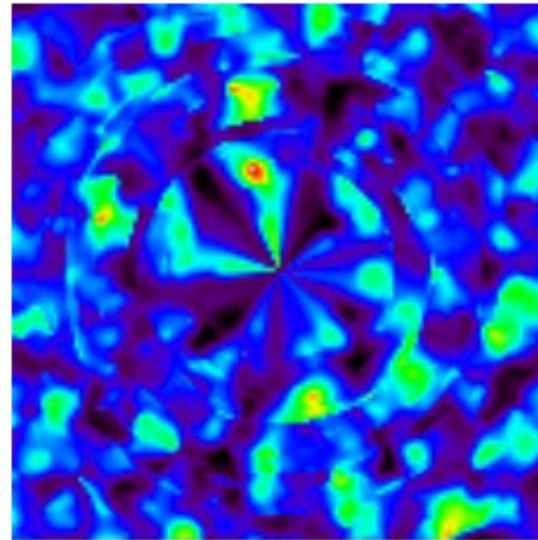
recherche  
2ème planète



recherche  
3ème planète



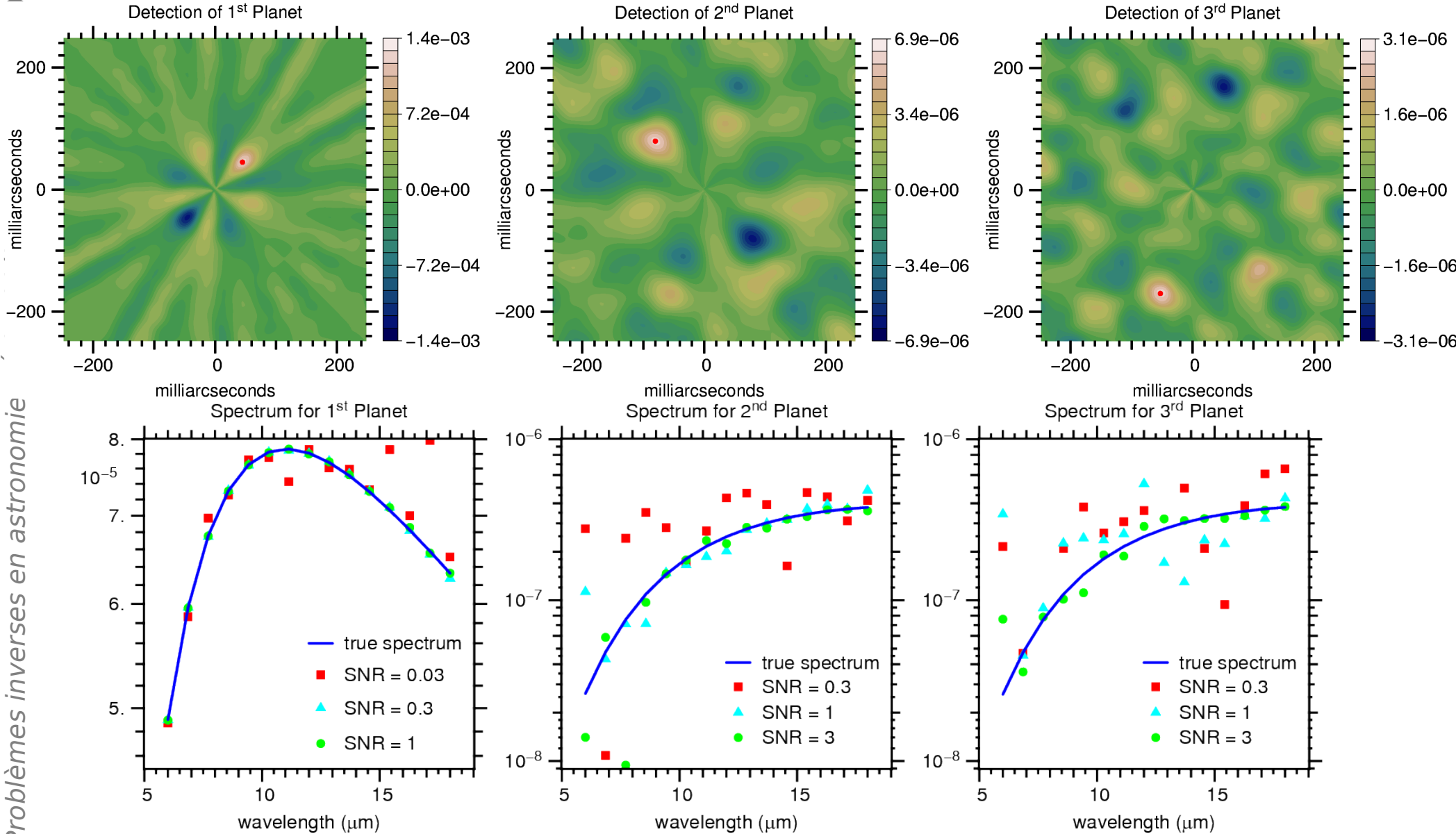
recherche  
4ème planète



$$f_{\text{MAP}}(\mathbf{s}; \boldsymbol{\mu})^+ = f_{\text{MAP}}(\mathbf{s}; \boldsymbol{\mu})|_{F=F^+}$$

# 42 Détection + caractérisation des planètes

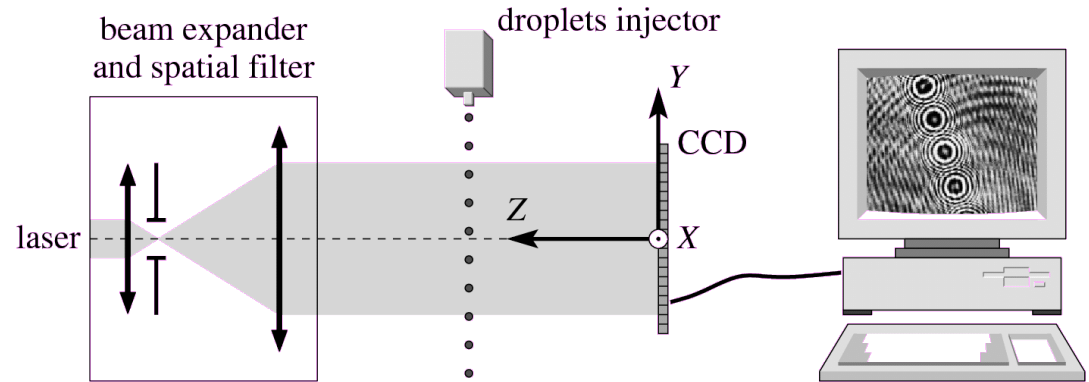
19



Problèmes inverses en astronomie

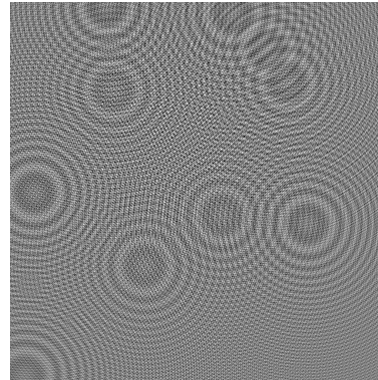
# 43 Holographie numérique : principe

Montage en ligne de type Gabor

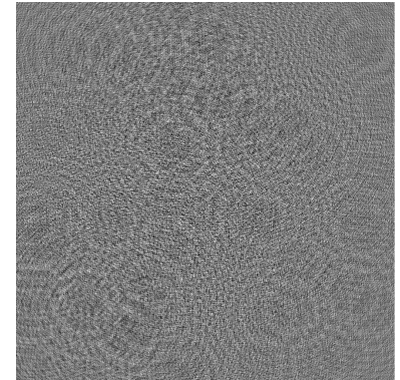


Modèle analytique dans l'approximation de Fresnel et des faibles densités

10 particules



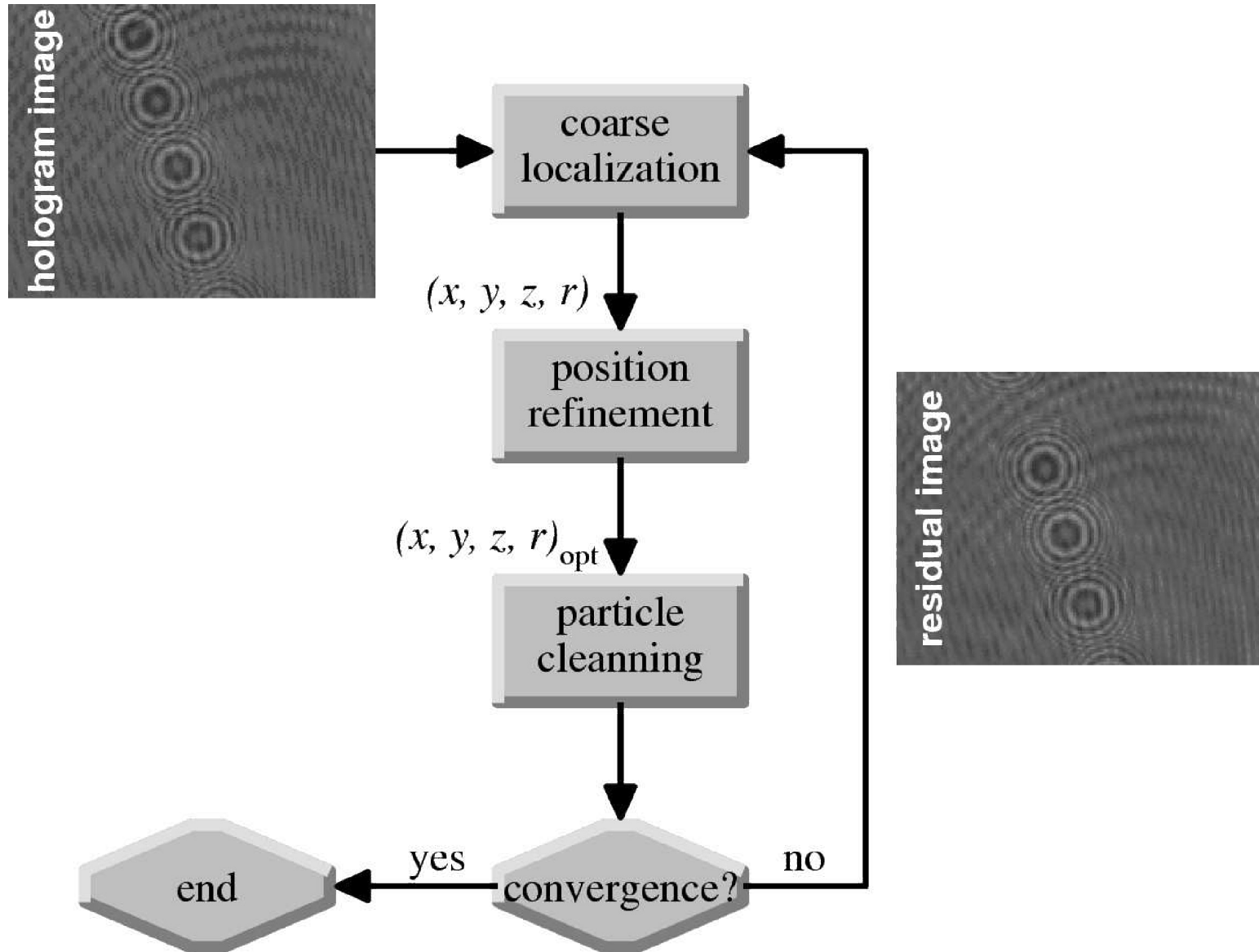
100 particules



Position de la figure de diffraction  $\rightarrow (x,y)$ , forme  $\rightarrow (z,r)$

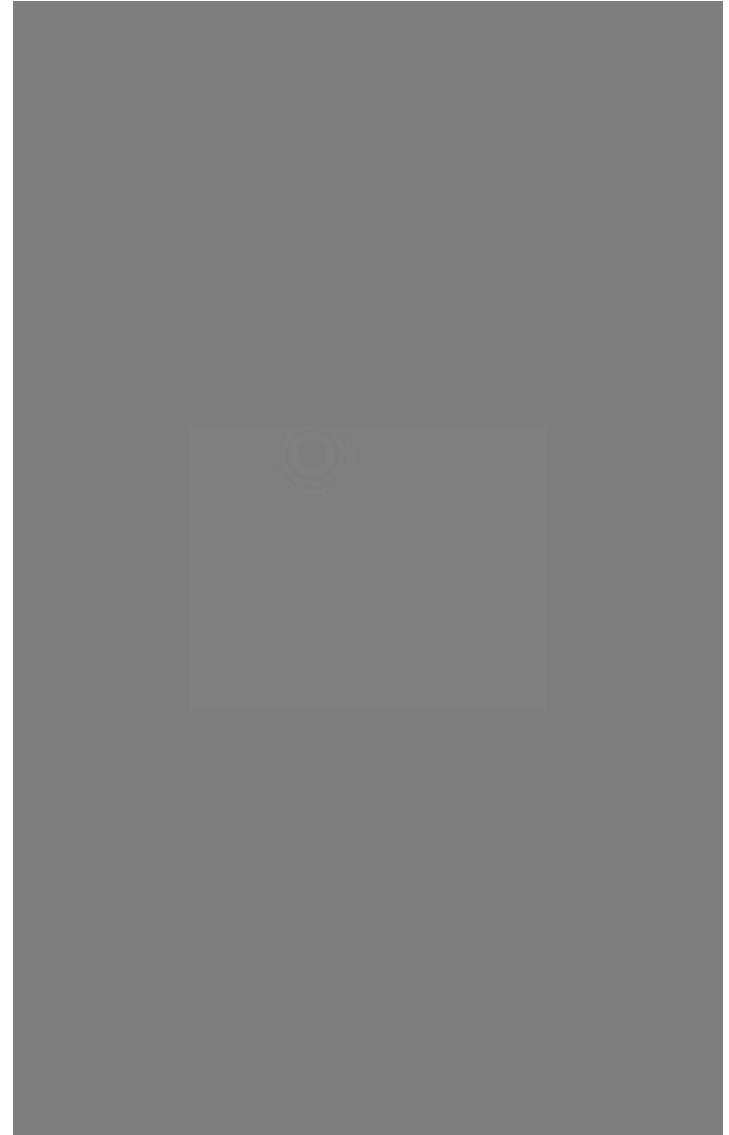
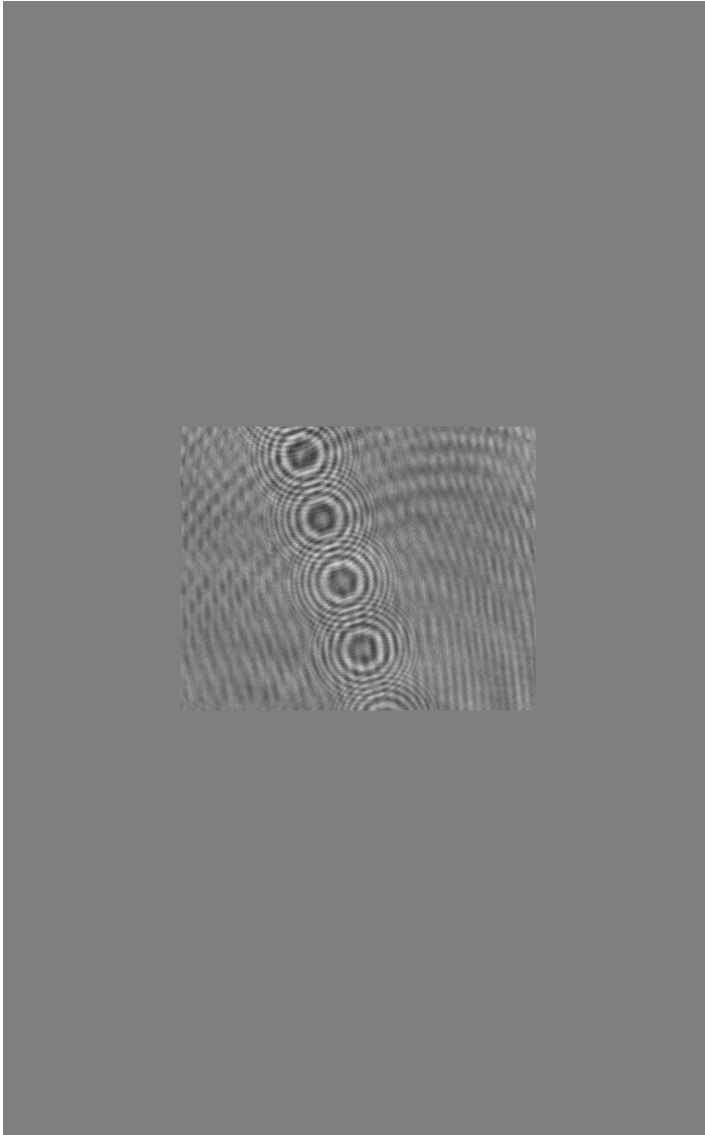
Applications : détection, comptage et vélocimétrie de particules

# Algorithme de type glouton + ajustement non-linéaire



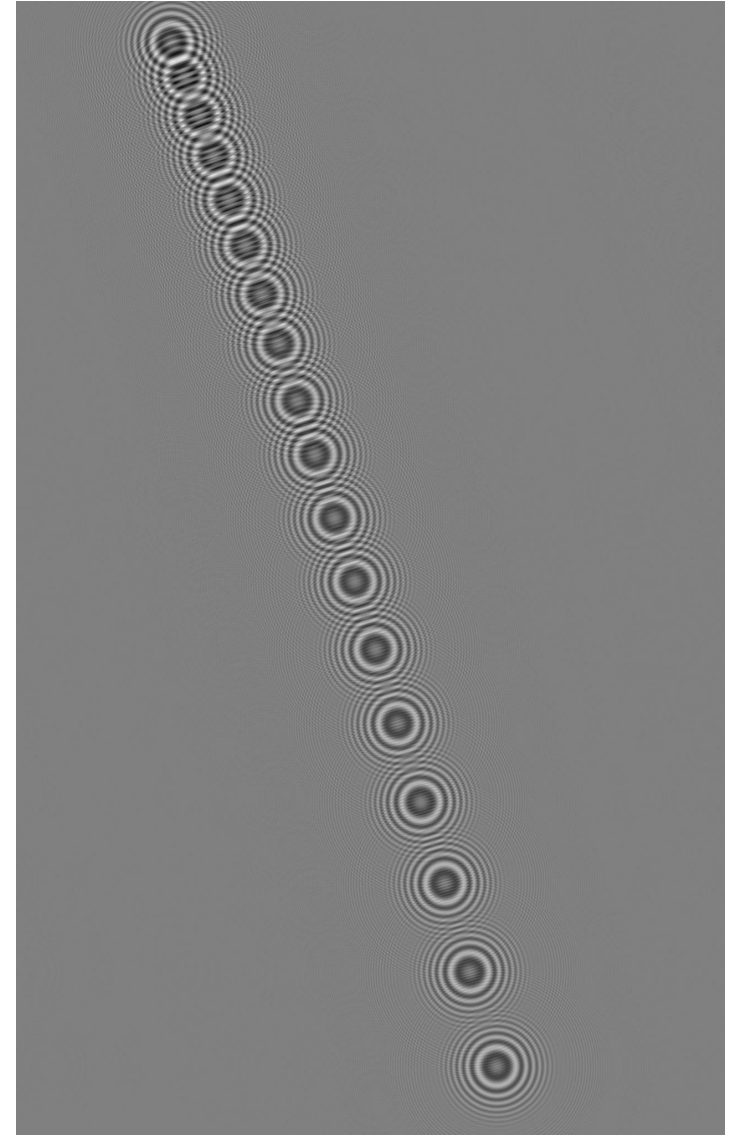
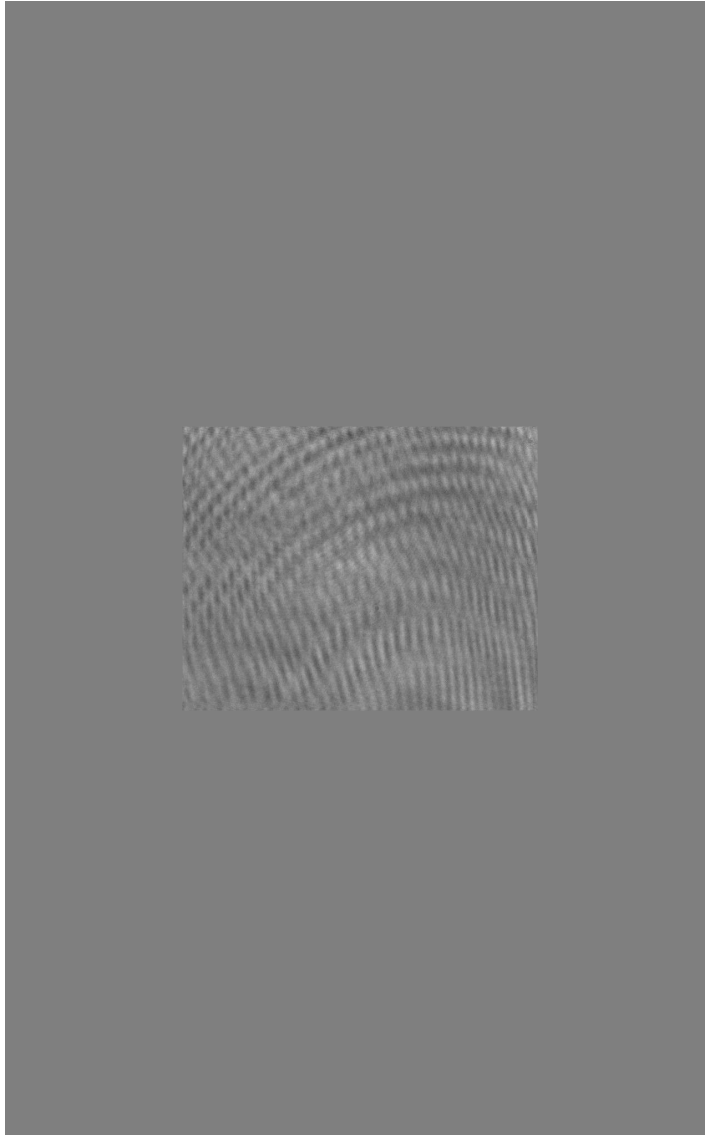
# 45 Holographie numérique : détection

---

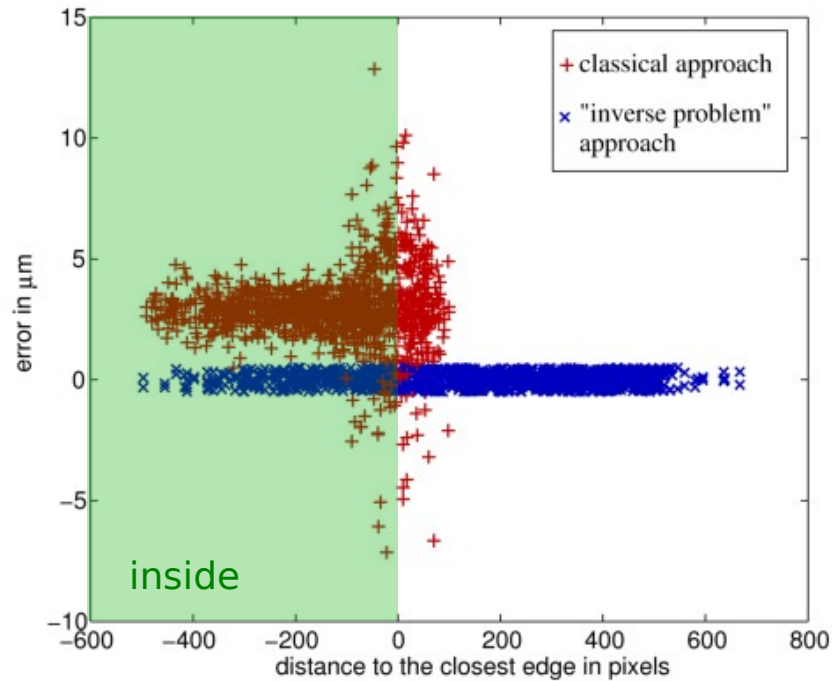


# 46 Holographie numérique : détection

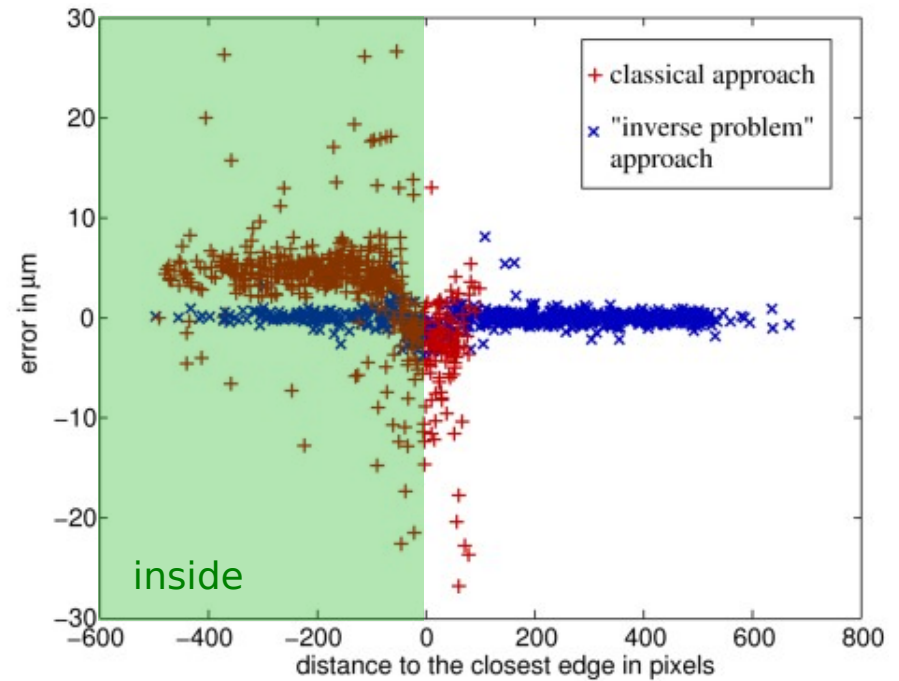
---



## 47

Holographie numérique :  
Précision de localisation

erreurs en position latérale (x,y)



erreurs en profondeur (z)

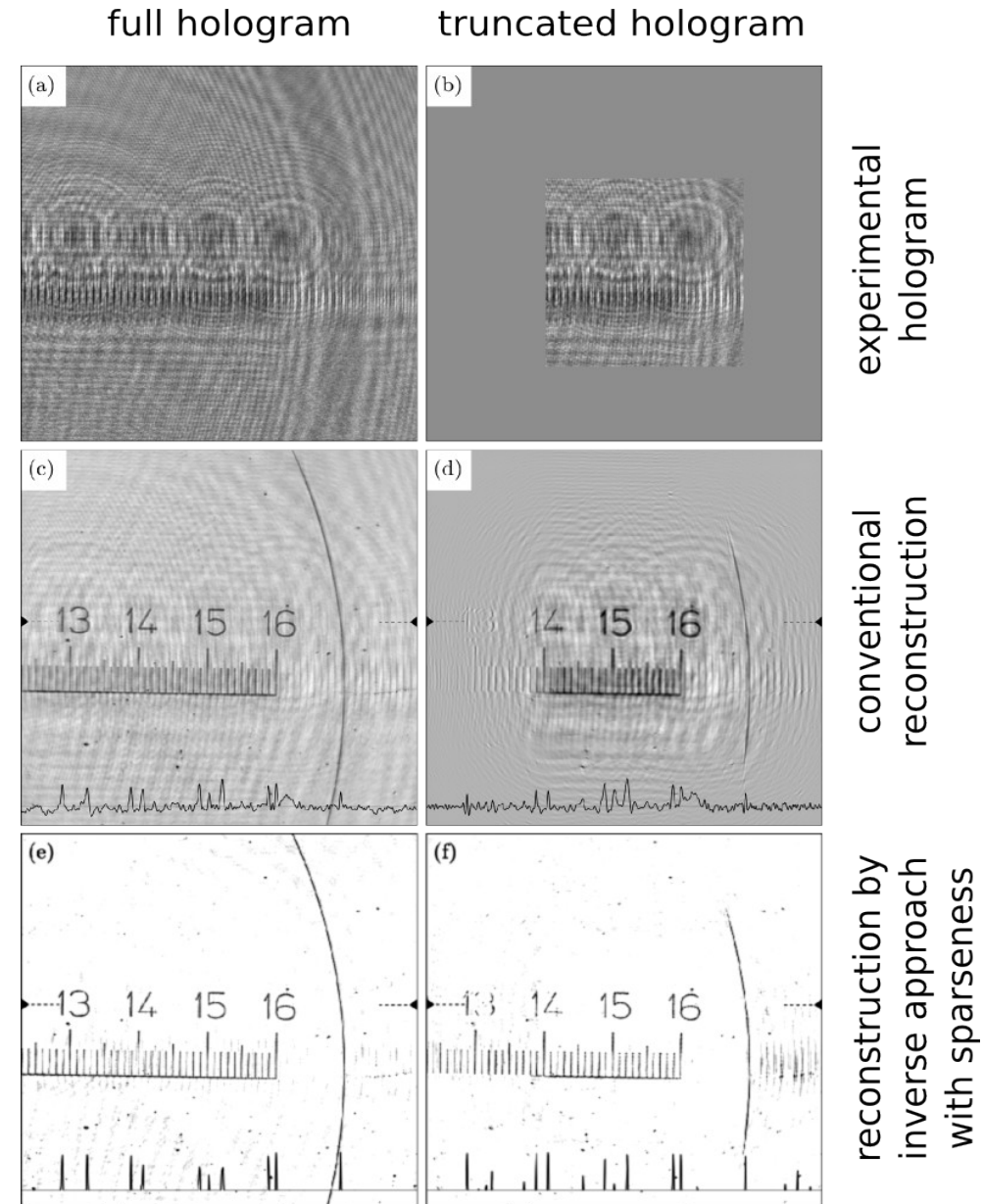
**méthode classique** : précision de l'ordre de  $4 \mu\text{m}$  (z),  $3 \mu\text{m}$  (x,y)

**approche inverse** : précision meilleure que  $0.3 \mu\text{m}$  (partout)  
+ **extension du champ**

# 48

## Holographie numérique sous critère de parcimonie

- détection de  $n$  particules par **RMP** (*Refined Matching Pursuit*, Rémi ?)  $\approx \ell_0$
- reconstruction du volume d'intérêt avec une régularisation  $\ell_1$  sur la densité  $\rightarrow$  parcimonie



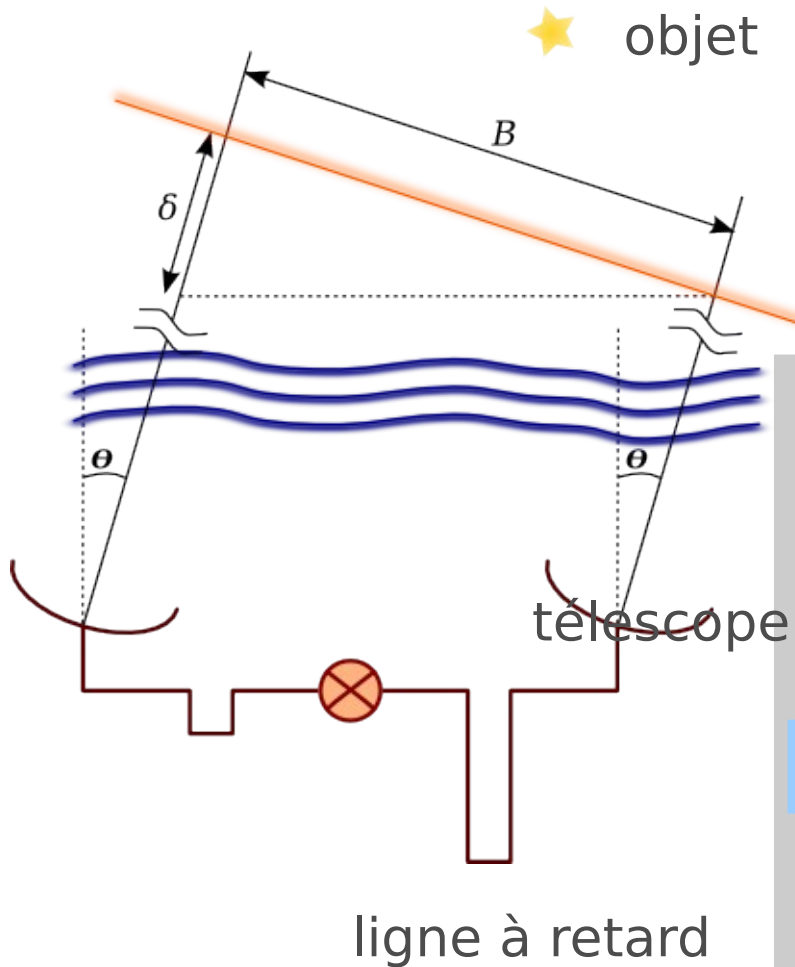
(Denis et al., 2009)



---

# Interférométrie

# 50 Principe de l'interférométrie optique



mesure = **visibilité complexe instantanée** :

$$V_{1,2}(t) = \hat{I}(\mathbf{v}_{1,2}) T_1^*(t) T_2(t)$$

transformée de Fourier de la distribution d'intensité de l'objet

fonctions de transfert de l'amplitude complexe des télescopes

fréquence spatiale :

$$\mathbf{v}_{1,2} = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\lambda}$$

base projetée ( $B$ )

longueur d'onde

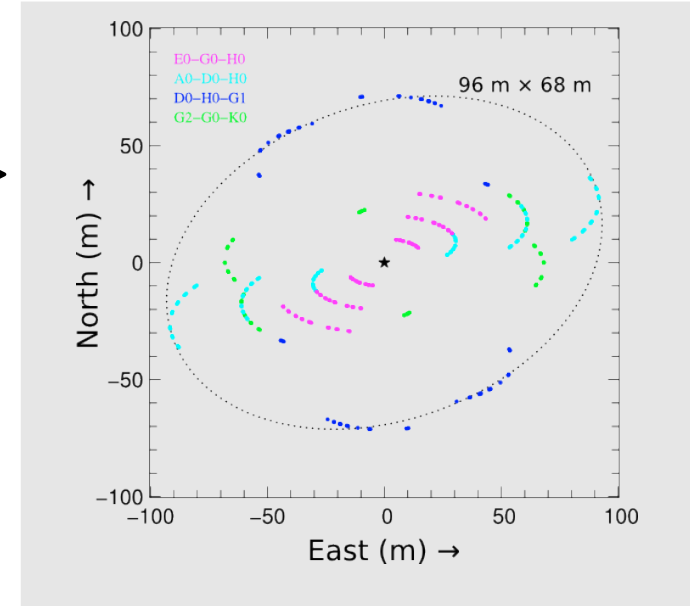
# 51

## Interférométrie → échantillonnage parcimonieux du plan (u,v)



interféromètre VLTI (ESO, Chili)

couverture plan de Fourier (u,v)



modèle direct linéaire :

$$y_j = \hat{I}(\nu_j) = \sum_{k=1}^{k=N} A_{j,k} x_k$$

$$A_{j,k} = \exp(2 i \pi \nu_j \theta_k)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}$$

échantillonneur

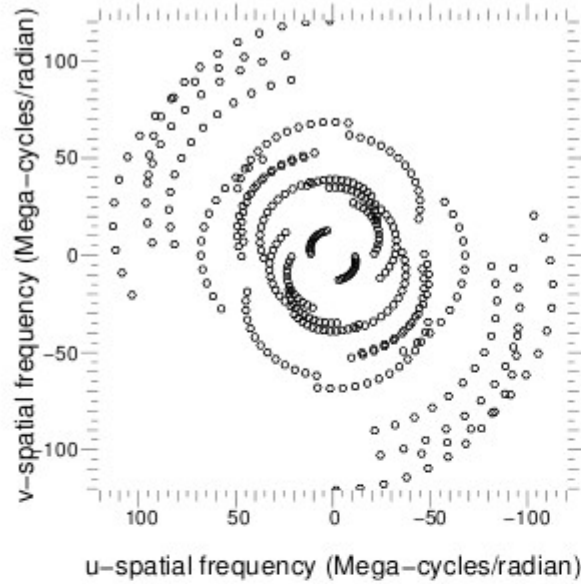
transformée de Fourier

→ inversion ≈ déconvolution de :

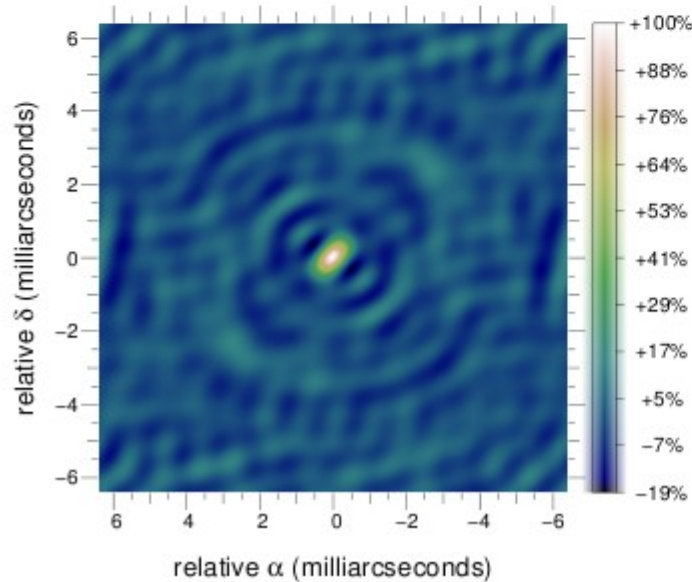
$$\hat{y} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{S}^T \cdot y$$

# 52 Sparse data $\rightarrow$ dirty beam, dirty image

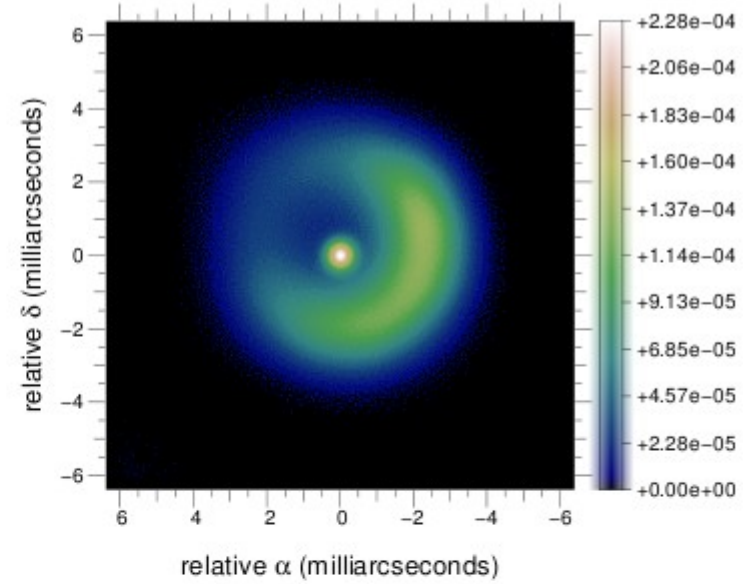
(u,v) coverage



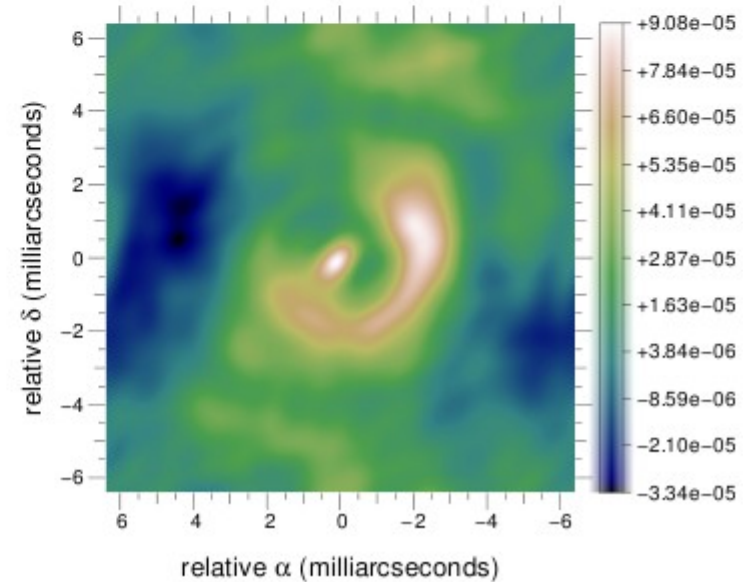
dirty beam



object



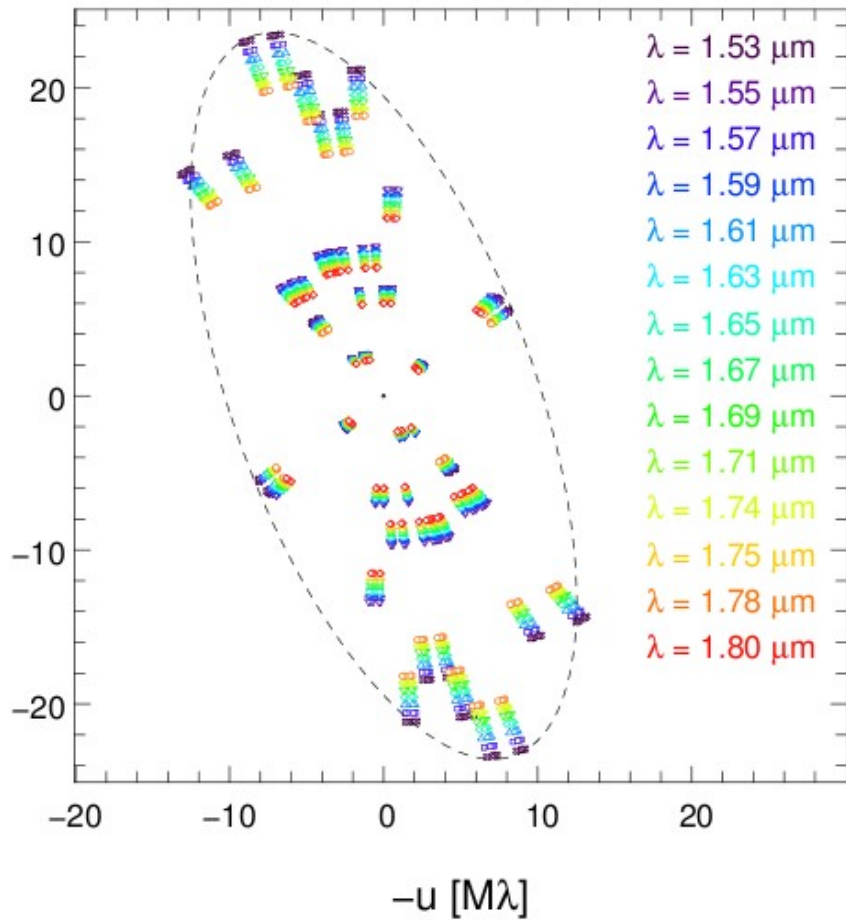
dirty image



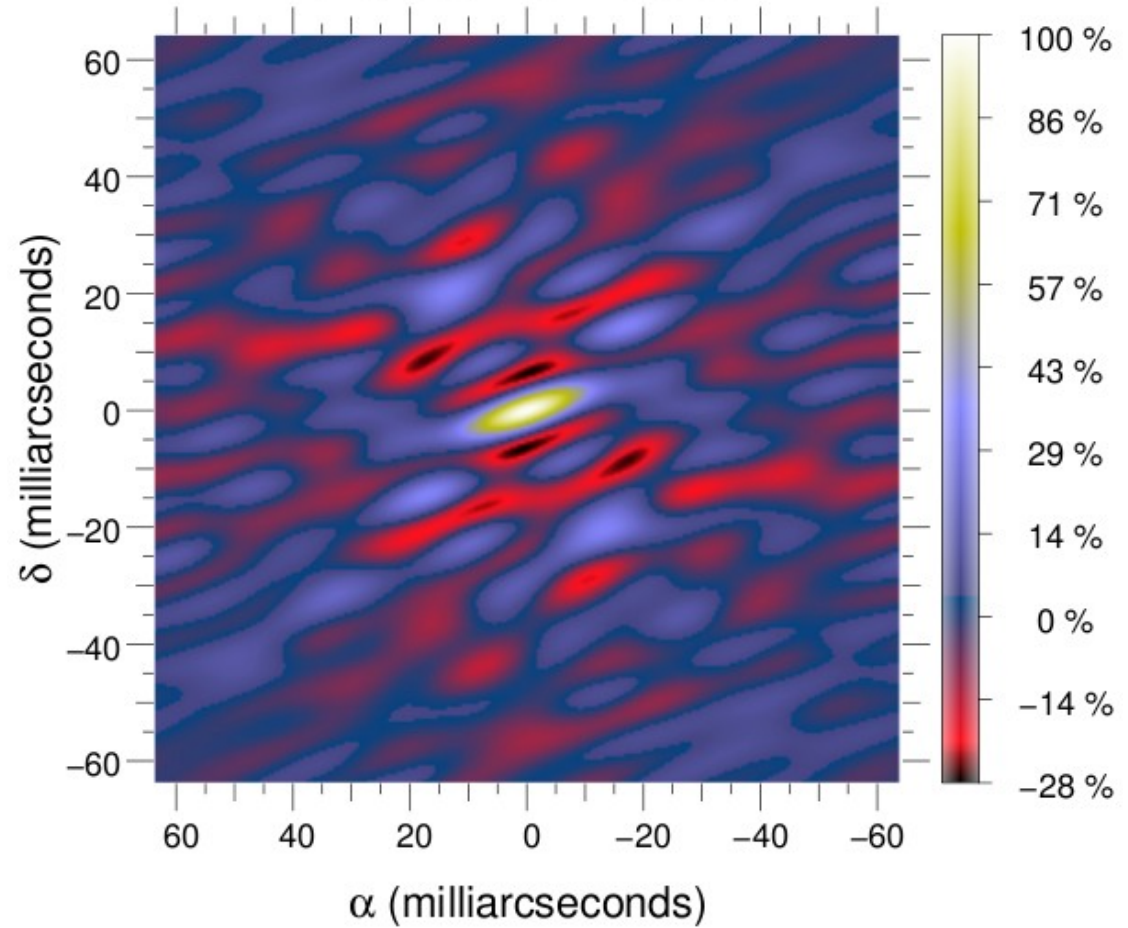
# 53

## Réponse impulsionnelle brute, couverture (u,v)

fréquences spatiales observées



réponse impulsionnelle brute



objet :  $\alpha$  Boo (Arcturus)  
IOTA/IONIC interferometer  
(Lacour *et al.*, 2007)

# 54 Formulation problème inverse

- synthèse d'image en interférométrie formulée comme un problème d'optimisation sous contraintes :

$$\mathbf{x}_{\text{best}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \{ f_{\text{data}}(\mathbf{x}) + \mu f_{\text{prior}}(\mathbf{x}) \} \text{ tel que : } x_k \geq 0, \forall k \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{k=N} x_k = 1$$

**attache aux données**  
(cohésion du modèle avec les données, e.g. chi-2 :  $\chi^2$ )

**régularisation**  
(cohésion du modèle avec les a priori, e.g. champ de vue limité)

**positivité**

**normalisation**

- quelle régularisation ?
  - interpoler les trous dans l'espace des mesures
  - éviter de trop extrapoler
  - attention aux anisotropies

# 55 Quel type de régularisation ?

- quelle régularisation ?
  - interpoler les trous dans l'espace des mesures
  - éviter de trop extrapoler
- Narayan & Nityananda (1986) :
  - régularisation non-linéaire → interpolation des trous dans l'espace de Fourier
  - maximum d'entropie
- lisse dans Fourier ~ compact dans l'image
  - régularisation par contrainte de support adaptatif
  - la positivité peut jouer ce rôle (Le Besnerais *et al.*, 2008)
  - support mou  $f_{\text{prior}}(\mathbf{x}) = \sum_k w_k x_k^2$  par exemple  $w_k = |\theta|^\beta + \varepsilon$

solution par défaut

(sous contrainte de normalisation)

$$x_j = \frac{w_j^{-1}}{\sum_k w_k^{-1}}$$

# 56 Maximum d'entropie

Solution au sens du maximum d'entropie :

$$\mathbf{x}_{\text{MEM}} = \arg \max_{\mathbf{x}} S(\mathbf{x}) \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Entropie (Jaynes, Skilling, Gull, ...) :

$$S(\mathbf{x}) = \sum_k \left[ x_k \log(x_k / p_k) - x_k + p_k \right]$$

( $\mathbf{p}$  = solution par défaut)

Lagrangien (données exactes) :

$$L(\mathbf{x}; \boldsymbol{\lambda}) = S(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\lambda}^T \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{b})$$

$$\partial_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}; \boldsymbol{\lambda}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_k = p_k \exp(\mathbf{A}^T \cdot \boldsymbol{\lambda})$$

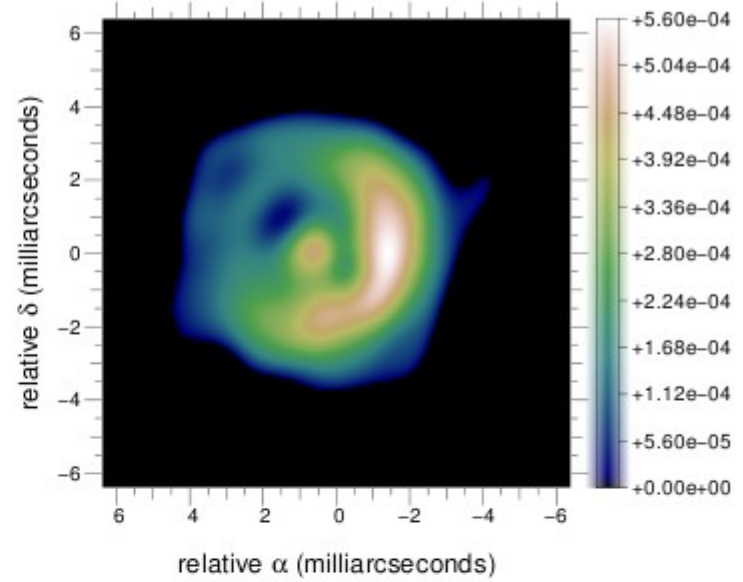
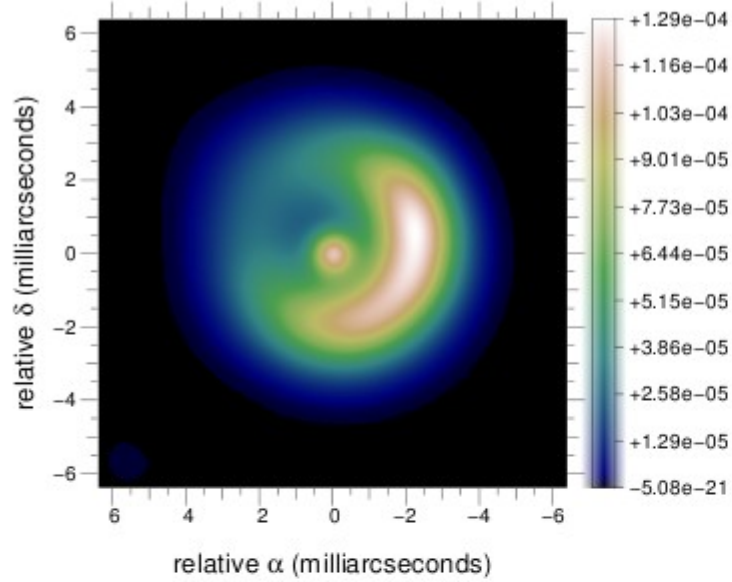
Données bruitées  $\Rightarrow f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\lambda}) = \|\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2 - \mu S(\mathbf{x})$



# 57

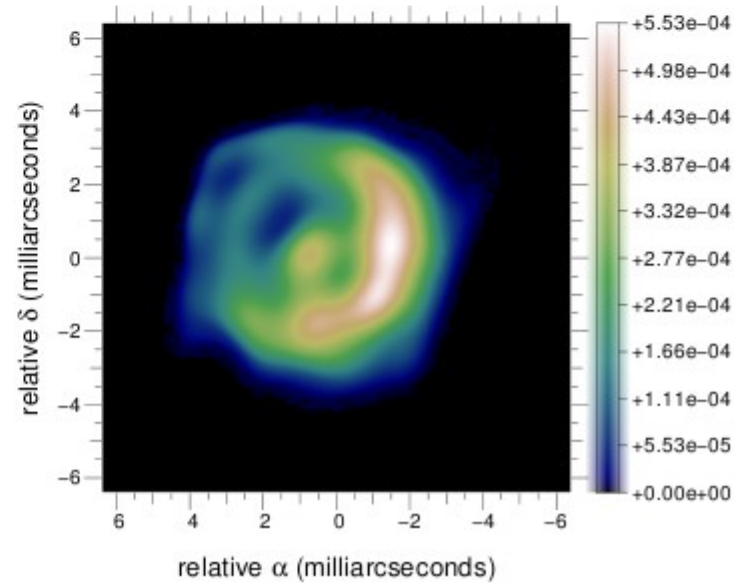
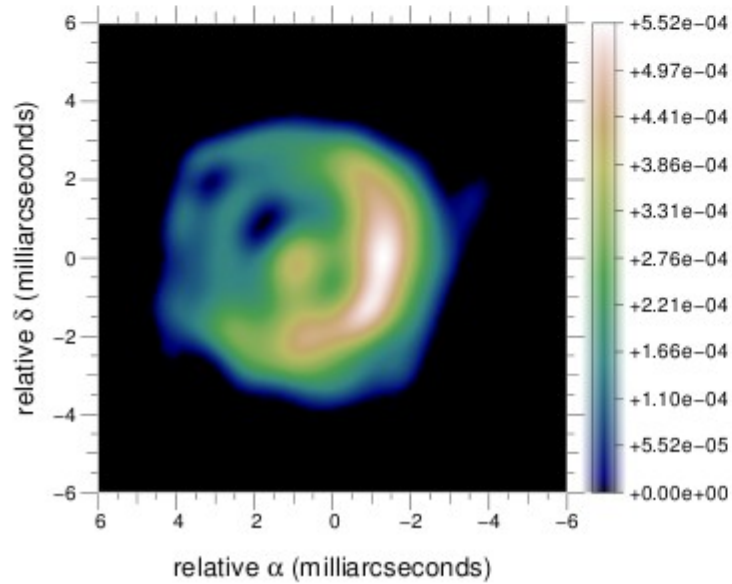
## Synthèse d'image avec différentes régularisations

objet lissé



support  
quadratique

lissage  
L2-L1

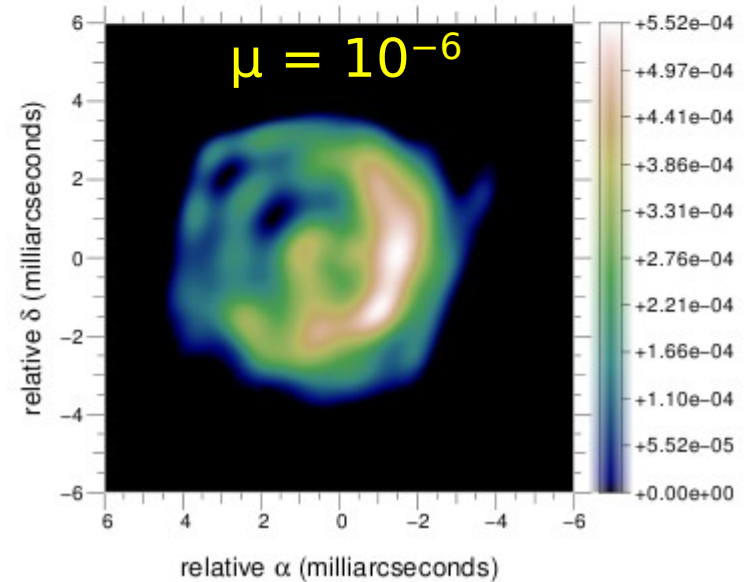
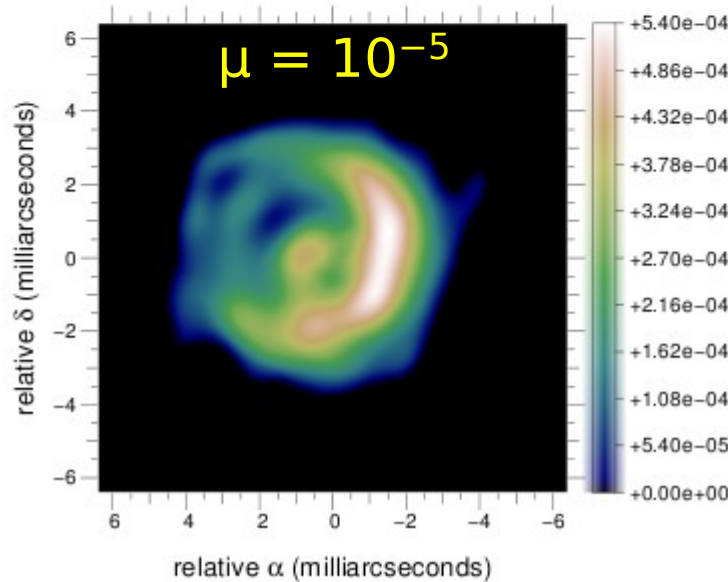
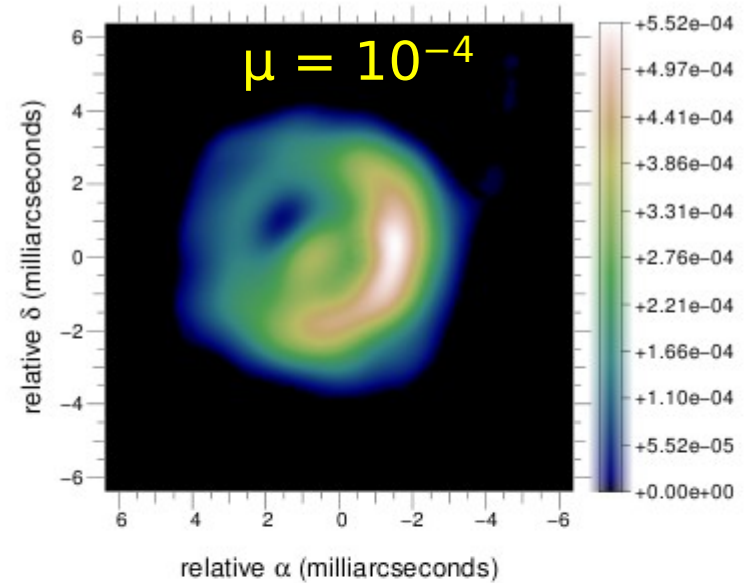
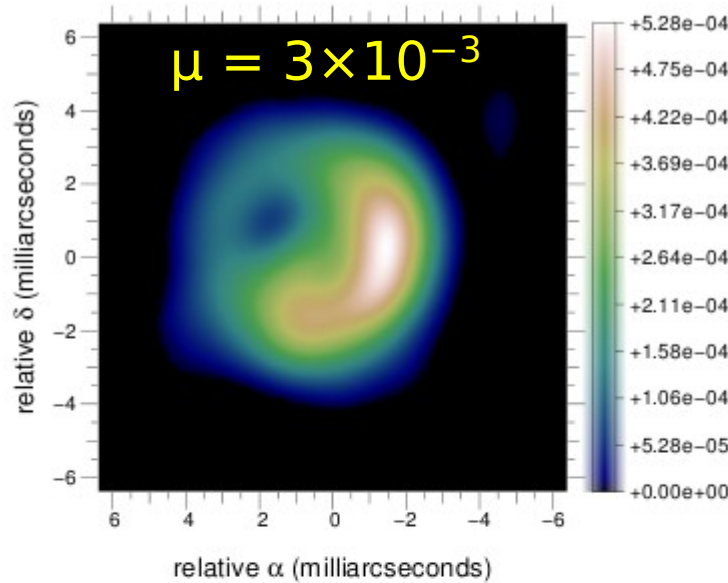


MEM

# 58 Réglage de la régularisation

lissage  
L2-L1

$$\varepsilon = 10^{-4}$$



# 59 Problème de la turbulence

mesure de **visibilité complexe instantanée** :  $V_{1,2}(t) = \hat{I}(\mathbf{v}_{1,2}) T_1^*(t) T_2(t)$

fonction de transfert d'amplitude complexe :  $T_k(t) = e^{i\phi_k(t)}$  (après calibration photométrique)

déphase aléatoire :  $\phi_k(t) = \frac{2\pi\delta_k(t)}{\lambda}$

temps de cohérence de la turbulence  $\sim 1$  ms

 en **intégrant** pendant une pause :

$$\langle V_{1,2}(t) \rangle = \hat{I}(\mathbf{v}_{1,2}) \underbrace{\langle T_1^*(t) T_2(t) \rangle}_0 = 0$$

 il faut trouver des estimateurs **non-linéaires** insensibles à la turbulence

# 60 Mesures en interférométrie optique

visibilité complexe *instantanée* :  $V_{j,k}(t) = \hat{I}(\mathbf{v}_{j,k}) T_j^*(t) T_k(t)$

$$T_k(t) = e^{i\phi_k(t)}$$

$$\langle V_{1,2}(t) \rangle = \hat{I}(\mathbf{v}_{1,2}) \langle T_1^*(t) T_2(t) \rangle = 0$$

**spectre de puissance** :  $\langle |V_{1,2}(t)|^2 \rangle = |\hat{I}(\mathbf{v}_{1,2})|^2$

**bispectre** :

$$\begin{aligned} \langle V_{1,2}(t) V_{2,3}(t) V_{3,1}(t) \rangle &= \hat{I}(\mathbf{v}_{1,2}) \hat{I}(\mathbf{v}_{2,3}) \hat{I}(\mathbf{v}_{3,1}) \langle e^{i[\phi_2(t)-\phi_1(t)]+i[\phi_3(t)-\phi_2(t)]+i[\phi_1(t)-\phi_3(t)]} \rangle \\ &= \hat{I}(\mathbf{v}_{1,2}) \hat{I}(\mathbf{v}_{2,3}) \hat{I}^*(\mathbf{v}_{1,2} + \mathbf{v}_{2,3}) \end{aligned}$$

# 61 Ingrédients algorithmiques

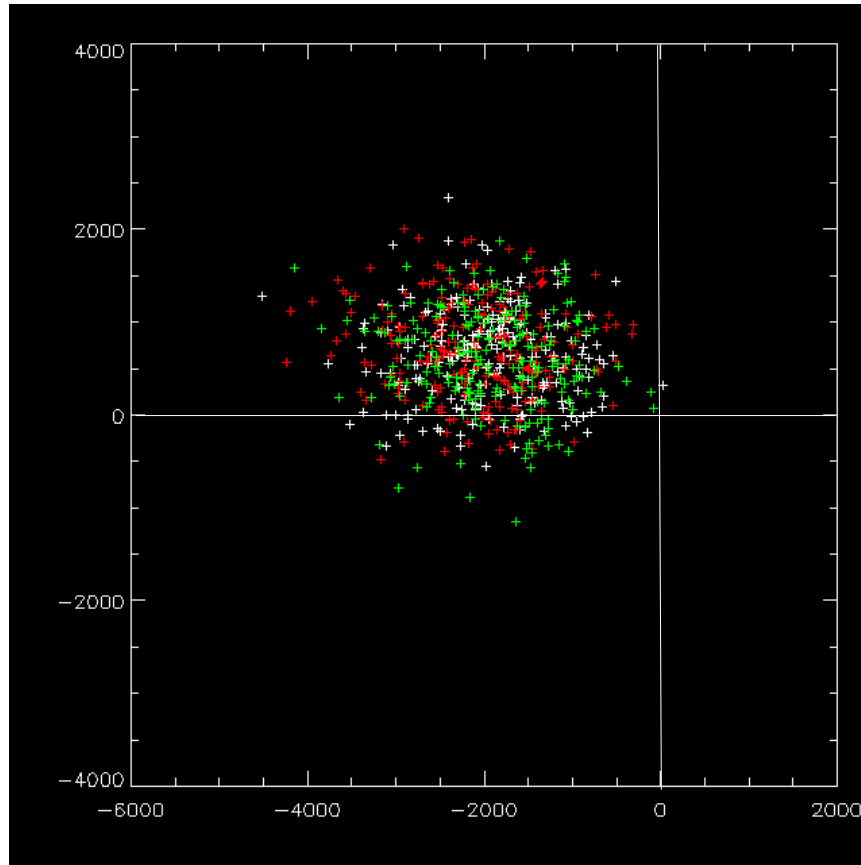
---

- difficultés
  - non-linéarités
  - pauvreté de la couverture du plan (u,v)
  - manque de mesures de phase de Fourier
    - (e.g. 1 clôture de phase pour 3 amplitudes)
- contraintes (positivité, normalisation)
- transformation de Fourier (échantillonnage spectral irrégulier)
- modèle direct et type de données
  - **linéaire** : visibilités complexes
  - **non-linéaire** : spectre de puissance, bispectre
- terme d'attache aux données
- type de régularisation
- stratégie d'optimisation
  - optimisation **locale** (initialisation + trajectoire)
  - optimisation **globale**

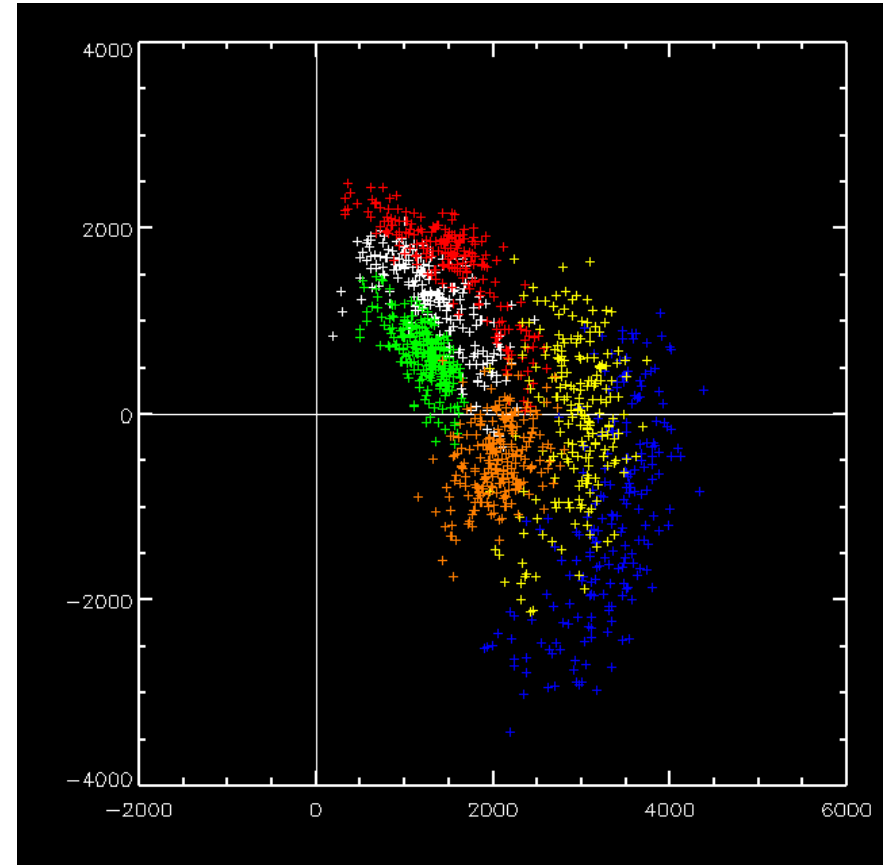
# 62

## Erreurs de mesures en interférométrie optique

low SNR



high SNR



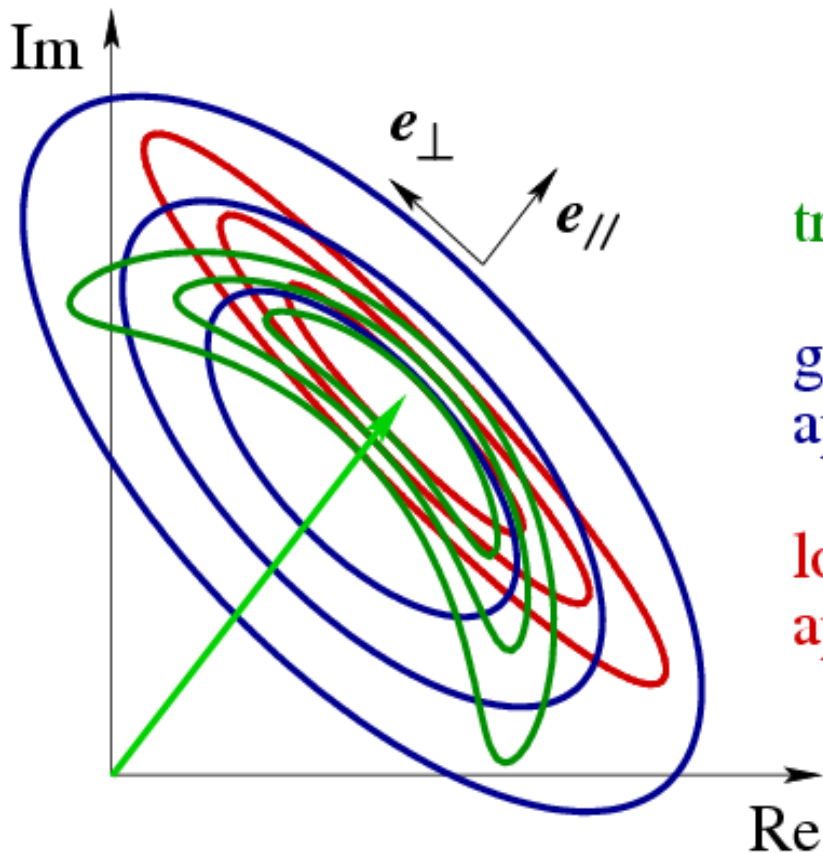
(triple product of FKV0509)

(Hummel et al.: <http://www.mrao.cam.ac.uk/~jsy1001/exchange/complex/complex.html>)

# 63

## Approximation quadratique du critère de vraisemblance

mesures complexes en interférométrie optique :



true criterion

global convex approximation

local convex approximation

(Meimon et al., 2005)

$$\text{Cov}(\rho, \phi) \simeq 0$$

module

phase

$$\chi^2 = \begin{pmatrix} \delta \rho \\ \delta \phi \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \sigma_\rho^2 & C_{\rho, \phi} \\ C_{\rho, \phi} & \sigma_\phi^2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \delta \rho \\ \delta \phi \end{pmatrix}$$

$$\simeq \frac{\delta \rho^2}{\sigma_\rho^2} + \frac{\delta \phi^2}{\sigma_\phi^2}$$

# 64 Clean

- **CLEAN** (J. A. Högbom, 1974)
  - modèle image : sources ponctuelles
  - données : visibilités complexes
  - reconstruction de type *matching pursuit*
  - objectif : trouver les  $N$  sources ponctuelles les plus significatives



$$f_{\text{prior}}(\mathbf{x}) = \mu \|\mathbf{x}\|_0 = \mu \text{Card}(\{j; x_j \neq 0\})$$

- approximativement même résultats avec (**Compressed Sensing**, E. Candès et al., 2006) :

$$f_{\text{prior}}(\mathbf{x}) = \mu \|\mathbf{x}\|_1 = \mu \sum_j |x_j|$$



# 65 Maximum d'entropie

- **MEM** (revue par R. Narayan & R. Nityananda, 1986)
  - modèle image : pixels
  - données : visibilités complexes
  - régularisation (entropie, garanti la positivité)

$$f_{\text{prior}}(\mathbf{x}) = \mu \sum_j [\bar{x}_j - x_j + x_j \log(x_j / \bar{x}_j)]$$

- reconstruction par optimisation non-linéaire dans sous-espace local de directions de recherche et ajustement de  $\mu$  à la volée (J. Skilling & R. K. Bryan, 1984)
- **BSMEM** (D. Buscher, 1994)
  - idem mais pour bispectre

# 66 Autres algorithmes...

---

- **Building-Blocks** (K.-H. Hofmann & G. Weigelt, 1993)
  - modèle image : sources ponctuelles / briques de base
  - données : bispectre
  - reconstruction itérative par linéarisation du critère puis descente le long de la plus grande pente
  - objectif : trouver les  $N$  composantes les plus significatives  
~ CLEAN appliqué au bispectre
- multi-résolution (J.-F. Giovannelli & A. Coulais, 2005)
  - quadratique (quasi L1 pour composante stellaire) + positivité + support
- MArkov Chain IMager (**MACIM**, M. Ireland *et al.*, 2006)

# 67 Encore d'autres algorithmes...

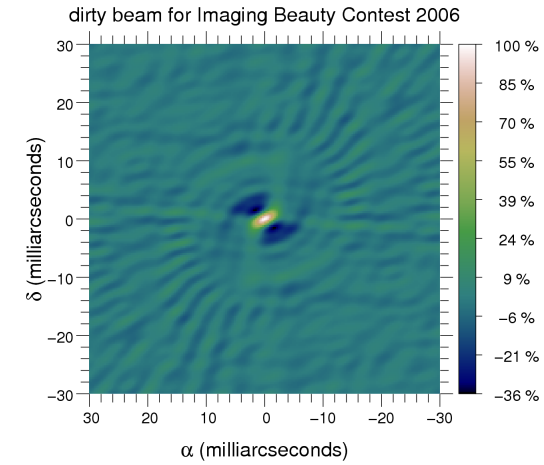
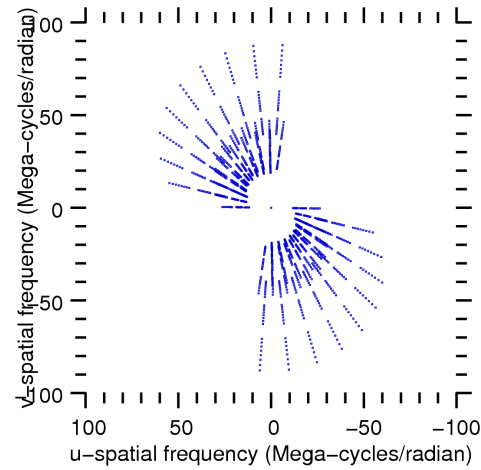
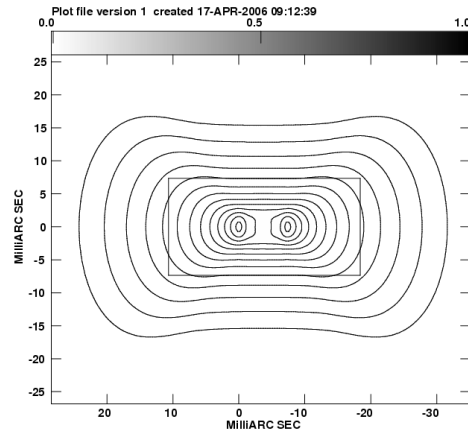
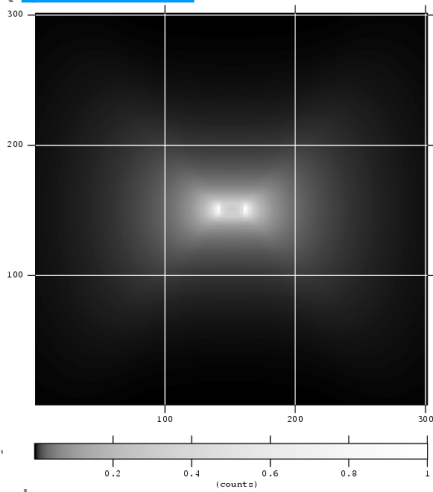
---

- **MIRA** (Thiébaud, 2002; 2008)
  - prise en compte **implicite** des dégénérescences
  - données : reconstruction sans phase possible
- **RIME / WISARD** (S. Meimon & L. Mugnier, 2004; 2006)
  - données : visibilités complexes (RIME) ou spectre de puissance et clôtures de phase (WISARD)
  - **convexification** du critère d'attache aux données
  - prise en compte **explicite** des dégénérescences
- commun :
  - modèle image : pixels
  - diverses régularisations (L2, L2-L1, support mou, ...)
  - optimisation sous contrainte de positivité par méthode quasi-Newton (VMLMB ~ L-BFGS-B, Thiébaud, 2002)

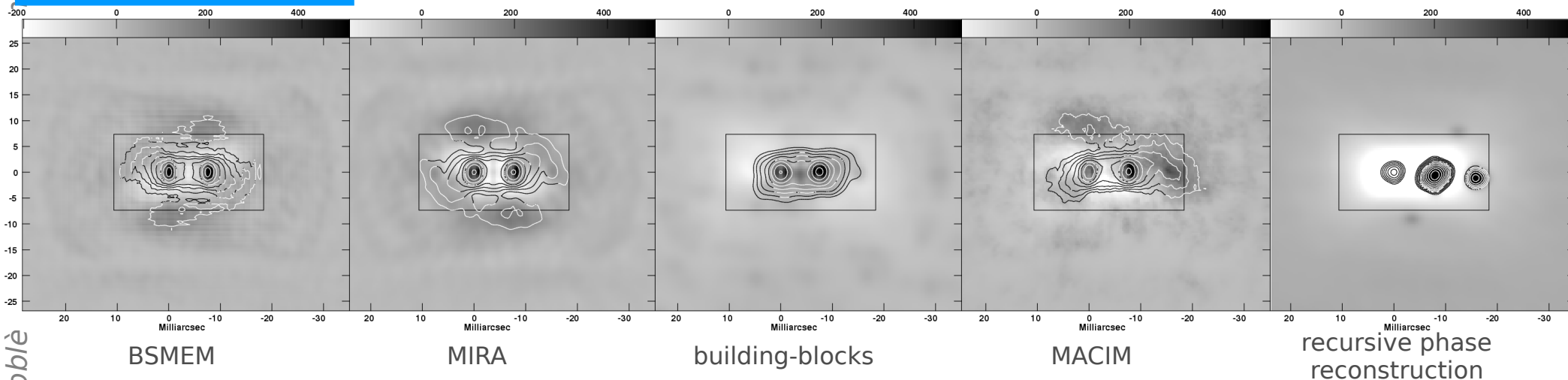
# 68 Imaging Beauty Contest 2006

objet

(Lawson *et al.*, 2006)



reconstructions



BSMEM

MIRA

building-blocks

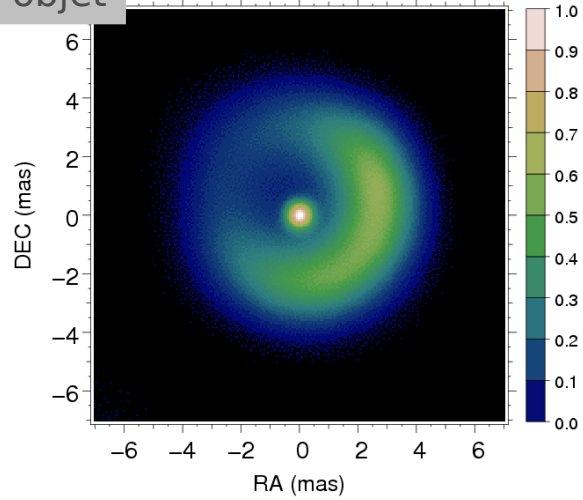
MACIM

recursive phase reconstruction

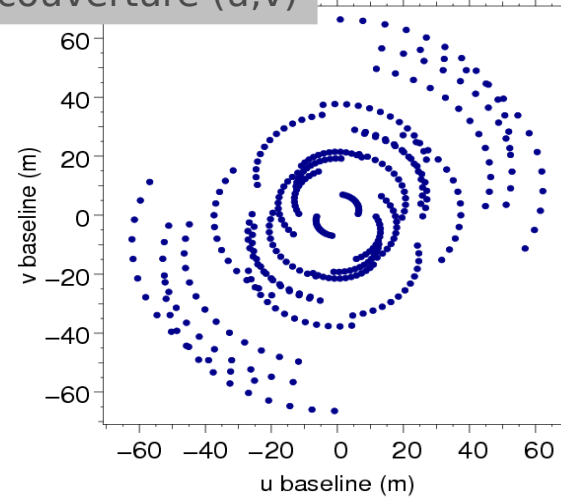
# 69

## Reconstruction avec/sans information de phase de Fourier

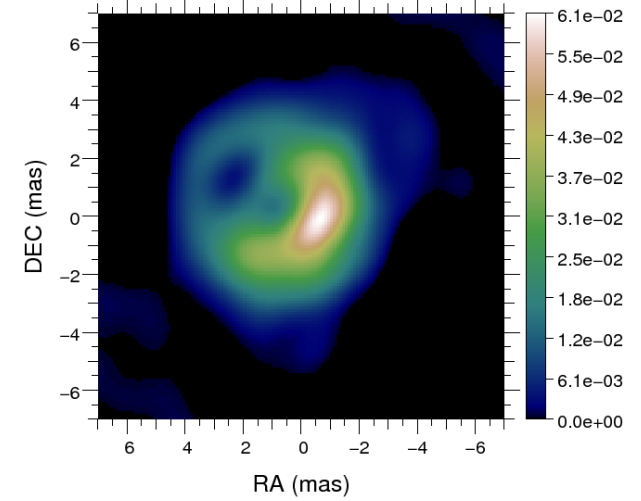
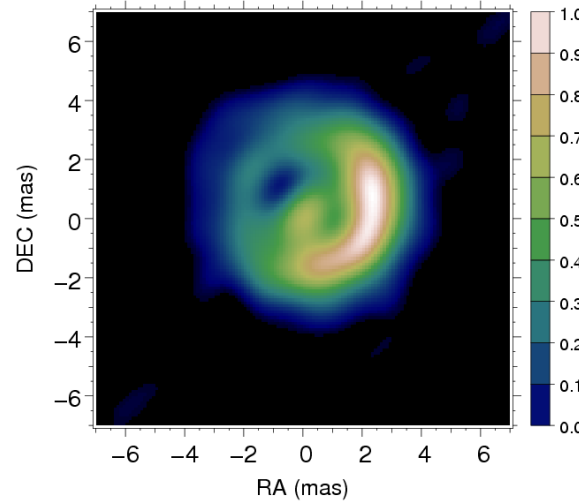
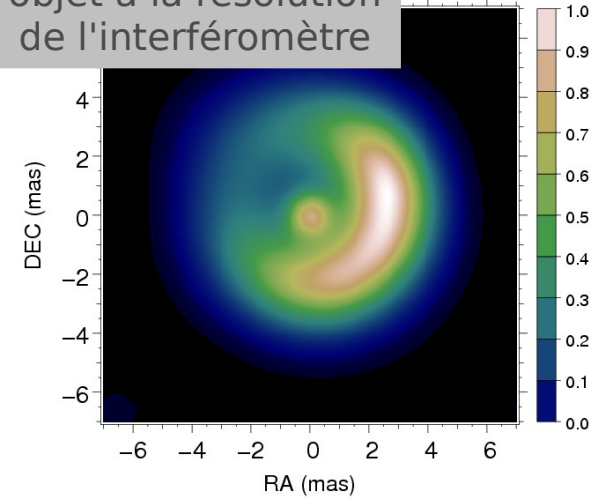
objet



couverture (u,v)

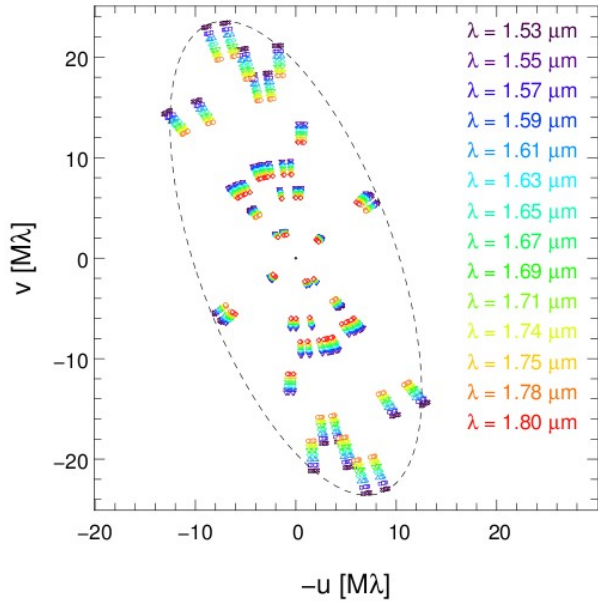


objet à la résolution de l'interféromètre



reconstruction (spectre de puissance)

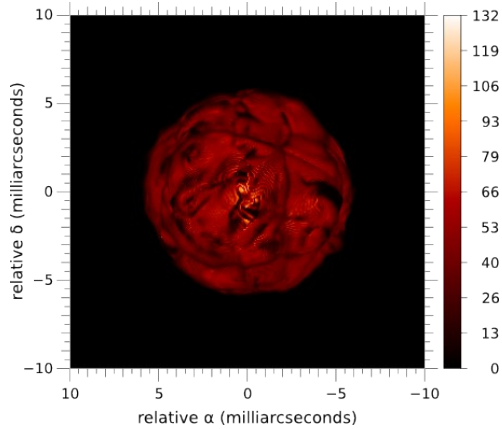
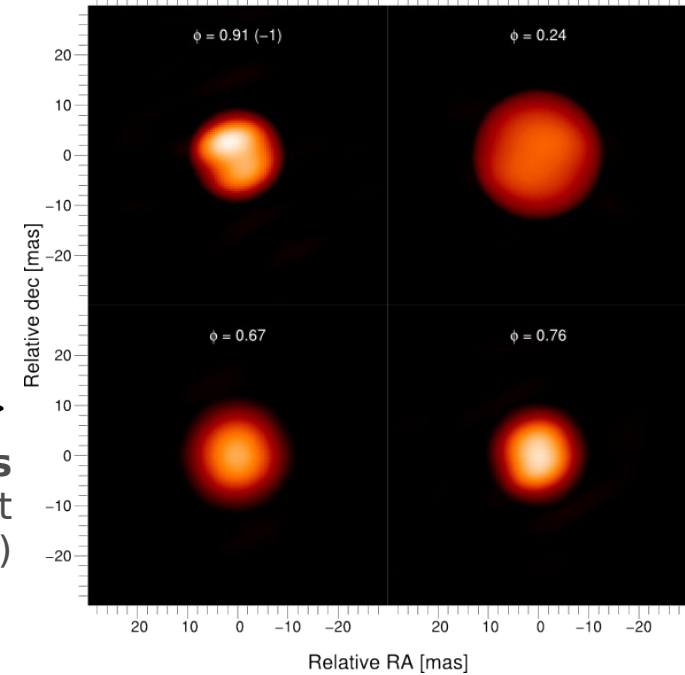
# 70 Imager la surface des étoiles



couverture plan (u,v)  
interféromètre IOTA  
(Arizona)



**$\chi$ -Cygni à  $\neq$  phases**  
(IOTA, bande H, Lacour et al. 2009)



Etoile géante (2.2 $\mu$ m,  
modèle par Bernd Freytag)

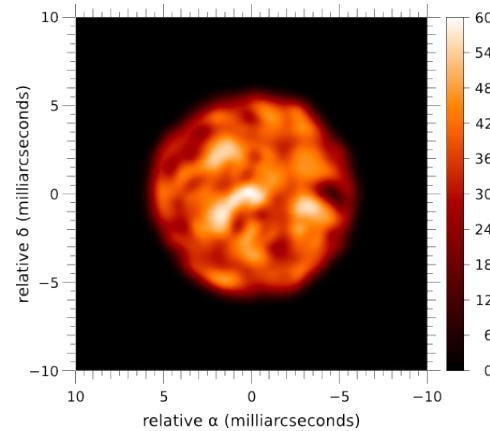


Image à la résolution de NPOI

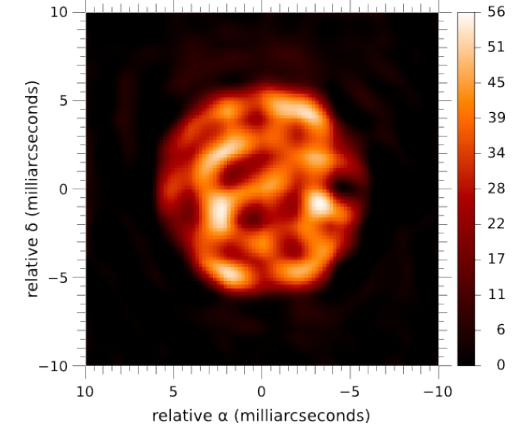
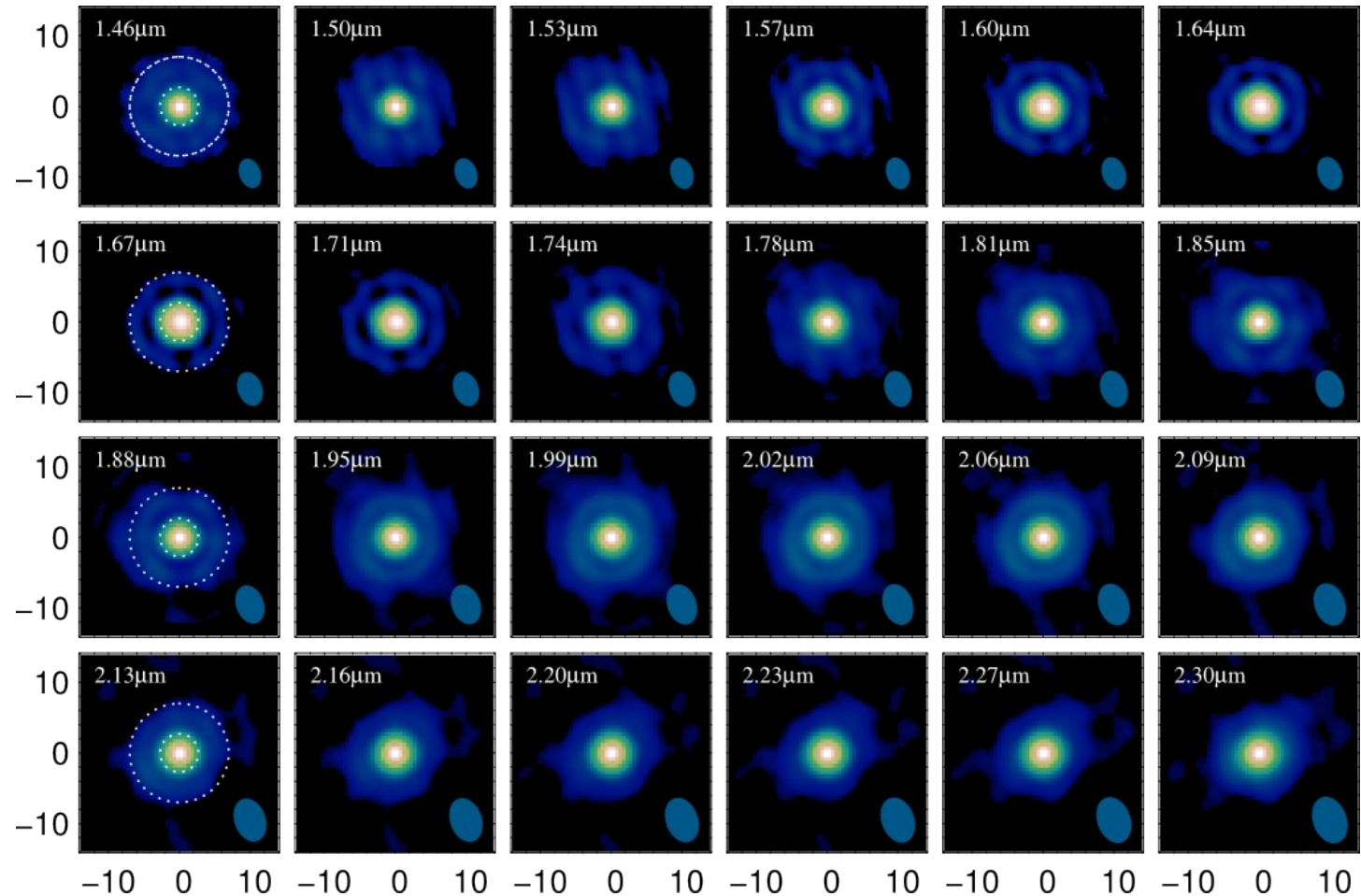
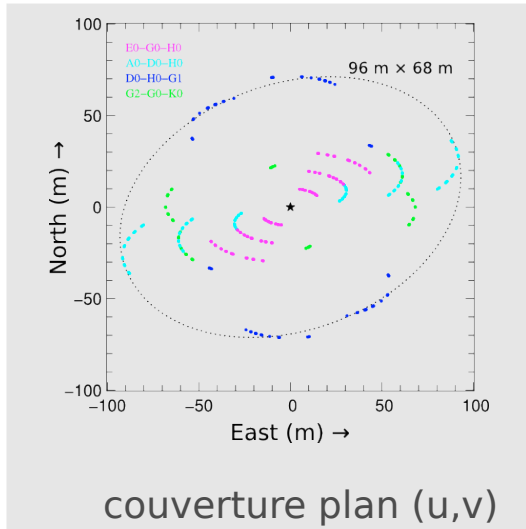


Image reconstruite par MiRA

# 71 Reconstruction multi-spectrale



**Images de TLeP.** Source : Le Bouquin *et al.*, (A&A **496**, L1, 2009), données AMBER (H & K bands), algorithme : MiRA.

# 72 Approche inverse

---

- Avantages de l'approche inverse
  - Modèle des mesures réaliste
  - Prise en compte des lacunes (interpolation et extrapolation)
  - Prise en compte de mesures hétérogènes, multidimensionnelles
  - Robustesse
  - Généralité → nombreuses applications
- Inconvénients
  - Temps de calcul (méthodes itératives)
  - Réglages (hyper-paramètres)
    - mais il y a des pistes (GCV, L-curve, MCMC, *etc.*)  
→ méthodes non-supervisées