

Diffraction inverse des ondes : quelques exemples illustrés d'applications

Marc Lambert

Département de Recherche en Électromagnétisme
Laboratoire des Signaux et Systèmes UMR8506
(CNRS-SUPELEC-Univ Paris Sud), 91192 Gif-sur-Yvette cedex, France

Plan

- 1 Introduction
 - Introduction
 - Équations de base du modèle
 - Réécriture symbolique des équations

- 2 Quelques applications
 - Gradient conjugué non linéaire
 - Level-set
 - Théorie
 - Extension au cas du contraste inconnu
 - Extension au cas 3D
 - Gradient modifié
 - Géophysique de prospection

Plan

- 1 Introduction
 - Introduction
 - Équations de base du modèle
 - Réécriture symbolique des équations

- 2 Quelques applications
 - Gradient conjugué non linéaire
 - Level-set
 - Théorie
 - Extension au cas du contrast inconnu
 - Extension au cas 3D
 - Gradient modifié
 - Géophysique de prospection

Outline

- 1 Introduction
 - Introduction
 - Équations de base du modèle
 - Réécriture symbolique des équations

- 2 Quelques applications
 - Gradient conjugué non linéaire
 - Level-set
 - Théorie
 - Extension au cas du contrast inconnu
 - Extension au cas 3D
 - Gradient modifié
 - Géophysique de prospection

« La science de l'Inversion des Ondes »

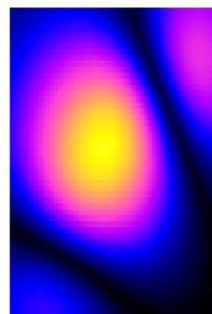
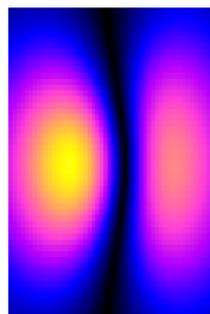
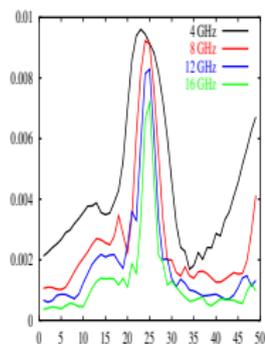
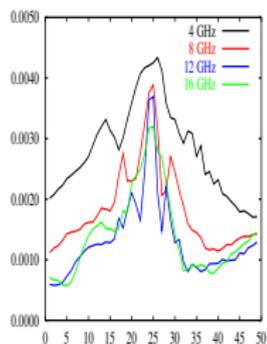
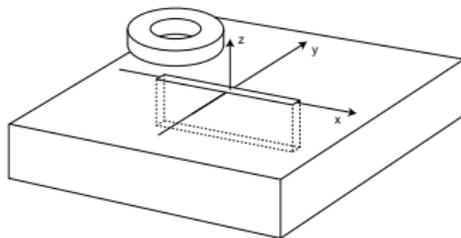
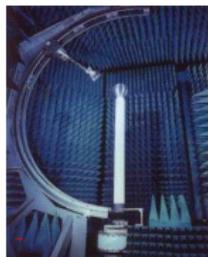
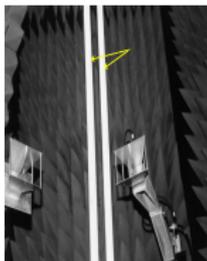
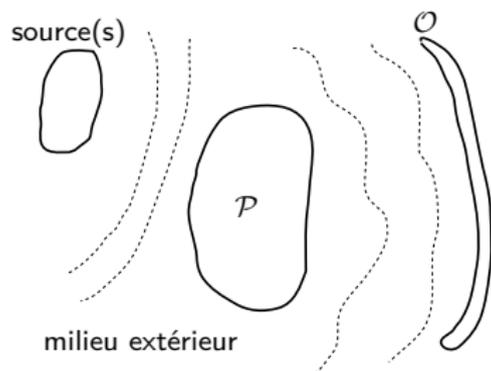


Schéma général



Hypothèses

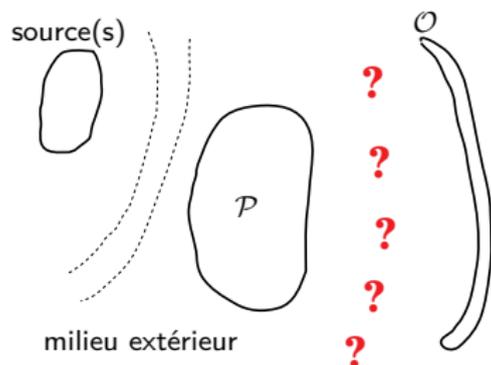
- Sources harmoniques : $\exp(-j\omega t)$
- Milieux homogènes, linéaires, isotropes

$$\mathcal{O} = \mathcal{L}(\mathcal{P}) \quad \mathcal{L} : \text{« lois de la nature »} \quad (1)$$

$$\simeq \mathcal{M}(\mathcal{P}) \quad \mathcal{M} : \text{modèle mathématique approché} \quad (2)$$

- **Problème direct** : trouver \mathcal{O} connaissant $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ et \mathcal{P}
→ problème linéaire bien posé
- **Problème inverse** : trouver \mathcal{P} connaissant $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ et \mathcal{O}
→ problème non linéaire mal posé

Schéma général



Hypothèses

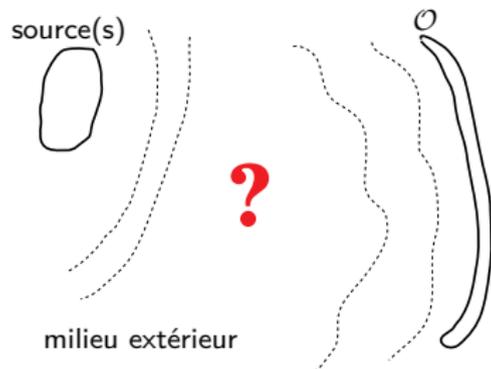
- Sources harmoniques : $\exp(-j\omega t)$
- Milieux homogènes, linéaires, isotropes

$$\mathcal{O} = \mathcal{L}(\mathcal{P}) \quad \mathcal{L} : \text{« lois de la nature »} \quad (1)$$

$$\simeq \mathcal{M}(\mathcal{P}) \quad \mathcal{M} : \text{modèle mathématique approché} \quad (2)$$

- **Problème direct** : trouver \mathcal{O} connaissant $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ et \mathcal{P}
→ problème linéaire bien posé
- **Problème inverse** : trouver \mathcal{P} connaissant $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ et \mathcal{O}
→ problème non linéaire mal posé

Schéma général



Hypothèses

- Sources harmoniques : $\exp(-j\omega t)$
- Milieux homogènes, linéaires, isotropes

$$\mathcal{O} = \mathcal{L}(\mathcal{P}) \quad \mathcal{L} : \text{« lois de la nature »} \quad (1)$$

$$\simeq \mathcal{M}(\mathcal{P}) \quad \mathcal{M} : \text{modèle mathématique approché} \quad (2)$$

- **Problème direct** : trouver \mathcal{O} connaissant $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ et \mathcal{P}
→ problème linéaire bien posé
- **Problème inverse** : trouver \mathcal{P} connaissant $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ et \mathcal{O}
→ problème non linéaire mal posé

Le problème inverse mal-posé

Le caractère mal-posé « théorique »

- existence
- unicité
- continuité

Le caractère mal-posé « pratique »

- limitation des données
- imperfection des mesures, des modèles
- discrétisation des équations

quelques idées de remèdes

- incorporation *a priori* d'information sur la solution
- ajout de termes régularisants
- diversité des informations

Quelques idées d'applications

Contrôle non-destructif et imagerie de structures et de matériaux interrogés par un rayonnement test, ou « la science de l'Inversion des Ondes »

- Signaux porteurs d'information complexe sur un **objet** (dans un environnement complexe) interagissant avec l'**onde** ;
- Inversion comme processus de transformation des signaux en une forme intelligible apportant une information sur cet **objet** (e.g., une image) ;

Applications socio-économiques importantes et stratégiques

- Contrôle non destructif (structure, véhicule, ...) ;
- Caractérisation de systèmes rayonnants (CEM, MFP, ...)
- Cartographie d'un sol (cables, tuyaux, mines, pollution, cavité, ... ;
- Géophysique de prospection ;
- Détermination de milieux artificiels (composites, ...) ;
- ...

Inversion (les nécessités)

- Une base théorique saine [explicitée dans des situations canoniques]
- Rapides / puissance de calcul [disponible] [prévues]
- Robustes / erreurs de modèles ou de données [fortes]
- Précis [prescription, estimation de précision] selon des règles [établies] [comprises]
- Validés par des simulations numériques et des mesures [reproductibles] en situations contrôlées
- Capables de s'appliquer à des configurations complexes [inhomogénéité] [dispersion] [anisotropie] [dépolarisation, conversion de modes] [connaissances d'environnement et mesures limitées]

et ce indépendamment de la nature de l'onde
[acoustique ou électromagnétique]
[diffusif ou propagatif]
[temporel (t) ou fréquentiel (ω)]

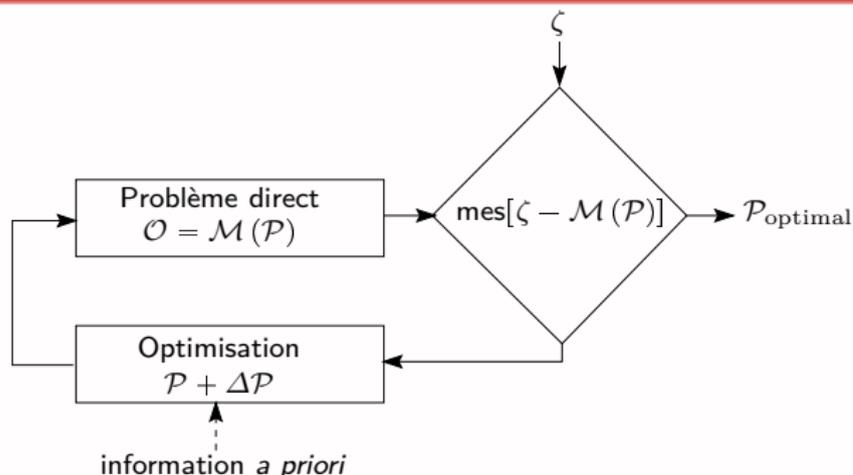
Oui mais comment ?

Problème inverse : $\mathcal{P} = \mathcal{M}^{-1}(\mathcal{O})$, $\mathcal{M} \approx \mathcal{L}$

Le schéma idéal

Formulation analytique de \mathcal{M}^{-1}

Le schéma non-idéal



L'optimisation locale déterministe (mais pas seulement)

Choix historique et pratique

But : chercher \mathcal{P} tel que $\text{mes}[\zeta - \mathcal{M}(\mathcal{P})]$ soit minimale

Principales caractéristiques

- Rapidité de convergence
- Minimum local (global)
- Contrainte sur la fonction coût

Choix de la fonction coût

- Dérivable / \mathcal{P}
- Incorporer des contraintes

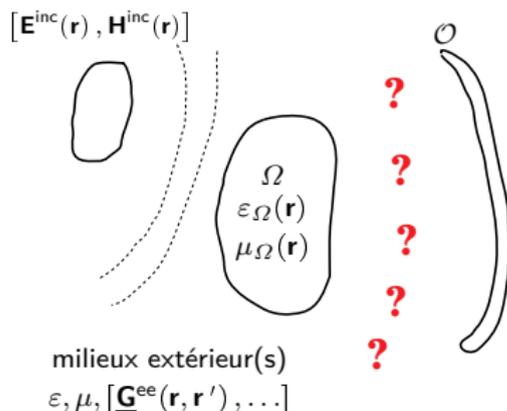
$$f(\mathcal{P}) = \|\zeta - \mathcal{M}(\mathcal{P})\|^2 + \underbrace{\mathcal{L}(\mathcal{P})}_{\text{(régularisations)}}$$

Outline

- 1 **Introduction**
 - Introduction
 - **Équations de base du modèle**
 - Réécriture symbolique des équations

- 2 **Quelques applications**
 - Gradient conjugué non linéaire
 - Level-set
 - Théorie
 - Extension au cas du contrast inconnu
 - Extension au cas 3D
 - Gradient modifié
 - Géophysique de prospection

Les équations de base du modèle \mathcal{M}



Hypothèses

- Sources harmoniques : $\exp(-j\omega t)$
- Milieux homogènes, linéaires, isotropes

Les étapes

1. Équations de Maxwell
2. Conditions de rayonnement à l' ∞
3. Conditions aux limites
4. Théorème de Green

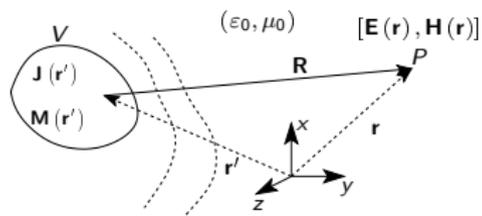
La formulation intégrale

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{r}) + k^2 \int_{\Omega} \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \chi^e(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' - j\omega\mu_0 \int_{\Omega} \underline{\mathbf{G}}^{em}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \chi^m(\mathbf{r}') \mathbf{H}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{r}) - k^2 \int_V \underline{\mathbf{G}}^{mm}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \chi^m(\mathbf{r}') \mathbf{H}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' + j\omega\varepsilon_0 \int_V \underline{\mathbf{G}}^{me}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \chi^e(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'$$

avec $\chi^e(\mathbf{r}) = \frac{[\varepsilon_{\Omega}(\mathbf{r}) - \varepsilon]}{\varepsilon}$ et $\chi^m(\mathbf{r}) = \frac{[\mu_{\Omega}(\mathbf{r}) - \mu]}{\mu}$

Les équations de base du modèle \mathcal{M}



Hypothèses

- Harmonique : $\exp(-j\omega t)$
- Milieux homogènes, linéaires, isotropes

Sources **Électriques** connues et localisées dans V : $\mathbf{J}(\mathbf{r}), \rho(\mathbf{r})$
 " **Magnétiques** " " $\mathbf{M}(\mathbf{r}), \rho_m(\mathbf{r})$

Équations de Maxwell + relations constitutives + hypothèses

- Équations de conservation des charges

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) + j\omega\rho(\mathbf{r}) = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}) + j\omega\rho_m(\mathbf{r}) = 0$$

- Équations gouvernant le champ rayonné (Maxwell)

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) + j\omega\mu_0\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\mathbf{M}(\mathbf{r})$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) - j\omega\epsilon_0\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{J}(\mathbf{r})$$

Des équations de propagation

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) - k^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = j\omega\mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}) - \nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{r}) \quad (3)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) - k^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) = -j\omega\epsilon_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}) + \nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (4)$$

D'autres équations de propagation

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{r}) - \frac{1}{j\omega\epsilon_0} (k^2 + \nabla \nabla \cdot) \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (5)$$

$$\Delta \mathbf{H}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}) - \frac{1}{j\omega\mu_0} (k^2 + \nabla \nabla \cdot) \mathbf{M}(\mathbf{r}) \quad (6)$$

Condition d'unicité du problème

- Condition de rayonnement à l'infini (Silver-Müller)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) - \frac{1}{j\omega\epsilon_0} \mathbf{u} \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}|}\right), |\mathbf{r}| \rightarrow \infty \quad (7)$$

- Condition d'énergie finie (Meixner)

$$\int_{\Omega} |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} < +\infty, \quad \forall \Omega (< \infty) \neq \mathcal{V} \quad (8)$$

$$\int_{\Omega} |\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} < +\infty$$

Formulations intégrales du champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r})$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) - k^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = j\omega\mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}) - \nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{r}) \quad (9)$$

Les étapes

- 1 Déf. dyade de Green électrique-électrique $\underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ (*Réponse impulsionnelle*)

$$\nabla \times \nabla \times \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - k^2 \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathbf{I} \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (10)$$

- 2 Déf. dyade de Green électrique-magnétique $\underline{\mathbf{G}}^{em}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ (*Réponse impulsionnelle*)

$$\nabla \times \nabla \times \underline{\mathbf{G}}^{em}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - k^2 \underline{\mathbf{G}}^{em}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \nabla \times [\mathbf{I} \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] \quad (11)$$

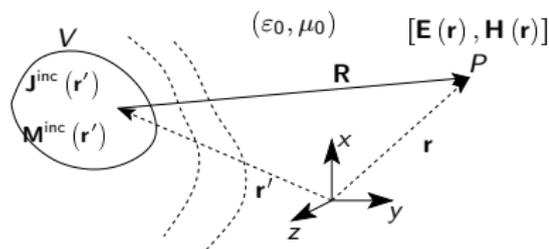
- 3 Application du théorème de Green + longues manipulations

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = j\omega\mu_0 \int_V \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' - \int_V \underline{\mathbf{G}}^{em}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (12)$$

+ Principe de dualité [$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \rightarrow -\mathbf{H}(\mathbf{r}), \epsilon_0 \rightarrow \mu_0, \mathbf{J}(\mathbf{r}') \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{r}')$]

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -j\omega\epsilon_0 \int_V \underline{\mathbf{G}}^{mm}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' + \int_V \underline{\mathbf{G}}^{me}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (13)$$

Rayonnements de sources électromagnétiques (résumé)



Hypothèses

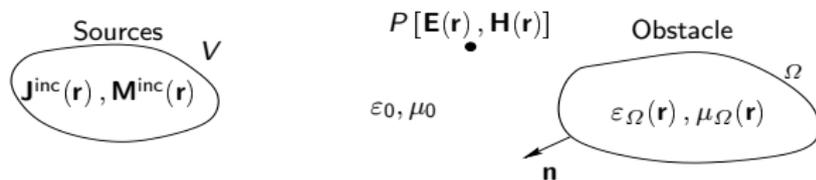
- Harmonique : $\exp(-j\omega t)$
- Milieux homogènes, linéaires, isotropes

Sources " **Électriques** connues et localisées dans V : $\mathbf{J}^{\text{inc}}(\mathbf{r})$
" **Magnétiques** " $\mathbf{M}^{\text{inc}}(\mathbf{r})$

$$\mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{r}) = j\omega\mu_0 \int_V \underline{\mathbf{G}}^{\text{ee}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}^{\text{inc}}(\mathbf{r}') \, d\mathbf{r}' - \int_V \underline{\mathbf{G}}^{\text{em}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{M}^{\text{inc}}(\mathbf{r}') \, d\mathbf{r}'$$

$$\mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{r}) = -j\omega\epsilon_0 \int_V \underline{\mathbf{G}}^{\text{mm}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{M}^{\text{inc}}(\mathbf{r}') \, d\mathbf{r}' + \int_V \underline{\mathbf{G}}^{\text{me}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}^{\text{inc}}(\mathbf{r}') \, d\mathbf{r}'$$

Rayonnement de sources en présence d'obstacle(s)



Équations de Maxwell en milieux inhomogènes

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) + j\omega \boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}) \mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\mathbf{M}^{\text{inc}}(\mathbf{r})$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) - j\omega \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{J}^{\text{inc}}(\mathbf{r})$$

$$\text{avec } \boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \mu_{\Omega}(\mathbf{r}) & \forall \mathbf{r} \in \Omega \\ \mu_0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ et } \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \epsilon_{\Omega}(\mathbf{r}) & \forall \mathbf{r} \in \Omega \\ \epsilon_0 & \text{sinon} \end{cases}$$

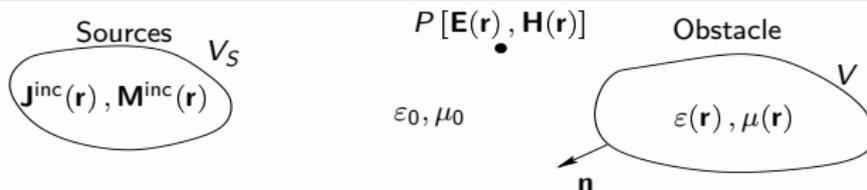
Équations de Maxwell en milieux homogènes

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) + j\omega \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\mathbf{M}^{\text{inc}}(\mathbf{r}) - j\omega [\boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}) - \mu_0] \mathbf{H}(\mathbf{r})$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) - j\omega \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{J}^{\text{inc}}(\mathbf{r}) + j\omega [\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{r}) - \epsilon_0] \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = j\omega [\boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}) - \mu_0] \mathbf{H}(\mathbf{r}) \text{ et } \mathbf{J}(\mathbf{r}) = j\omega [\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{r}) - \epsilon_0] \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

Problème original



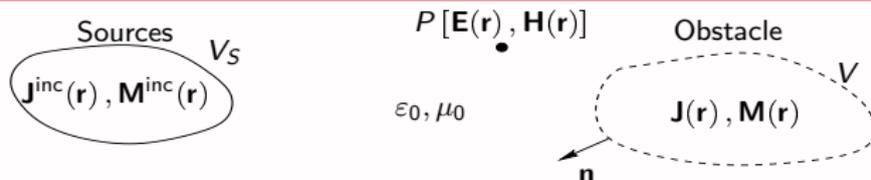
Équations de Maxwell en milieux inhomogènes

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) + j\omega \mu(\mathbf{r}) \mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\mathbf{M}^{\text{inc}}(\mathbf{r}) \quad (14)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) - j\omega \epsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{J}^{\text{inc}}(\mathbf{r}) \quad (15)$$

$$\text{avec } \mu(\mathbf{r}) = \begin{cases} \mu_{\Omega}(\mathbf{r}) & \forall \mathbf{r} \in \Omega \\ \mu_0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ et } \epsilon(\mathbf{r}) = \begin{cases} \epsilon_{\Omega}(\mathbf{r}) & \forall \mathbf{r} \in \Omega \\ \epsilon_0 & \text{sinon} \end{cases}$$

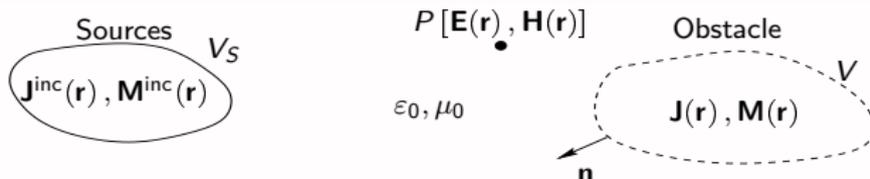
Problème équivalent



Équations de Maxwell en milieux homogènes

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) + j\omega\mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= -\mathbf{M}^{\text{inc}}(\mathbf{r}) - \underbrace{j\omega [\boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}) - \mu_0] \mathbf{H}(\mathbf{r})}_{\mathbf{M}(\mathbf{r})} \\ \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) - j\omega\epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \mathbf{J}^{\text{inc}}(\mathbf{r}) + \underbrace{j\omega [\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{r}) - \epsilon_0] \mathbf{E}(\mathbf{r})}_{\mathbf{J}(\mathbf{r})} \end{aligned}$$

Problème équivalent



Équations de Maxwell en milieux homogènes

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) + j\omega\mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= -\mathbf{M}^{\text{inc}}(\mathbf{r}) - \underbrace{j\omega [\boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}) - \mu_0] \mathbf{H}(\mathbf{r})}_{\mathbf{M}(\mathbf{r})} \\ \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) - j\omega\epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \underbrace{\mathbf{J}^{\text{inc}}(\mathbf{r}) + j\omega [\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{r}) - \epsilon_0] \mathbf{E}(\mathbf{r})}_{\mathbf{J}(\mathbf{r})} \end{aligned}$$

Équations de propagation en milieux homogènes $[\mathbf{E}(\mathbf{r})]$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) - k^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = j\omega\mu_0 \mathbf{J}^{\text{inc}}(\mathbf{r}) - \nabla \times \mathbf{M}^{\text{inc}}(\mathbf{r}) + j\omega\mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}) - \nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{r})$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{r}) + j\omega\mu_0 \int_V \underline{\mathbf{G}}^{\text{ee}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' - \int_V \underline{\mathbf{G}}^{\text{em}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'$$

Equations intégrales

Équations de propagation en milieux homogènes $[\mathbf{E}(\mathbf{r})]$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{r}) + k^2 \int_V \underline{\mathbf{G}}^{\text{ee}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \chi^{\text{e}}(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' - j\omega\mu_0 \int_V \underline{\mathbf{G}}^{\text{em}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \chi^{\text{m}}(\mathbf{r}') \mathbf{H}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (14)$$

$$\text{avec } \chi^{\text{e}}(\mathbf{r}) = \frac{[\epsilon(\mathbf{r}) - \epsilon_0]}{\epsilon_0} \text{ et } \chi^{\text{m}}(\mathbf{r}) = \frac{[\mu(\mathbf{r}) - \mu_0]}{\mu_0}$$

Équations d'observation (ou de données), $\forall \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ équation de Fredholm de 1^{ère} espèce

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{r}) + \overbrace{k^2 \int_{\Omega} \underline{\mathbf{G}}^{\text{ee}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \chi^{\text{e}}(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}') \, d\mathbf{r}' - j\omega\mu_0 \int_{\Omega} \underline{\mathbf{G}}^{\text{em}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \chi^{\text{m}}(\mathbf{r}') \mathbf{H}(\mathbf{r}') \, d\mathbf{r}'}^{\mathbf{E}^{\text{dif}}(\mathbf{r})}$$

Équations d'observation (ou de données), $\forall \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ équation de Fredholm de 1^{ère} espèce

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{r}) + \overbrace{k^2 \int_{\Omega} \underline{\mathbf{G}}^{\text{ee}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \chi^{\text{e}}(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}') \, d\mathbf{r}' - j\omega\mu_0 \int_{\Omega} \underline{\mathbf{G}}^{\text{em}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \chi^{\text{m}}(\mathbf{r}') \mathbf{H}(\mathbf{r}') \, d\mathbf{r}'}^{\mathbf{E}^{\text{dif}}(\mathbf{r})}$$

Équations d'état (ou de couplage), $\forall \mathbf{r} \in \Omega$ équation de Fredholm de 2^{ième} espèce

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{r}) + k^2 \int_{\Omega} \underline{\mathbf{G}}^{\text{ee}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \chi^{\text{e}}(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}') \, d\mathbf{r}' - j\omega\mu_0 \int_{\Omega} \underline{\mathbf{G}}^{\text{em}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \chi^{\text{m}}(\mathbf{r}') \mathbf{H}(\mathbf{r}') \, d\mathbf{r}'$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{r}) - k^2 \int_{\Omega} \underline{\mathbf{G}}^{\text{mm}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \chi^{\text{m}}(\mathbf{r}') \mathbf{H}(\mathbf{r}') \, d\mathbf{r}' + j\omega\epsilon_0 \int_{\Omega} \underline{\mathbf{G}}^{\text{me}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \chi^{\text{e}}(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}') \, d\mathbf{r}'$$

Équations d'observation (ou de données), $\forall \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ équation de Fredholm de 1^{ère} espèce

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{r}) + \overbrace{k^2 \int_{\Omega} \underline{\mathbf{G}}^{\text{ee}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \chi^e(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' - j\omega\mu_0 \int_{\Omega} \underline{\mathbf{G}}^{\text{em}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \chi^m(\mathbf{r}') \mathbf{H}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'}^{\mathbf{E}^{\text{dif}}(\mathbf{r})}$$

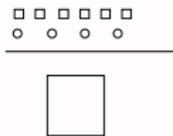
Équations d'état (ou de couplage), $\forall \mathbf{r} \in \Omega$ équation de Fredholm de 2^{ème} espèce

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{r}) + k^2 \int_{\Omega} \underline{\mathbf{G}}^{\text{ee}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \chi^e(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' - j\omega\mu_0 \int_{\Omega} \underline{\mathbf{G}}^{\text{em}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \chi^m(\mathbf{r}') \mathbf{H}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'$$

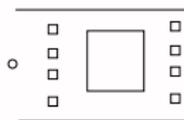
$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{r}) - k^2 \int_{\Omega} \underline{\mathbf{G}}^{\text{mm}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \chi^m(\mathbf{r}') \mathbf{H}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' + j\omega\epsilon_0 \int_{\Omega} \underline{\mathbf{G}}^{\text{me}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \chi^e(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'$$

Rôle des dyades de Green $\underline{\mathbf{G}}^{\text{ee}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, $\underline{\mathbf{G}}^{\text{em}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$...

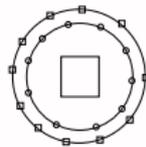
Modification de la configuration



stratifiée (plan, cylindrique)



guidée



espace libre

Quelques grandeurs physiques

Quelques grandeurs caractéristiques

- Fréquence : $f \in [1 \text{ Hz}, 10 \text{ GHz}]$
- Pulsation : $\omega = 2\pi f$
- Permittivité (modèle maxwellien, il en existe d'autres) : $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r + j\sigma/\omega$
 - ε_0 : perméabilité de l'air
 - ε_r : permittivité relative du milieu $1 \text{ (air)} \leq \varepsilon_r \leq 80 \text{ (eau)}$
 - σ : conductivité du milieu (en S m^{-1}) $0 \leq \sigma \leq 10^8$
- Perméabilité : $\mu = \mu_0 \mu_r$
 - μ_0 : perméabilité de l'air (H m^{-1})
 - μ_r : perméabilité relative du milieu $0 \leq \mu_r \leq 10^5$

Quelques autres grandeurs caractéristiques

- Nombre d'onde (m^{-1}) : $k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \mu_r \varepsilon_r + j\omega \sigma \mu_0 \mu_r$
- Longueur d'onde (m) : $\lambda = 2\pi / \sqrt{\Re(k^2)}$
- Épaisseur de peau (m) : $\delta = \sqrt{2/\omega \sigma \mu_0 \mu_r}$ (ssi $\sigma \neq 0$)

Quelques définitions et approximations

Régime de propagation ?

$$k^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \mu_r \varepsilon_r + j\omega \sigma \mu_0 \mu_r$$

Régime propagatif

$$\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \mu_r \varepsilon_r \gg j\omega \sigma \mu_0 \mu_r$$

Grandeur d'intérêt : λ

Régime diffusif

$$\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \mu_r \varepsilon_r \ll j\omega \sigma \mu_0 \mu_r$$

Grandeur d'intérêt : δ

Ex : cuivre $\sigma = 59.6 \times 10^6 \text{ S m}^{-1}$

f	50 Hz	10 kHz	1 MHz
δ	9.38 mm	0.66 mm	66 μm

Caractérisation du problème de diffraction

L : taille caractéristique du diffracteur

Basse fréquence

$$L \ll \lambda \text{ ou } \delta$$

Résonance

$$L \simeq \lambda \text{ ou } \delta$$

Haute fréquence

$$L \gg \lambda \text{ ou } \delta$$

Quelques définitions et approximations

Régime de propagation ?

$$k^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \mu_r \varepsilon_r + j\omega \sigma \mu_0 \mu_r$$

Régime propagatif

$$\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \mu_r \varepsilon_r \gg j\omega \sigma \mu_0 \mu_r$$

Grandeur d'intérêt : λ

Régime diffusif

$$\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \mu_r \varepsilon_r \ll j\omega \sigma \mu_0 \mu_r$$

Grandeur d'intérêt : δ

Ex : cuivre $\sigma = 59.6 \times 10^6 \text{ S m}^{-1}$

f	50 Hz	10 kHz	1 MHz
δ	9.38 mm	0.66 mm	66 μm

Caractérisation du problème de diffraction

L : taille caractéristique du diffracteur

Basse fréquence

$$L \ll \lambda \text{ ou } \delta$$

Résonance

$$L \simeq \lambda \text{ ou } \delta$$

Haute fréquence

$$L \gg \lambda \text{ ou } \delta$$

Outline

- 1 Introduction
 - Introduction
 - Équations de base du modèle
 - Réécriture symbolique des équations
- 2 Quelques applications
 - Gradient conjugué non linéaire
 - Level-set
 - Théorie
 - Extension au cas du contrast inconnu
 - Extension au cas 3D
 - Gradient modifié
 - Géophysique de prospection

Réécriture symbolique des équations

Équations

- d'état ou de couplage : $u^{\text{inc}} = u - \mathcal{G}_\Omega \chi u$
- d'observation : $u^{\text{dif}} = \mathcal{G}_S \chi u$

Équations d'état (ou de couplage), $\forall \mathbf{r} \in \Omega$

équation de Fredholm de 2^{ième} espèce

$$\mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) - k^2 \int_{\Omega} \underline{\mathcal{G}}^{\text{ee}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \chi^{\text{e}}(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' + j\omega\mu_0 \int_{\Omega} \underline{\mathcal{G}}^{\text{em}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \chi^{\text{m}}(\mathbf{r}') \mathbf{H}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'$$

$$\mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}(\mathbf{r}) + k^2 \int_{\Omega} \underline{\mathcal{G}}^{\text{mm}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \chi^{\text{m}}(\mathbf{r}') \mathbf{H}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' - j\omega\varepsilon_0 \int_{\Omega} \underline{\mathcal{G}}^{\text{me}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \chi^{\text{e}}(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{E}^{\text{inc}} \\ \mathbf{H}^{\text{inc}} \end{bmatrix}}_{u_{\text{inc}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix}}_u - \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\mathcal{G}}^{\text{ee}} & \underline{\mathcal{G}}^{\text{me}} \\ \underline{\mathcal{G}}^{\text{em}} & \underline{\mathcal{G}}^{\text{mm}} \end{bmatrix}}_{\mathcal{G}_\Omega} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \chi^{\text{e}} & 0 \\ 0 & \chi^{\text{m}} \end{bmatrix}}_{\chi} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix}$$

$$\text{avec } \underline{\mathcal{G}}^{\text{ee}} \dots = k^2 \int_{\Omega} \underline{\mathcal{G}}^{\text{ee}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \dots d\mathbf{r}'$$

Réécriture symbolique des équations

Équations

- d'état ou de couplage : $u^{\text{inc}} = u - \mathcal{G}_\Omega \chi u$
- d'observation : $u^{\text{dif}} = \mathcal{G}_S \chi u$

Équations d'état (ou de couplage), $\forall \mathbf{r} \in \Omega$

équation de Fredholm de 2^{ième} espèce

$$\mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) - k^2 \int_{\Omega} \underline{\mathcal{G}}^{\text{ee}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \chi^{\text{e}}(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' + j\omega\mu_0 \int_{\Omega} \underline{\mathcal{G}}^{\text{em}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \chi^{\text{m}}(\mathbf{r}') \mathbf{H}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'$$

$$\mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}(\mathbf{r}) + k^2 \int_{\Omega} \underline{\mathcal{G}}^{\text{mm}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \chi^{\text{m}}(\mathbf{r}') \mathbf{H}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' - j\omega\varepsilon_0 \int_{\Omega} \underline{\mathcal{G}}^{\text{me}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \chi^{\text{e}}(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{E}^{\text{inc}} \\ \mathbf{H}^{\text{inc}} \end{bmatrix}}_{u_{\text{inc}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix}}_u - \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\mathcal{G}}^{\text{ee}} & \underline{\mathcal{G}}^{\text{me}} \\ \underline{\mathcal{G}}^{\text{em}} & \underline{\mathcal{G}}^{\text{mm}} \end{bmatrix}}_{\mathcal{G}_\Omega} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \chi^{\text{e}} & 0 \\ 0 & \chi^{\text{m}} \end{bmatrix}}_{\chi} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix}$$

$$\text{avec } \underline{\mathcal{G}}^{\text{ee}} \dots = k^2 \int_{\Omega} \underline{\mathcal{G}}^{\text{ee}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \dots d\mathbf{r}'$$

Le problème direct

Connu

- Le milieu environnant
- L'objet
- La source
- La position des récepteurs

$$\mathcal{G}_\Omega$$
$$\Omega, \chi$$
$$u^{\text{inc}}$$
$$\mathcal{G}_S$$

Inconnu

- Le champ diffracté

$$u^{\text{dif}}$$

Résolution de l'équation d'observation

- 1 $u^{\text{dif}} = \mathcal{G}_S \chi u$: problème linéaire mais inconnue intermédiaire u
- 2 Résolution de l'équation d'état $u^{\text{inc}} = u - \mathcal{G}_\Omega \chi u$

$$u^{\text{dif}} = \mathcal{G}_S \chi (I - \mathcal{G}_\Omega \chi)^{-1} u^{\text{inc}} \quad (15)$$

Le problème inverse

Connu

- Le milieu environnant
- Le champ diffracté
- La source
- La position des récepteurs

 \mathcal{G}_Ω u_{dif} u_{inc} \mathcal{G}_S

Inconnu

- L'objet

 $\Omega (\partial\Omega), \chi$

Minimisation de la fonctionnelle coût

$$J(u, \chi) = |\xi - \mathcal{G}_S \chi u|^2 + \alpha \mathcal{L}(\chi) \quad (16)$$

$$u_{\text{inc}} = u - \mathcal{G}_\Omega u \chi \quad (17)$$

qui se réécrit sous la forme **non linéaire** suivante

$$J(\chi) = \left| \xi - \mathcal{G}_S \chi \left(I - \mathcal{G}_\Omega \chi \right)^{-1} u_{\text{inc}} \right|^2 + \alpha \mathcal{L}(\chi) \quad (18)$$

Méthode de Moments (théorie I)

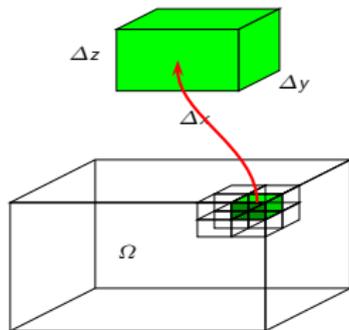
- ☞ Méthode de Moments (point-segment)
 Ω discrétisé en N cellules rectangulaires
 Équation de couplage \rightarrow système linéaire

$$[\mathbf{E}_2^{inc}]_{3 \times N} = [\mathbf{I} - \underline{\underline{\mathcal{G}}}_{22}^{ee}]_{3 \times N \times 3 \times N} [\mathbf{E}_2]_{3 \times N}$$

$$\mathbf{E}_2^{inc}(\mathbf{r}_i), i = 1, \dots, N$$

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}_j), j = 1, \dots, N$$

$$\underline{\underline{\mathcal{G}}}_{22}^{ee}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = \chi(\mathbf{r}_i) \iiint_{\Delta x_j, \Delta y_j, \Delta z_j} \underline{\underline{\mathcal{G}}}_{22}^{ee}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}') d\mathbf{r}, \quad i, j = 1, \dots, N$$



- ☞ Résolution du système linéaire
 Structure de convolution-corrélation de l'équation
 \Rightarrow gradient conjugué + TFR
 Inversion de matrice

Plan

1 Introduction

- Introduction
- Équations de base du modèle
- Réécriture symbolique des équations

2 Quelques applications

- Gradient conjugué non linéaire
- Level-set
 - Théorie
 - Extension au cas du contraste inconnu
 - Extension au cas 3D
- Gradient modifié
- Géophysique de prospection

Outline

1 Introduction

- Introduction
- Équations de base du modèle
- Réécriture symbolique des équations

2 Quelques applications

- **Gradient conjugué non linéaire**
- Level-set
 - Théorie
 - Extension au cas du contrast inconnu
 - Extension au cas 3D
- Gradient modifié
- Géophysique de prospection

Méthode de gradient conjugué

Collaboration : CEA & L2S (2007/2008)

Points importants :

- ⇒ Reconstruction d'obstacles pénétrables binaires de propriétés connues dans des milieux ferromagnétiques
- ⇒ Expressions théoriques des dyades de Green

Ce qui a été fait :

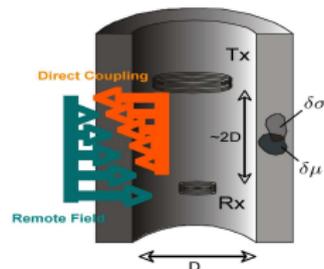
- Développement numériques des dyades de Green
- Choix adapté des fonctions de base (MoM)
- Validation/données réelles
- Développement d'un algorithme d'inversion

Remote-Field Eddy-Current Effect

Défauts dans des tubes ferromagnétiques

Comment et quelles difficultés ?

- 1 Formulation intégrale
 - 2 Basse fréquence / δ
 - 3 Difficultés numériques
 - 4 Méthodes exactes et approchées
-
- A. Skarlatos *et al* « Electromagnetic modeling of a damaged ferromagnetic metal tube via a volume integral formulation », *IEEE Transactions on Magnetics*, **44**, 623–632, 2008

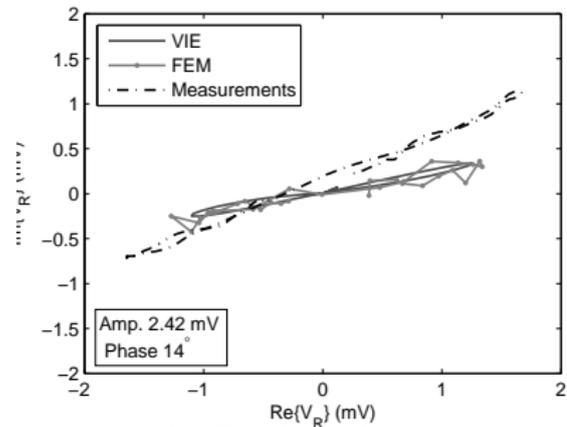
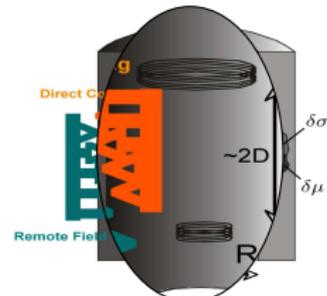


Remote-Field Eddy-Current Effect

Défauts dans des tubes ferromagnétiques

Comment et quelles difficultés ?

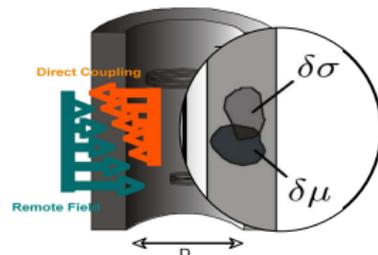
- 1 Formulation intégrale
 - 2 Basse fréquence / δ
 - 3 Difficultés numériques
 - 4 Méthodes exactes et approchées
-
- A. Skarlatos *et al* « Electromagnetic modeling of a damaged ferromagnetic metal tube via a volume integral formulation », *IEEE Transactions on Magnetics*, **44**, 623–632, 2008



Détection de défauts dans une configuration tubulaire

Comment et quelles difficultés ?

- 1 Obstacle binaire $[0, 1]$
 - 2 Non dérivabilité de la fonction à minimiser
 - 3 Méthodes d'optimisation appliquées
 - Méthode de relaxation développée au laboratoire dans les années 2000
 - Méthode d'évolution topologique de type *level-set*
-
- J.M. Abascal *et al* « 3D eddy-current imaging of metal tubes via gradient-based, controlled evolution of level sets », *IEEE Trans. Magn.*, **44**, 4721–4729, 2008



A priori information : binary obstacle

Main ideas :

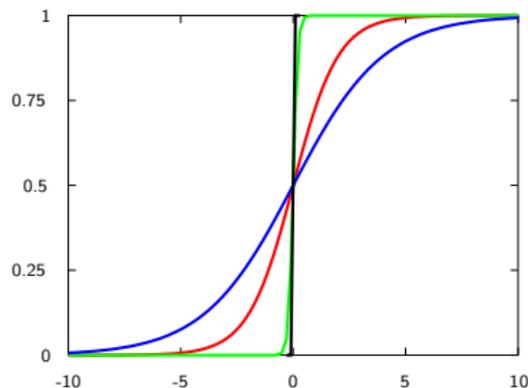
- Obstacle of known electromagnetic characteristics σ^* and μ^*
- Obstacle of unknown shape and location Ω
- Magnetic and dielectric parameters of same support Ω

$$\chi^e = \frac{\sigma^* - \sigma_2}{\sigma_2} \psi(\tau) = \chi_c^e \psi(\tau)$$

$$\chi^m = \frac{\mu^* - \mu_2}{\mu_2} \psi(\tau) = \chi_c^m \psi(\tau) \quad \text{with}$$

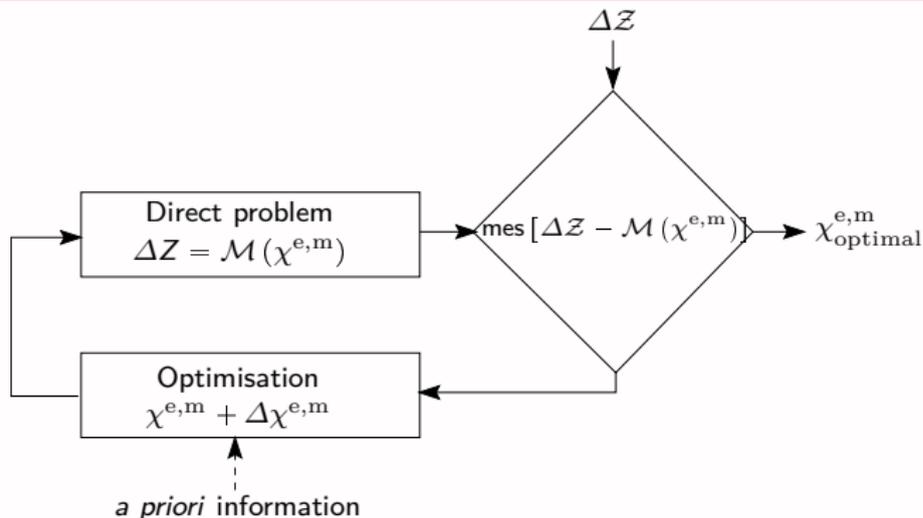
$$\psi(\tau) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{\tau}{\theta}}}$$

- χ^e, χ^m derivable, $\mathcal{F}(\chi^e, \chi^m)$ also
- θ as control parameter of the "binarity"
- τ varies from $-\infty$ to $+\infty$



The inversion procedure

Iterative scheme



- Direct problem : integral equation formulation
- $\text{mes} [\Delta \mathcal{Z} - \mathcal{M}(\chi^{e,m})] = \|\Delta \mathcal{Z} - \mathcal{M}(\chi^{e,m})\|^2$
- Optimisation : conjugate gradient type method
- *a priori* information : binary obstacle

Integral formulation : **Ferromagnetic**

The coupled (state) equation

$$\begin{aligned} \chi^e(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) - j\omega\sigma_2\mu_2\chi^e(\mathbf{r}) \int_{\Omega} \underline{\mathbf{G}}_{22}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \chi^e(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \\ - \frac{j\omega\mu_2}{Z_2} \chi^e(\mathbf{r}) \int_{\Omega} \underline{\mathbf{G}}_{22}^{em}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot Z_2\chi^m(\mathbf{r}') \mathbf{H}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \chi^e(\mathbf{r}) \mathbf{E}_2^{\text{inc}}(\mathbf{r}) \\ \chi^m(\mathbf{r}) \mathbf{H}(\mathbf{r}) - \sigma_2\chi^m(\mathbf{r}) \int_{\Omega} \underline{\mathbf{G}}_{22}^{me}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \chi^e(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \\ - j\omega\sigma_2\mu_2\chi^m(\mathbf{r}) \int_{\Omega} \underline{\mathbf{G}}_{22}^{mm}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \chi^m(\mathbf{r}') \mathbf{H}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \chi^m(\mathbf{r}) \mathbf{H}_2^{\text{inc}}(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

The data equation

$$\Delta Z = \frac{-1}{h_1 h_2} \int_{\Omega} [\sigma_2 \mathbf{E}_{R_x}^{\text{inc}}(\mathbf{r}') \cdot \chi^e(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}')(\mathbf{r}') + j\omega\mu_2 \chi^m(\mathbf{r}') \mathbf{H}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{H}_{R_x}^{\text{inc}}(\mathbf{r}')] d\mathbf{r}'$$

The iterative method I

Cost function

$$\mathcal{F}(\chi^{e,m}) = \langle \Delta \mathcal{Z} - \Delta Z(\chi^{e,m}), \Delta \mathcal{Z} - \Delta Z(\chi^{e,m}) \rangle$$

General iterative scheme

$$\chi_n^{e,m} = \chi_{n-1}^{e,m} - \alpha_n^{e,m} \underbrace{\left(\nabla_{\chi^{e,m}} \mathcal{F}(\chi^{e,m}) \Big|_{\chi_{n-1}^{e,m}} - \beta_n^{e,m} d_{n-1}^{e,m} \right)}_{d_n}$$

- Steepest descent : $\beta_n^{e,m} = 0$
- Conjugate gradient : $\beta_n^{e,m}$, take into account the previous iteration $n-1$
 - Polack-Ribiere

$$\beta_n^{e,m,PR} = \frac{\left\langle \nabla_{\chi^{e,m}} \mathcal{F}(\chi^{e,m}) \Big|_{\chi_n}, \nabla_{\chi^{e,m}} \mathcal{F}(\chi^{e,m}) \Big|_{\chi_n} - \nabla_{\chi^{e,m}} \mathcal{F}(\chi^{e,m}) \Big|_{\chi_{n-1}} \right\rangle}{\left\langle \nabla_{\chi^{e,m}} \mathcal{F}(\chi^{e,m}) \Big|_{\chi_{n-1}}, \nabla_{\chi^{e,m}} \mathcal{F}(\chi^{e,m}) \Big|_{\chi_{n-1}} \right\rangle} \quad (19)$$

- Fletcher-Reeves

$$\beta_n^{e,m,FR} = \frac{\left\langle \nabla_{\chi^{e,m}} \mathcal{F}(\chi^{e,m}) \Big|_{\chi_n}, \nabla_{\chi^{e,m}} \mathcal{F}(\chi^{e,m}) \Big|_{\chi_n} \right\rangle}{\left\langle \nabla_{\chi^{e,m}} \mathcal{F}(\chi^{e,m}) \Big|_{\chi_{n-1}}, \nabla_{\chi^{e,m}} \mathcal{F}(\chi^{e,m}) \Big|_{\chi_{n-1}} \right\rangle} \quad (20)$$

The iterative method I

Cost function

$$\mathcal{F}(\chi^{e,m}) = \langle \Delta \mathcal{Z} - \Delta Z(\chi^{e,m}), \Delta \mathcal{Z} - \Delta Z(\chi^{e,m}) \rangle$$

General iterative scheme

$$\chi_n^{e,m} = \chi_{n-1}^{e,m} - \alpha_n^{e,m} \underbrace{\left(\nabla_{\chi^{e,m}} \mathcal{F}(\chi^{e,m}) \Big|_{\chi_{n-1}^{e,m}} - \beta_n^{e,m} d_{n-1}^{e,m} \right)}_{d_n}$$

- Steepest descent : $\beta_n^{e,m} = 0$
- Conjugate gradient : $\beta_n^{e,m}$, take into account the previous iteration $n-1$
 - Polack-Ribiere

$$\beta_n^{e,m,PR} = \frac{\left\langle \nabla_{\chi^{e,m}} \mathcal{F}(\chi^{e,m}) \Big|_{\chi_n}, \nabla_{\chi^{e,m}} \mathcal{F}(\chi^{e,m}) \Big|_{\chi_n} - \nabla_{\chi^{e,m}} \mathcal{F}(\chi^{e,m}) \Big|_{\chi_{n-1}} \right\rangle}{\left\langle \nabla_{\chi^{e,m}} \mathcal{F}(\chi^{e,m}) \Big|_{\chi_{n-1}}, \nabla_{\chi^{e,m}} \mathcal{F}(\chi^{e,m}) \Big|_{\chi_{n-1}} \right\rangle} \quad (19)$$

- Fletcher-Reeves

$$\beta_n^{e,m,FR} = \frac{\left\langle \nabla_{\chi^{e,m}} \mathcal{F}(\chi^{e,m}) \Big|_{\chi_n}, \nabla_{\chi^{e,m}} \mathcal{F}(\chi^{e,m}) \Big|_{\chi_n} \right\rangle}{\left\langle \nabla_{\chi^{e,m}} \mathcal{F}(\chi^{e,m}) \Big|_{\chi_{n-1}}, \nabla_{\chi^{e,m}} \mathcal{F}(\chi^{e,m}) \Big|_{\chi_{n-1}} \right\rangle} \quad (20)$$

Expression of $\nabla_{\chi^{e,m}} \mathcal{F}(\chi^{e,m})$, choice of $\alpha_n^{e,m}$?

The iterative method II (expression de $\nabla_{\chi^{e,m}} \mathcal{F}(\chi^{e,m})$)Choix de $\alpha_n^{e,m}$?

$$\alpha_n^{e,m} = \arg \min [\mathcal{F}(\chi_{n-1} + \alpha_n d_n)]$$

- Newton-Raphson, if the second derivative of \mathcal{F} is easily available
- Secant method

- Approximated estimation : $\alpha_n = \frac{\Re \left\langle \Delta \mathcal{Z} - \Delta Z(\chi_{n-1}), \frac{\partial}{\partial \alpha} \Delta Z(\chi_{n-1}) \right\rangle}{\left\langle \frac{\partial}{\partial \alpha} \Delta Z(\chi_{n-1}), \frac{\partial}{\partial \alpha} \Delta Z(\chi_{n-1}) \right\rangle}$

Expression of $\nabla_{\chi^{e,m}} \mathcal{F}(\chi^{e,m})$

- Expression of $\nabla_{\chi^{e,m}} \mathcal{F}(\chi^{e,m})$

$$\nabla_{\chi^{e,m}} \mathcal{F}(\chi^{e,m}) = 2\Re \{ \langle \Delta \mathcal{Z} - \Delta Z(\chi^{e,m}), \nabla_{\chi^{e,m}} [\Delta Z(\chi^{e,m})] \rangle \}$$

- Expression of $\nabla_{\chi^{e,m}} [\Delta Z(\chi^{e,m})]$

$$d\Delta Z(\chi^{e,m}; d\chi^{e,m}) = \langle \nabla_{\chi^e} [\Delta Z(\chi^{e,m})], d\chi^e \rangle + \langle \nabla_{\chi^m} [\Delta Z(\chi^{e,m})], d\chi^m \rangle$$

Manipulation of integral equations + identification leads to Dem.

$$\nabla_{\chi^e} [\Delta Z(\chi^{e,m})] = \frac{-\sigma_2}{I_T I_R} \overline{\mathbf{E}_{2,R} \cdot \mathbf{E}_{2,T}}, \quad \nabla_{\chi^m} [\Delta Z(\chi^{e,m})] = \frac{-j\omega\mu_2}{I_T I_R} \overline{\mathbf{H}_{2,R} \cdot \mathbf{H}_{2,T}}$$

$\mathbf{E}_{2,R}$ and $\mathbf{H}_{2,R}$ being solution of an adjoint problem

“Binary” version of the iterative scheme

$$\mathcal{F}(\tau) = \langle \Delta Z - \Delta Z(\tau), \Delta Z - \Delta Z(\tau) \rangle$$

$$\nabla_{\tau} \mathcal{F}(\chi) = 2\Re \{ \langle \Delta Z - \Delta Z(\tau), \nabla_{\tau} [\Delta Z(\tau)] \rangle \}$$

$$d\Delta Z(\tau; d\tau) = \langle \nabla_{\tau} [\Delta Z(\tau)], d\tau \rangle \quad (21)$$

$$\Delta Z(\tau) = -\frac{1}{I_{\text{T}} I_{\text{R}}} \int_{\Omega} d\mathbf{r}' \Psi[\tau(\mathbf{r}')] \left\{ \sigma_2 \chi_c^{\text{E}} \mathbf{E}_{2,\text{T}}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{E}_{2,\text{R}}^{\text{inc}}(\mathbf{r}') \right. \\ \left. + j\omega \mu_2 \chi_c^{\text{M}} \mathbf{H}_{2,\text{T}}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{H}_{2,\text{R}}^{\text{inc}}(\mathbf{r}') \right\}$$

$$d\Delta Z(\tau) = -\frac{1}{I_{\text{T}} I_{\text{R}}} \int_{\Omega} d\mathbf{r}' d\tau(\mathbf{r}') \Psi'[\tau(\mathbf{r}')] \left\{ \sigma_2 \chi_c^{\text{e}} \mathbf{E}_{2,\text{R}}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{E}_{2,\text{T}}(\mathbf{r}') \right. \\ \left. + j\omega \mu_2 \chi_c^{\text{m}} \mathbf{H}_{2,\text{R}}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{H}_{2,\text{T}}(\mathbf{r}') \right\}$$

Ferromagnetic case (RFEC configuration)

Tube parameters

- Thickness $e = 8$ mm
- Inner radius $\rho_{\text{int}} = 62$ mm
- Conductivity $\sigma_2 = 5.0 \times 10^6 \text{ S m}^{-1}$
- Permeability $\mu_2 = 100$

Acquisition parameters

- Frequency $f = 17$ Hz
- Skin depth $\delta = 5.5$ mm
- Along z , 11 pts $\in [-12; 12]$ mm
- Along θ , 11 pts $\in [-20^\circ; 20^\circ]$

Region Of Interest (ROI)

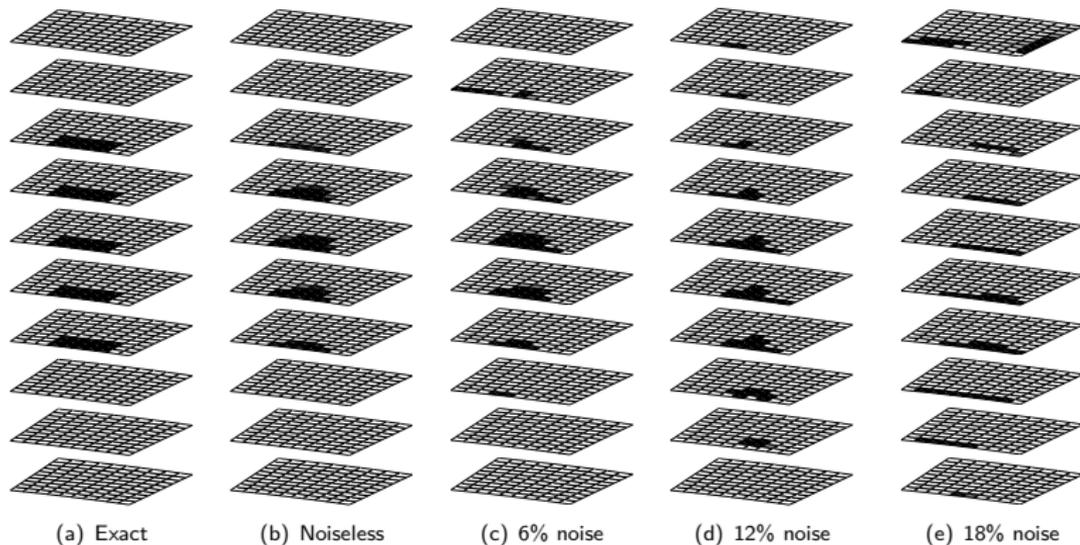
- Size $8 \text{ mm} \times 7.4^\circ \times 8 \text{ mm}$
- Number of voxels
 - $12 \times 12 \times 12$ (Direct)
 - $10 \times 10 \times 10$ (Inversion)
- Defect type (external or internal)
 - Centered in z and θ (4 voxels in each directions)
 - Depth between 25 % e to 50 % e
- Direct matrice inversion

Theoretical and Numerical aspects

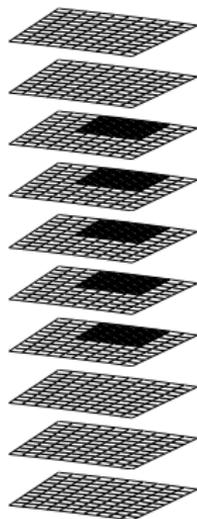
Method of Moments from CIVA platform
Skarlatos et al, IEEE Trans. Magn., 44, 623–632, 2008

Ferromagnetic case : internal defect

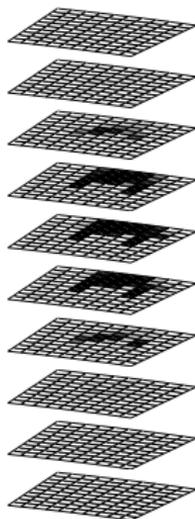
Numerical random noise added



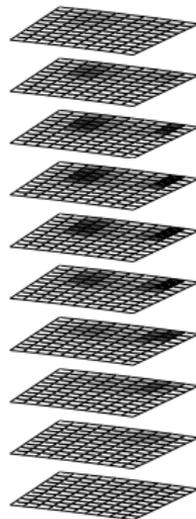
Ferromagnetic case : external defect



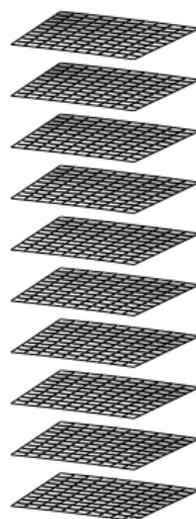
(f) Exact



(g) Noiseless



(h) 6% noise



(i) 12% noise

Exemple de résultats

Outline

1 Introduction

- Introduction
- Équations de base du modèle
- Réécriture symbolique des équations

2 Quelques applications

- Gradient conjugué non linéaire
- **Level-set**
 - Théorie
 - Extension au cas du contraste inconnu
 - Extension au cas 3D
- Gradient modifié
- Géophysique de prospection

Les ensembles de niveaux (introduction)

Collaboration : C. Ramananjaona et J.-P. Zolésio

⇒ Introduit par A. Litman *et al.* (1998)

Points importants :

- ⇒ Reconstruction d'obstacles pénétrables binaires de propriétés connues
- ⇒ Combinaison d'une méthode d'ensembles de niveaux et de « méthodes de vitesse »

Ce qui a été fait :

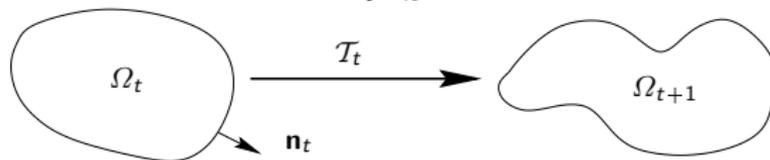
- Réécriture du cadre théorique
- Incorporation de contraintes de contour et de volume
- Application à des données réelles (Institut Fresnel)

Les ensembles de niveaux (théorie I)

⇨ Trouver Ω^* tel que F soit minimum

$$F(\Omega^*) = \frac{\|u^{dif}(\Omega^*) - \zeta\|^2}{\|\zeta\|^2}, \quad u = E, H$$

⇨ Construction d'une suite $\{\Omega_t\}$ tel que $\lim_{t \rightarrow \infty} \Omega_t = \Omega^*$



⇨ « méthodes de vitesse » : \mathcal{T}_t liée à un champ de vitesse $\mathbf{V}_t(\mathbf{r})$

- direction : $\mathbf{V}_t(\mathbf{r}) = V_t(\mathbf{r}) \mathbf{n}_t$
- amplitude : $V_t(\mathbf{r})$ tel que $\frac{d}{dt} F(\Omega_t) \leq 0$

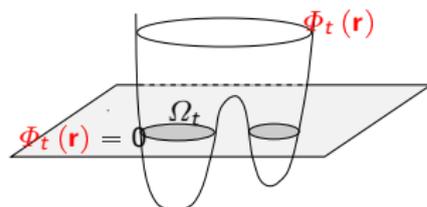
Les ensembles de niveaux (théorie II)

☞ Les ensembles de niveaux

$$\Omega_t = \{\mathbf{r} / \Phi_t(\mathbf{r}) \leq 0\}$$

Avantages :

- apparition, disparition des obstacles
- grille fixe (\Rightarrow fonctions de Green précalculé)



☞ Évolution de $\Phi_t(\mathbf{r})$: équation de type Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi_t(\mathbf{r}) + V_t(\mathbf{r}) \|\nabla \Phi_t(\mathbf{r})\| = 0$$

Dérivée de forme

Objectif : trouver le minimum de $F(\Omega_t) = \frac{\|u^{dif}(\Omega_t) - \zeta\|^2}{\|\zeta\|^2}$, $u = E, H$

Comment calculer $\frac{d}{dt} F(\Omega_t)$?

Plusieurs possibilités :

- dérivation de la formulation faible
- dérivation de la formulation forte à l'aide d'un lagrangien

dérivation de la formulation forte à l'aide d'un lagrangien

$$F = \min_{w_r \in H^1(D)} \min_{w_i \in H^1(D)} \max_{\phi_r \in H^1(D)} \max_{\phi_i \in H^1(D)} \mathcal{L}$$

Dérivée de forme

Point selle de \mathcal{L} , $(u, \bar{u}, \psi, \bar{\psi})$, unique \iff application du théorème de CUER-ZOLÉSIO (1988) (théorie du contrôle) :

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{t}}(\mathbf{t}, u, \bar{u}, \psi, \bar{\psi})$$

- Polarisation TM

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t, w, \bar{w}, \phi, \bar{\phi}) = & \frac{1}{2} \int_M \left| k_2^2 \int_D \chi_t(\mathbf{r}') G_{or}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') w(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' - \zeta(\mathbf{r}) \right|^2 d\mathbf{r} \\ & + \Re \int_D \left(w(\mathbf{r}) - u^{\text{inc}} - k_2^2 \int_D \chi_t(\mathbf{r}') G_{oo}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') w(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right) \phi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \end{aligned}$$

- Polarisation TE

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t, w, \bar{w}, \phi, \bar{\phi}) = & \frac{1}{2} \int_M \left| k_2^2 \int_D \chi_t(\mathbf{r}') \nabla G_{or}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \nabla w(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' - \zeta(\mathbf{r}) \right|^2 d\mathbf{r} \\ & + \Re \int_D \left(w(\mathbf{r}) - u^{\text{inc}}(\mathbf{r}) - k_2^2 \int_D \chi_t(\mathbf{r}') \nabla G_{oo}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \nabla w(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right) \phi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \end{aligned}$$

Dérivée de forme & Choix de vitesse

Dérivée de forme

- TM : $\frac{dJ}{dt} = \Re \int_{\Gamma} up \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} ds$ p solution d'un problème adjoint
- TE : $\frac{dJ}{dt} = \Re \int_{\Gamma} \nabla u \cdot \nabla p \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} ds$ ∇p solution d'un problème adjoint

De façon générale $\frac{dJ}{dt} = \Re \int_{\Gamma} g \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} ds$ avec g gradient de forme.

Choix de vitesse

- Objectif : $\frac{dJ}{dt} \leq 0$
- Choix évident : $\forall s \in \Gamma, \mathbf{V}(s) = -\Re[g(s)]$
- Extension à Ω : $\forall \mathbf{r} \in \Omega, \mathbf{V}(\mathbf{r}) = -\Re[g(\mathbf{r})]$

Algorithme

- 1 Initialisation de Ω
 $\Phi^0 = \text{dist}(\mathbf{r}, \Gamma)$
- 2 calcul du problème direct, calcul du champ diffracté q
- 3 calcul du coût F
- 4 calcul de $\frac{dF}{dt}$
 $V = -\Re(\mathbf{g})$
(via résolution du problème adjoint)
- 5 calcul de $\Phi^{n+1} = \Phi^n + V\mathcal{H}(\Phi^n)\Delta t$
nouveau Ω
- 6 calcul du problème direct, calcul du champ diffracté q
- 7 calcul du coût J
- 8 est-ce que le **critère d'arrêt** est atteint ?
non \Rightarrow GOTO 3
oui \Rightarrow FIN

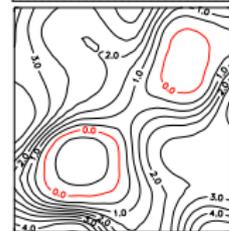
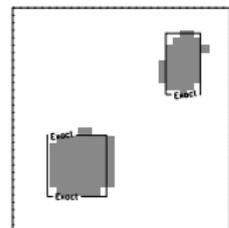
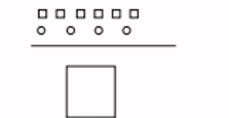
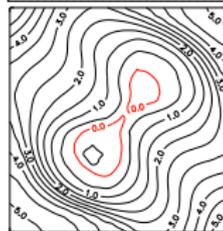
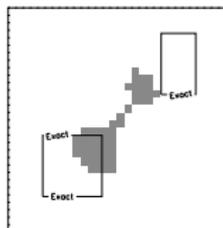
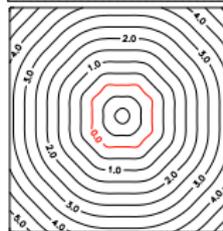
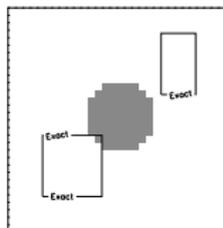
Les ensembles de niveaux (illustration I)

Données synthétiques, polarisation TE

- 1 fréquence (200 MHz)
- Encaissant : $\varepsilon_2 = 2, \sigma_2 = 0$ S/m
- 2 obstacles : $\varepsilon_D = 3, \sigma_D = 0$ S/m

Ω_t

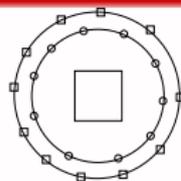
Φ_t



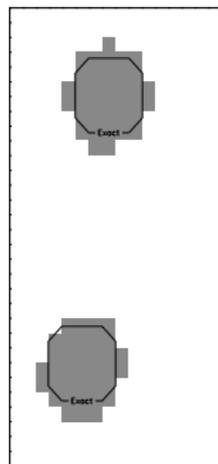
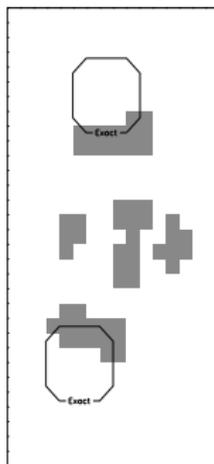
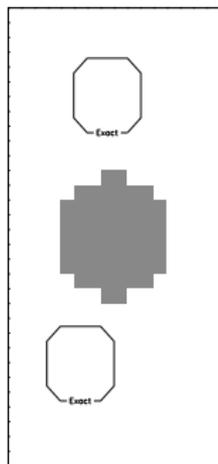
Les ensembles de niveaux (illustration II)

Données réelles, polarisation TM

- 1 fréquence (6 GHz)
- Encaissant (air) : $\varepsilon_2 = 1, \sigma_2 = 0$ S/m
- 2 obstacles : $\varepsilon_D = 3, \sigma_D = 0$ S/m



Ω_t



Cliquer pour l'animation

Reconstruction of shape and contrast

Binary problem

- Unknown shape and location
- Unknown permittivity of the obstacle

The objective functional $J(\chi, \eta)$ is defined as

$$J(\chi, \eta) = \int_M \left| k_0^2 \int_{\Omega} G_{or}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \eta \chi(\mathbf{r}') u(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' - \zeta(\mathbf{r}) \right|^2 d\mathbf{r}.$$

where

$\chi (= 0, 1)$ is linked to the shape Ω

η is linked to the permittivity of the obstacle

We construct an alternating algorithm :

- Reconstruction of χ at η fixed, via a level-set evolution, using $\frac{\partial J}{\partial \chi}$;
- Reconstruction η at χ fixed, via a Levenberg-Marquardt optimization, using $\frac{\partial J}{\partial \eta}$.

Evaluation of $\frac{\partial J}{\partial \eta}$ at Ω constant

- Exact derivative :

$$J = \min_{w \in H^1(\Omega)} \max_{\phi \in H^1(\Omega)} \mathcal{L}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(w, \bar{w}, \phi, \bar{\phi}) = & \frac{1}{2} \int_M \left| \int_{\Omega} \eta G_{or}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') w(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' - \zeta(\mathbf{r}) \right|^2 d\mathbf{r} \\ & + \Re \int_{\Omega} \left(w(\mathbf{r}) - u^i(\mathbf{r}) - \int_{\Omega} \eta G_{oo}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') w(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right) \phi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \end{aligned}$$

and we obtain

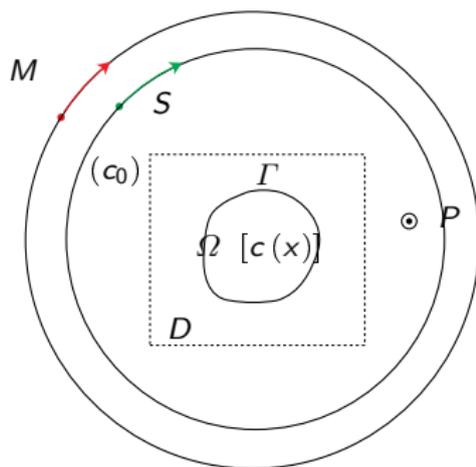
$$\frac{\partial J}{\partial \eta}(\chi, \eta) = k_0^2 \int_{\Omega} u(\mathbf{r}) p(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

- Approximated derivative ($u(\mathbf{r}')$ is supposed constant) :

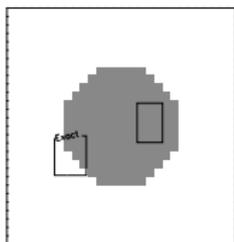
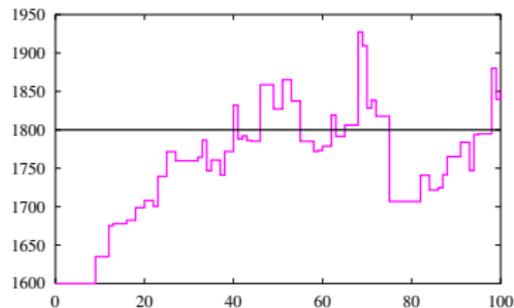
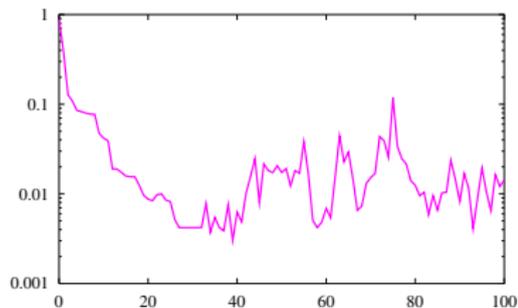
$$\frac{\partial J}{\partial \eta} \Big|_u(\chi, \eta) = \int_M \left\{ \bar{\eta} \left| k_0^2 \int_{\Omega} G_{or}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') u(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right|^2 - k_0^2 \bar{\zeta}(\mathbf{r}) \int_{\Omega} G_{or}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') u(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right\} d\mathbf{r}$$

Configuration : acoustic

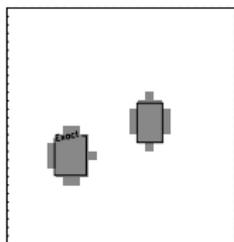
Sources	36, located on a circle of radius 3 mm
Frequencies	500, 1000, 1500, 2000 kHz
Receivers	64, located on a circle of radius 2.5 mm
Host medium	$c_0 = 1470$ m/s, $\alpha = 0$
Size D	2 mm \times 2 mm
Defect	2 rectangles, $c = 1800$ m/s, $\alpha = 0$



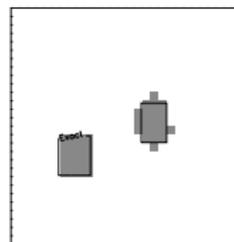
Evaluation of the contrast via an exact derivative



iteration 0
 $c = 1600$ m/s

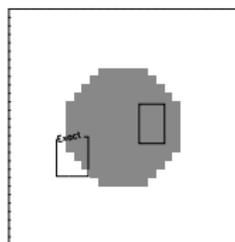
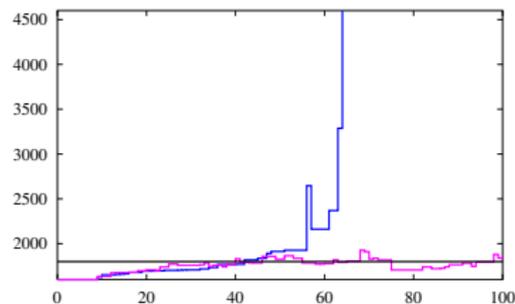
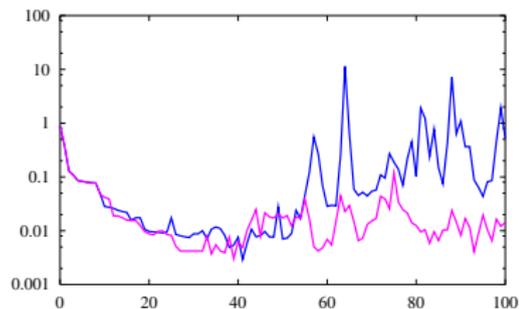


iteration 41
 $c = 1772$ m/s

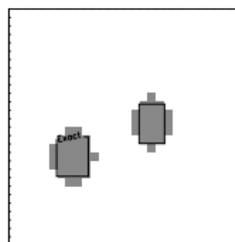


iteration 100
 $c = 1851$ m/s

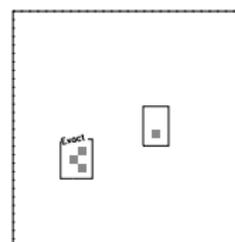
Evaluation of the contrast via an approximated derivative



iteration 0
 $c = 1600$ m/s



iteration 41
 $c = 1770$ m/s

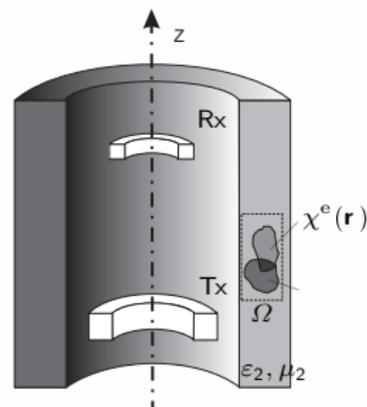


iteration 100
 $c = +\infty$

Configuration of work

Tube configuration

- Low-frequency time-harmonic source
- Metal tube of characteristics $\sigma_{\text{struct}} = \sigma_2$,
 $\mu_{\text{struct}} = \mu_2$;
- Internal measurement ;
- Defect of volume Ω
 - $\chi^e(\mathbf{r}) = \frac{\sigma(\mathbf{r}) - \sigma_2}{\sigma_2}$



But

Theoretical formulation valid for other configurations (planar ...)

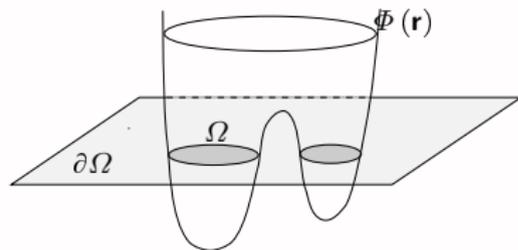
Level-Set

Theory

- Shape reconstruction
- New unknown : $\partial\Omega$

$$\Omega = \{\mathbf{r} / \Phi(\mathbf{r}) \leq 0\}$$

$$\partial\Omega = \{\mathbf{r} / \Phi(\mathbf{r}) = 0\}$$



$$\chi^{e,m}(\mathbf{r}) = \chi_c^{e,m} \Pi[\phi(\mathbf{r})] = \begin{cases} \chi_c^{e,m} & \text{if } \Phi(\mathbf{r}) \leq 0 \\ 0 & \text{if } \Phi(\mathbf{r}) > 0 \end{cases}, \quad \Pi[\phi(\mathbf{r})] \text{ heaviside fct}$$

Advantages

- merging, splitting of the obstacles
- fixed grid (\Rightarrow Green's functions precalculated)
- Gradient of $\mathcal{F}(\partial\Omega)$: $\nabla_{\partial\Omega} \mathcal{F}(\partial\Omega) = 2\Re \{ \langle \Delta Z - \Delta Z(\partial\Omega), \nabla_{\partial\Omega} [\Delta Z(\partial\Omega)] \rangle \}$
with $\nabla_{\partial\Omega} [\Delta Z(\partial\Omega)] = \delta(\partial\Omega) \{ \sigma_2 \chi_c^e \mathbf{E}_{2,R} \cdot \mathbf{E}_{2,T} + j\omega\mu_2 \chi_c^m \mathbf{H}_{2,R} \cdot \mathbf{H}_{2,T} \}$

Integral formulation : Metal case

The coupled equation

$$\chi^e(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) - j\omega\sigma_2\mu_2\chi^e(\mathbf{r}) \int_{\Omega} \underline{\mathbf{G}}_{22}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \chi^e(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \chi^e(\mathbf{r}) \mathbf{E}_2^{\text{inc}}(\mathbf{r})$$

The data equation

$$\Delta Z = \frac{-1}{h_1 h_2} \int_{\Omega} [\sigma_2 \mathbf{E}_{Rx}^{\text{inc}}(\mathbf{r}') \cdot \chi^e(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}')(\mathbf{r}')] d\mathbf{r}'$$

Metal case ($\mu_2 = 1$)

Tube parameters

- Set up [V Monebhurrun *et al.*, *Inv. Problems*, **14**, 707-724, 1998]
- Inner radius $\rho_{\text{int}} = 9.83$ mm
- Outer radius $\rho_{\text{out}} = 11.10$ mm
- Conductivity $\sigma_2 = 0.98 \times 10^6$ S m⁻¹

Region Of Interest (ROI)

- Size 1.27 mm \times 80 \times 1.6 mm
- Number of voxels 16 \times 16 \times 10
- Defect type (internal)
 - 40% of the tube thickness
 - 80% of the tube thickness

Acquisition parameters

- Frequency $f = 100$ kHz
- Skin depth $\delta = 1.6$ mm
- Along z , 16 pts $\in [-0.8; 0.8]$ mm
- Along θ , 16 pts $\in [-40; 40]$

Theoretical and Numerical aspects

Method of Moments from CIVA platform
Skarlatos et al, *IEEE Trans. Magn.*, **44**, 623–632, 2008

animategraphics

Outline

1 Introduction

- Introduction
- Équations de base du modèle
- Réécriture symbolique des équations

2 Quelques applications

- Gradient conjugué non linéaire
- Level-set
 - Théorie
 - Extension au cas du contrast inconnu
 - Extension au cas 3D
- **Gradient modifié**
- Géophysique de prospection

Le gradient modifié (introduction)

Collaboration : B. J. Kooij

⇒ Introduit par R. Kleinman et P. van den Berg (1992)

Configurations d'applications

- Objet supposé infini dans une direction \Rightarrow problème scalaire
- Polarisation H (ou TE) \Rightarrow seul H d'intérêt
- Détection d'objets enfouis dans le sol à fréquence radar (MHz)

Points importants :

- ⇒ Reconstruction d'obstacles pénétrables
- ⇒ Ni linéarisation ni résolution du problème direct

Ce qui a été fait :

- Polarisation TE (formulation en E et H)
- Introduction de contraintes (positivité, binarité)
- Données complètes et incomplètes

Le gradient modifié (théorie)

⇨ Trouver u_i et χ tel que F soit minimum

$$F(u_i, \chi) = \frac{\sum_{i=1}^{N_S} \|\overbrace{\zeta_i - \mathcal{G}_S \chi u_i}^{\rho_i}\|^2}{\sum_{i=1}^{N_S} \|\zeta_i\|^2} + \frac{\sum_{i=1}^{N_S} \|\overbrace{u_i^{\text{inc}} - u_i + \mathcal{G}_\Omega \chi u_i}^{r_i}\|^2}{\sum_{i=1}^{N_S} \|u_i^{\text{inc}}\|^2}$$

⇨ Introduction de 2 suites $\{u_i^{(n)}\}$ et $\{\chi^{(n)}\}$, $n = 1, 2, \dots$

$$\chi^{(n)} = \chi^{(n-1)} + \beta^{(n)} d\chi^{(n)}$$

$$u_i^{(n)} = u_i^{(n-1)} + \alpha^{(n)} du_i^{(n)}$$

$$\alpha^{(n)}, \beta^{(n)} \in \mathbb{C}$$

$$d\chi^{(n)}, du_i^{(n)} = \text{directions}$$

Le gradient modifié (théorie)

⇨ Trouver u_i et χ tel que F soit minimum

$$F(u_i, \chi) = \frac{\sum_{i=1}^{N_S} \|\overbrace{\zeta_i - \mathcal{G}_S \chi u_i}^{\rho_i}\|^2}{\sum_{i=1}^{N_S} \|\zeta_i\|^2} + \frac{\sum_{i=1}^{N_S} \|\overbrace{u_i^{\text{inc}} - u_i + \mathcal{G}_\Omega \chi u_i}^{r_i}\|^2}{\sum_{i=1}^{N_S} \|u_i^{\text{inc}}\|^2} = F(\alpha^{(n)}, \beta^{(n)})$$

⇨ Introduction de 2 suites $\{u_i^{(n)}\}$ et $\{\chi^{(n)}\}$, $n = 1, 2, \dots$

$$\chi^{(n)} = \chi^{(n-1)} + \beta^{(n)} d\chi^{(n)}$$

$$u_i^{(n)} = u_i^{(n-1)} + \alpha^{(n)} du_i^{(n)}$$

$$\alpha^{(n)}, \beta^{(n)} \in \mathbb{C}$$

$$d\chi^{(n)}, du_i^{(n)} = \text{directions}$$

Choix des directions

$$d\chi^{(n)} = \begin{cases} \mathbf{g}^{d\chi^{(n)}} = \frac{\partial}{\partial \chi} F|_{\chi^{(n-1)}, u^{(n-1)}} \\ \mathbf{g}^{d\chi^{(n)}} + \gamma^{d\chi^{(n)}} d\chi^{(n-1)}, \quad \gamma^{d\chi^{(n)}} = \frac{\langle \mathbf{g}^{d\chi^{(n)}}, \mathbf{g}^{d\chi^{(n)}} - \mathbf{g}^{d\chi^{(n-1)}} \rangle_{\Omega}}{\langle \mathbf{g}^{d\chi^{(n-1)}}, \mathbf{g}^{d\chi^{(n-1)}} \rangle_{\Omega}} \end{cases}$$

et

$$du_i^{(n)} = \begin{cases} \mathbf{g}_i^{du^{(n)}} = \frac{\partial}{\partial u_i} F|_{\chi^{(n-1)}, u^{(n-1)}} \\ \mathbf{g}_i^{du^{(n)}} + \gamma_i^{(n)} du^{(n-1)}, \quad \gamma_i^{(n)} = \frac{\langle \mathbf{g}_i^{du^{(n)}}, \mathbf{g}_i^{du^{(n)}} - \mathbf{g}_i^{du^{(n-1)}} \rangle_{\Omega}}{\langle \mathbf{g}_i^{du^{(n-1)}}, \mathbf{g}_i^{du^{(n-1)}} \rangle_{\Omega}} \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial \chi} F|_{\chi^{(n-1)}, u^{(n-1)}} = \sum_{i=1}^{N_S} \bar{u}_i^{(n-1)} \left[\omega_{\Omega i} \mathcal{G}_{\Omega}^* r_i^{(n-1)} - \omega_{R i} \mathcal{G}_R^* \rho_i^{(n-1)} \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial u_i} F|_{\chi^{(n-1)}, u^{(n-1)}} = -\omega_{\Omega i} \left[r_i^{(n-1)} - \bar{\chi}^{(n-1)} \mathcal{G}_{\Omega}^* r_i^{(n-1)} \right] - \omega_{R i} \bar{\chi}^{(n-1)} \mathcal{G}_R^* \rho_i^{(n-1)}$$

avec \mathcal{G}_R^* et \mathcal{G}_{Ω}^* : opérateurs adjoints

Le gradient modifié avec contraintes

⇨ Contraintes de positivité : $\varepsilon_r = 1 + \xi^2$ et $\frac{\sigma}{\omega} = \eta^2$

$$\chi(\xi, \eta) = 1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0(1 + \xi^2) + j\eta^2}$$

$$\xi^{(n)} = \xi^{(n-1)} + \beta^{(n)} d\xi^{(n)} \quad \beta^{(n)} \in \mathbb{R}$$

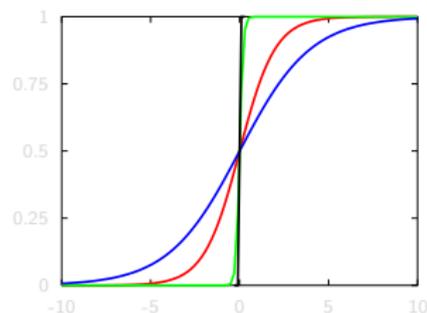
$$\eta^{(n)} = \eta^{(n-1)} + \gamma^{(n)} d\eta^{(n)} \quad \gamma^{(n)} \in \mathbb{R}$$

⇨ Contraintes de binarité : ε_D^* connu,
distribution inconnue

$$\chi(\tau) = \left[1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_D^*} \right] \psi(\tau)$$

$$\psi(\tau) = [1 + \exp(-\tau/\theta)]^{-1}$$

$$\tau^{(n)} = \tau^{(n-1)} + \gamma^{(n)} d\tau^{(n)} \quad \gamma^{(n)} \in \mathbb{R}$$



Le gradient modifié avec contraintes

⇒ Contraintes de positivité : $\varepsilon_r = 1 + \xi^2$ et $\frac{\sigma}{\omega} = \eta^2$

$$\chi(\xi, \eta) = 1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0(1 + \xi^2) + j\eta^2}$$

$$\xi^{(n)} = \xi^{(n-1)} + \beta^{(n)} d\xi^{(n)} \quad \beta^{(n)} \in \mathbb{R}$$

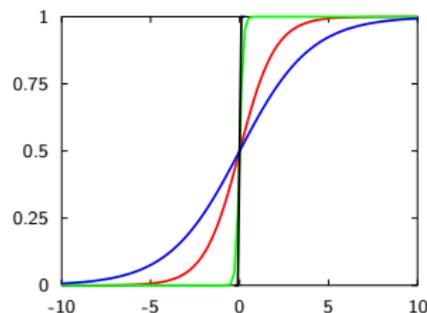
$$\eta^{(n)} = \eta^{(n-1)} + \gamma^{(n)} d\eta^{(n)} \quad \gamma^{(n)} \in \mathbb{R}$$

⇒ Contraintes de binarité : $\varepsilon_{\mathcal{D}}^*$ connu,
distribution inconnue

$$\chi(\tau) = \left[1 - \frac{\varepsilon_2^*}{\varepsilon_{\mathcal{D}}^*} \right] \psi(\tau)$$

$$\psi(\tau) = [1 + \exp(-\tau/\theta)]^{-1}$$

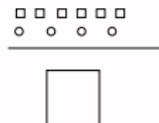
$$\tau^{(n)} = \tau^{(n-1)} + \gamma^{(n)} d\tau^{(n)} \quad \gamma^{(n)} \in \mathbb{R}$$



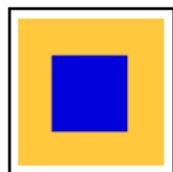
Le gradient modifié (illustration)

Données synthétiques, polarisation TE

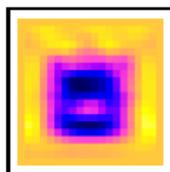
- 4 fréquences (100, 200, 300, 400 MHz)
- Encaissant : $\varepsilon_2 = 2, \sigma_2 = 0$ S/m
- Obstacle : $\varepsilon_D = 3, \sigma_D = 10^{-2}$ S/m



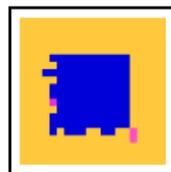
Permittivité et conductivité



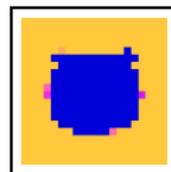
Exact



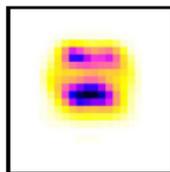
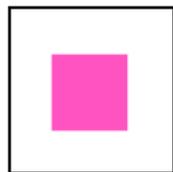
Positivité



Binarité
(module, phase)

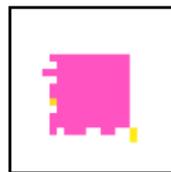


Binarité
(module)

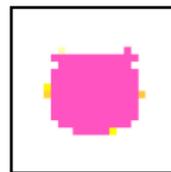


(film)

(film)



(film)



Outline

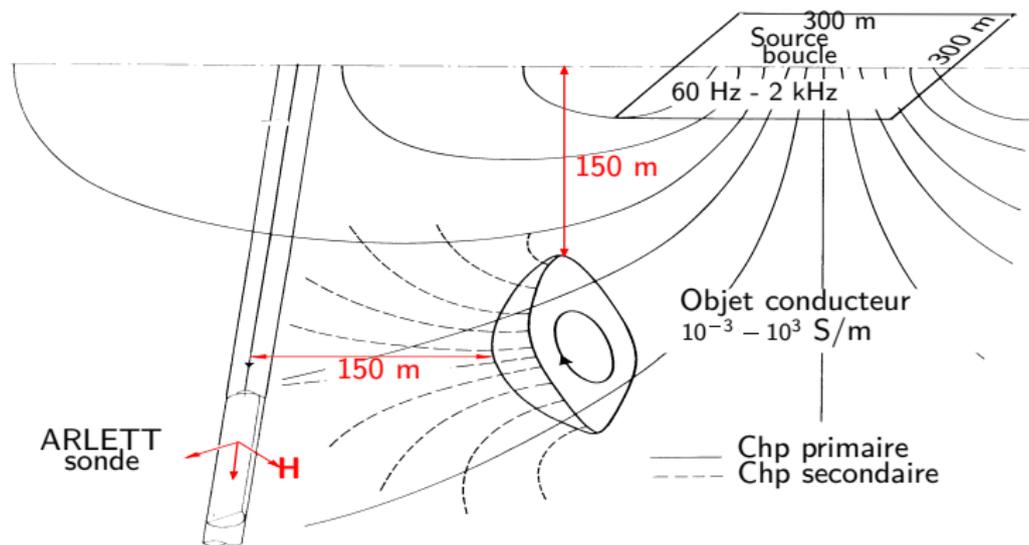
1 Introduction

- Introduction
- Équations de base du modèle
- Réécriture symbolique des équations

2 Quelques applications

- Gradient conjugué non linéaire
- Level-set
 - Théorie
 - Extension au cas du contrast inconnu
 - Extension au cas 3D
- Gradient modifié
- Géophysique de prospection

Configuration des mesures en surface-à-puits



- $\sigma = 2 \times 10^{-4} \text{ S m}^{-1}$
- $f = 100$ à 1120 kHz
- Épaisseur de peau : $\delta = 1000$ à 3600 m
- Taille caractéristique : $D \simeq 100 \text{ m}$

Régime de diffusion & domaine des basses fréquences

Développement basse-fréquence (BF) (introduction)

⇒ Introduit par G. Perrusson (1996, ...), extension par A. Bréard (2005/2008)

Problème direct (points importants & ce qui a été fait)

- ⇒ Combinaison d'une approximation « Born étendu » et d'un développement BF
- ⇒ Expressions semi-analytiques des termes du développement BF pour des objets homogènes canoniques (sphère, ellipsoïde)
 - Obstacle homogène au sein d'un espace homogène
 - Extension partielle au cas d'un obstacle au sein d'un espace stratifié

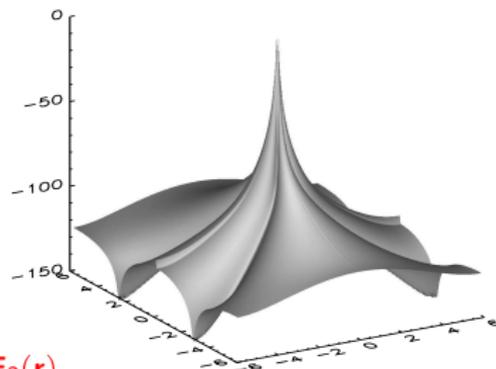
Problème inverse (points importants & ce qui a été fait)

- ⇒ Reconstruction d'obstacles équivalents parfaitement conducteurs
 - Utilisation du terme statique du développement BF
 - Extension aux termes d'ordres supérieures
 - Prise en compte de plusieurs objets interagissants

Approximations « Born étendu »

Introduit par Habashy *et al.* (1993)

- $\underline{\mathbf{G}}_{22}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ piquée en $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$
 - Atténuation dans le milieu 2
- ⇒ contribution principale autour de $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$



⇨ L'approximation Localisée Non-linéaire :

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}) \approx \mathbf{E}_2^{inc}(\mathbf{r}) + j\omega\mu_0 \left[\int_{\Omega} \underline{\mathbf{G}}_{22}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sigma_2 \chi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right] \mathbf{E}_2(\mathbf{r})$$

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}) \approx \underline{\Gamma}(\mathbf{r}) \mathbf{E}_2^{inc}(\mathbf{r}), \quad \underline{\Gamma}(\mathbf{r}) = \left[\underline{\mathbf{I}} - j\omega\mu_0 \int_{\Omega} \underline{\mathbf{G}}_{22}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sigma_2 \chi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right]^{-1}$$

- Pas de dépolarisation ⇒ $\underline{\Gamma}(\mathbf{r})$ diagonal

⇨ Autres approximations (expressions différentes de $\underline{\Gamma}(\mathbf{r})$)

Développement BF (théorie I)

Approximation de « Born étendu »

$$\mathbf{H}_2^{dif}(\mathbf{r}) \approx \frac{k_\Omega^2 - k_2^2}{j\omega\mu_0} \int_\Omega \underline{\mathbf{G}}^{me}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot [\underline{\Gamma}(\mathbf{r}') \mathbf{E}_2^{inc}(\mathbf{r}')] d\mathbf{r}'$$

$$\underline{\Gamma}(\mathbf{r}) = \left[\mathbf{I} - j\omega\mu_0 \int_\Omega \underline{\mathbf{G}}_{22}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sigma_2 \chi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right]^{-1}$$

$$= \left[\mathbf{I} - (k_\Omega^2 - k_2^2) \left(\mathbf{I} + \frac{\nabla\nabla}{k_2^2} \right) \int_\Omega g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right]^{-1}$$

avec $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{jk_2 R}}{4\pi R}$, $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$

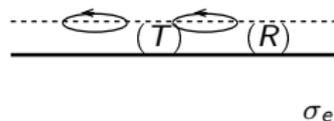
Développement basse-fréquence

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n (jk_2)^n \text{ avec } \Phi = g(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \omega, \underline{\Gamma}(\mathbf{r}) \text{ ou } \mathbf{E}_2^{inc}(\mathbf{r})$$

> Limitation au 3ème ordre

$$\underline{\Gamma}_n(\mathbf{r}) \text{ fonction de } \nabla\nabla \int_\Omega \frac{d\mathbf{r}'}{R}, \int_\Omega \frac{d\mathbf{r}'}{R}, \nabla\nabla \int_\Omega R d\mathbf{r}', \int_\Omega d\mathbf{r}', \nabla\nabla \int_\Omega R^2 d\mathbf{r}'$$

Variation d'impédance pour 1 objet



$$I^2 \Delta Z_{RT} = - \int_{\Omega} \mathbf{E}_R^{inc}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{J}_T(\mathbf{r}) dV$$

$$\mathbf{J}_T(\mathbf{r}) = \Delta\sigma(\mathbf{r}) \mathbf{E}_T(\mathbf{r}); \quad \Delta\sigma(\mathbf{r}) = \sigma(\mathbf{r}) - \sigma_e$$

Objet de faible volume : Dimensions objet $\ll \delta$

$$I^2 \Delta Z_{RT} = - \mathbf{E}_R^{inc}(\mathbf{r}_0) \cdot \Delta\sigma \mathbf{E}_T(\mathbf{r}_0) V$$

où \mathbf{r}_0 est le centre de l'objet.

Localised Non Linear Approximation

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \underline{\Gamma}(\mathbf{r}) \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r}) \quad r \in V$$

$$\underline{\Gamma} = [\mathbf{I} + \chi \underline{\mathbf{L}}]^{-1} \quad \text{where } \chi = \frac{\Delta\sigma}{\sigma_e}, \quad \underline{\mathbf{L}}(\mathbf{r}) = -(k_e^2 \mathbf{I} + \nabla \nabla) \int_V g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{r}'$$

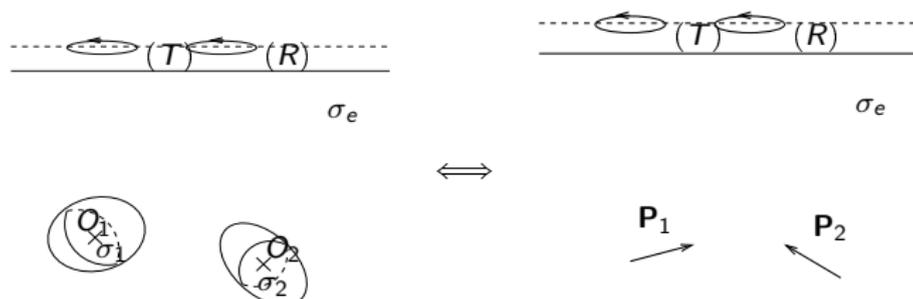
k_e is the wave number in the external medium : $k_e^2 \approx j\omega\mu_0\sigma_e$

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \text{ scalar Green fonction : } g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{jk_e \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}}{4\pi \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}$$

The obstacle is **equivalent to an electric dipole** placed in \mathbf{r}_0 :

$$I^2 \Delta Z = - \mathbf{E}_{(R)}^{inc}(\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}_0) \quad \text{with } \mathbf{P}(\mathbf{r}_0) = V \Delta\sigma \underline{\Gamma}(\mathbf{r}_0) \mathbf{E}_{(T)}^{inc}(\mathbf{r}_0) = \underline{\mathbf{P}}(\mathbf{r}_0) \mathbf{E}_{(T)}^{inc}(\mathbf{r}_0)$$

Diffraction multiple, application à 2 objets



Pour 2 objets, même principe : $I^2 \Delta Z = -\sum_{i=1}^2 \mathbf{E}_{(R)}^{inc}(\mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{P}_i(\mathbf{r}_i)$

Modélisation de l'interaction : théorie de la diffraction multiple de Lax-Foldy :

$$\mathbf{P}_1(\mathbf{r}_1) = \underline{\mathbf{P}}_1 \left[\mathbf{E}_{(T)}^{inc}(\mathbf{r}_1) + \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}_{12}) \mathbf{P}_2(\mathbf{r}_2) \right] \quad \mathbf{P}_2(\mathbf{r}_2) = \underline{\mathbf{P}}_2 \left[\mathbf{E}_{(T)}^{inc}(\mathbf{r}_2) + \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}_{21}) \mathbf{P}_1(\mathbf{r}_1) \right]$$

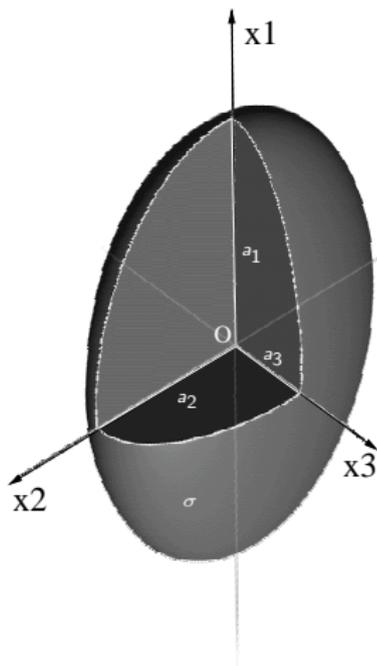
avec $\underline{\mathbf{P}}_i = \Delta \sigma_i \mathbf{V}_i \underline{\Gamma}_i \quad i = 1, 2$

$$\underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}_{12}) = j\omega\mu_0 \left[\mathbf{I} + \frac{1}{k_e^2} \nabla \nabla \right] g(\mathbf{r}_{12}) ; \quad \mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

$$\mathbf{P}_1(\mathbf{r}_1) = \underline{\mathbf{D}}_1^{-1} \underline{\mathbf{P}}_1 \left[\mathbf{E}_{(T)}^{inc}(\mathbf{r}_1) + \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}_{12}) \mathbf{P}_2 \mathbf{E}_{(T)}^{inc}(\mathbf{r}_2) \right] \quad \text{avec } \underline{\mathbf{D}}_1 = \mathbf{I} - \underline{\mathbf{P}}_1 \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}_{12}) \underline{\mathbf{P}}_2 \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}_{21})$$

$$I^2 \Delta Z = -\mathbf{E}_{(R)}^{inc}(\mathbf{r}_1) \cdot \underline{\mathbf{D}}_1^{-1} \underline{\mathbf{P}}_1 \left[\mathbf{E}_{(T)}^{inc}(\mathbf{r}_1) + \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}_{12}) \underline{\mathbf{P}}_2 \mathbf{E}_{(T)}^{inc}(\mathbf{r}_2) \right] \\ - \mathbf{E}_{(R)}^{inc}(\mathbf{r}_2) \cdot \underline{\mathbf{D}}_2^{-1} \underline{\mathbf{P}}_2 \left[\mathbf{E}_{(T)}^{inc}(\mathbf{r}_2) + \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}_{21}) \underline{\mathbf{P}}_1 \mathbf{E}_{(T)}^{inc}(\mathbf{r}_1) \right]$$

Ellipsoïde conducteur et développement BF



- 1 $\underline{\mathbf{L}}_{\text{exact}}$ inconnu $\Rightarrow \underline{\Gamma}_{\text{exact}}$ évaluation numérique coûteuse
- 2 Développement basse fréquence :
 $\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(jk_e)^n, \quad \psi_n \in \mathbf{R}^+$
- 3 3 premiers ordres de $\underline{\mathbf{L}}$ connus dans le repère propre de ellipsoïde^a :

$$\underline{\Gamma} = \underline{\mathbf{R}}^{-1} \left[\underline{\mathbf{I}} + \chi \sum_{n=0}^3 \underline{\mathbf{L}}_n (jk_e)^n \right]^{-1} \underline{\mathbf{R}}$$

$\underline{\mathbf{R}}$ matrice de rotation

$$\underline{\mathbf{L}}_0 = a_1 a_2 a_3 \begin{pmatrix} I_1^1(a_1) & 0 & 0 \\ 0 & I_1^2(a_1) & 0 \\ 0 & 0 & I_1^3(a_1) \end{pmatrix}$$

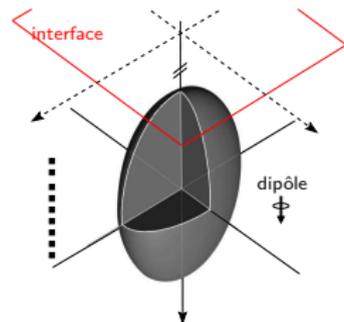
I_1 intégrale elliptique de 2nd ordre

$\underline{\mathbf{L}}_n$ diagonaux dans le repère propre.

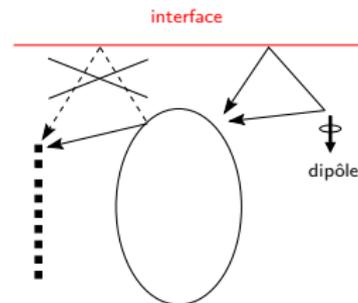
a. Perrusson et al, Radio Science, 35, n°2, 2000

Développement BF (théorie II)

- ➞ Calcul semi-analytique des termes
Obstacle canonique : **ellipsoïde**
Source : dipôle magnétique
⇒ expression semi-analytique de $\underline{\Gamma}_n(\mathbf{r})$



- ➞ Prise en compte partielle de l'interface
Rappel : $\mathbf{E}_2(\mathbf{r}) \approx \underline{\Gamma}(\mathbf{r}) \mathbf{E}_2^{inc}(\mathbf{r})$
 - $\mathbf{E}_2^{inc}(\mathbf{r})$: espace stratifié
 - $\underline{\Gamma}(\mathbf{r})$: espace homogène⇒ interactions obstacle/interface négligées



Reconstruction d'obstacles équivalents (théorie)

Points importants :

- 1 Inconnus : positions du centre, demi-axes, orientation
- 2 Méthode d'optimisation : méthode de gradient

3 Développement basse fréquence : $\mathbf{H}^{dif}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{H}_n^{dif}(\mathbf{r}) (jk)^n$

4 Limitation au terme statique $\mathbf{H}_0^{dif}(\mathbf{r})$.

- Sphère (développement en harmoniques sphériques)

$$\phi_0^{dif}(\mathbf{r}) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{m=0}^p \frac{1}{r^{p+1}} P_p^m(\cos \theta) \left[a_p^m \cos(m\phi) + b_p^m \sin(m\phi) \right]$$

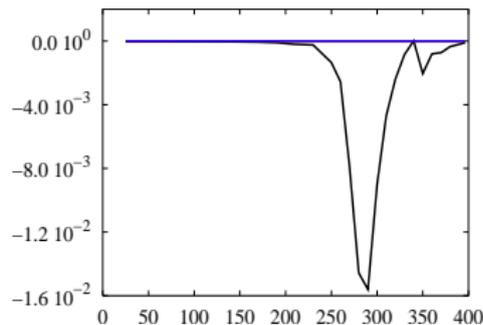
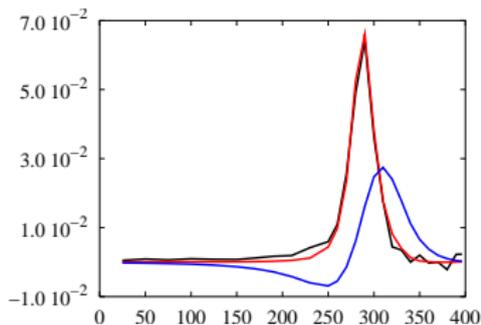
- Ellipsoïde (développement en harmoniques ellipsoïdales)

$$\phi_0^{dif}(\mathbf{r}) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{m=0}^p f_p^m \mathbb{F}_p^m(\mathbf{r})$$

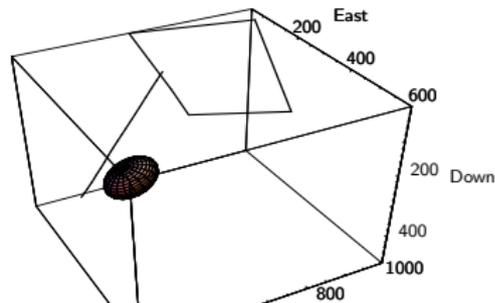
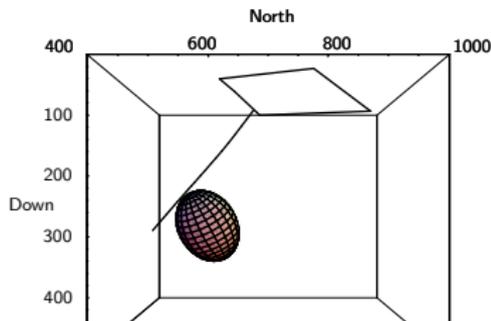
Terme prépondérant : $p = 1$

Reconstruction d'obstacles équivalents (Illustration)

Données réelles - 1120 Hz - Jakonmutka (Finland)



Mesures Sphère Ellipsoïde



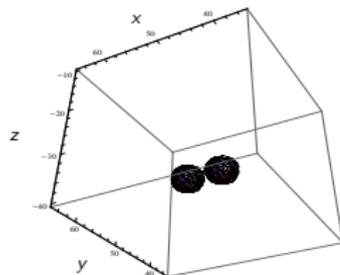
Cost function

Classical cost function

$$f_1(\mathbf{X}) = \frac{\|\Delta\mathcal{Z} - \Delta\mathcal{Z}_{cal}(\mathbf{X})\|^2}{\|\Delta\mathcal{Z}\|^2}$$

$\Delta\mathcal{Z}_{cal}$ model presented previously.

$\Delta\mathcal{Z}$ simulated data from CIVA.
with a white Gaussian noise, SNR 20 dB.



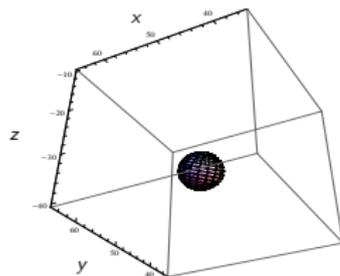
(j) Exact configuration.

New cost function

$$f(\mathbf{X}) = \frac{f_1(\mathbf{X})}{1 + 2\alpha} + \frac{\alpha f_2(\mathbf{X})}{1 + 2\alpha}$$

with $\alpha \in]0, 1[$ here $\alpha = 0.5$

$$f_2(\mathbf{X}) = \frac{\|\Re(\Delta\mathcal{Z}) - \Re(\Delta\mathcal{Z}_{cal}(\mathbf{X}))\|^2}{\|\Re(\Delta\mathcal{Z})\|^2} + \frac{\|\Im(\Delta\mathcal{Z}) - \Im(\Delta\mathcal{Z}_{cal}(\mathbf{X}))\|^2}{\|\Im(\Delta\mathcal{Z})\|^2}$$

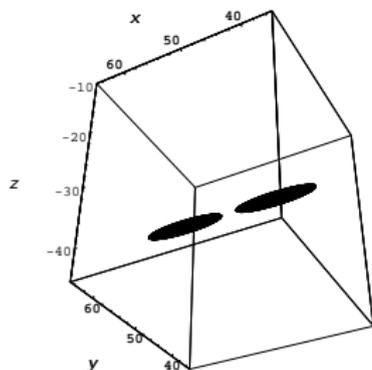


(k) Single retrieved sphere.

Choice of the algorithm of optimization

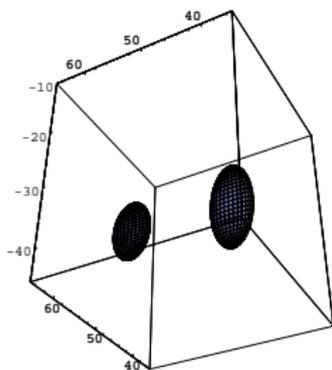
- 2 kinds of problems in order to characterize multiple obstacles
 - The number of buried obstacle is known
 - The number of buried obstacle is unknown (but supposed to be low)
- The differential evolution (DE) allows to solve the first kind of problem
 - stochastic algorithm
 - based on the laws of evolution and of genetic
 - allows to leave a local minimum
 - global convergence (need to be demonstrated)
- Using a hybrid algorithm of the DE to solve the second kind of problem
 - Using a strategy of communication between groups
 - Using a multi-resolution

Reconstruction of ellipsoids



(l) Exact configuration.

Exact positions



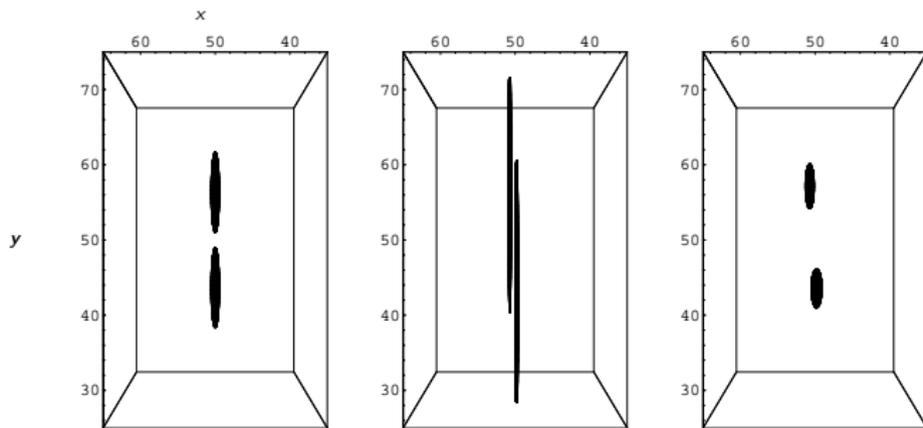
(m) Retrieved configuration with NLLS (n) Another reconstructed configuration.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 42.50 \text{ m}, y_1 = 50.00 \text{ m}, z_1 = -30.00 \text{ m} \\ x_1 = 57.50 \text{ m}, y_1 = 50.00 \text{ m}, z_1 = -30.00 \text{ m} \end{array} \right.$$

Estimated positions

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 43.08 \text{ m}, y_1 = 50.84 \text{ m}, z_1 = -30.73 \text{ m} \\ x_1 = 56.91 \text{ m}, y_1 = 48.54 \text{ m}, z_1 = -29.98 \text{ m} \end{array} \right.$$

Reconstruction of ellipsoids



(o) Exact configuration.

(p) Retrieved configuration with LNL model.

(q) Another reconstructed configuration.

Exact positions

$$\begin{cases} x_1 = 50.00 \text{ m}, y_1 = 42.50 \text{ m}, z_1 = -30.00 \text{ m} \\ x_1 = 50.00 \text{ m}, y_1 = 57.50 \text{ m}, z_1 = -30.00 \text{ m} \end{cases}$$

Estimated positions

$$\begin{cases} x_1 = 49.78 \text{ m}, y_1 = 42.35 \text{ m}, z_1 = -30.78 \text{ m} \\ x_1 = 50.82 \text{ m}, y_1 = 58.31 \text{ m}, z_1 = -30.64 \text{ m} \end{cases}$$

Conclusions and Perspectives

- Fast direct approach including interaction between 2 (or more) permeable conductive ellipsoïds (validate for 100 Hz to 10 MHz)
- Fast inversion for 1 or 2 spheres (CPU time <1 hour)
 - Good localization and volume evaluation
 - The evaluation of the conductivity is more difficult
 - The influence of interaction must not be neglected for some cases
- Fast inversion for 1 or 2 ellipsoids (CPU time <2 hour)
 - Good localization
 - The evaluation of the conductivity and the volume is more difficult
 - The evaluation of the orientation is an ill-posed problem
- Would it be possible to characterize ellipsoids or spheroids with multi-frequency data ?
- Characterization of more than 2 obstacles

Plan

3 Bibliographie

4 Compléments

Bibliographie I

- Bertero, M. and Pike, E. R., editors (1991). *Inverse Problems in Scattering and Imaging*. Malvern Physics. Adam Hilger.
- Boerner, W. M., Brand, H., Cram, L. A., and A. K. Jordan, D. T. G., Keydel, W., Schwierz, G., and Vogel, M., editors (1985). *Inverse Methods in Electromagnetic Imaging*, volume 1. D. Reidel, Dordrecht.
- Boerner, W. M., Brand, H., Cram, L. A., Holm, W. A., Stein, D. E., Wiesbeck, W. ., Keydel, W., Giuli, D., Gjessing, D. T., and Molinet, F. A., editors (1992). *Direct and Inverse Methods in Radar Polarimetry*. Kluwer, Dordrecht.
- Bonnet, M., editor (1999). *Problèmes Inverses : de l'Expérimentation à la Modélisation*, volume 22 of *Arago*. Observatoire Français des Techniques Avancées (OFTA), tec & doc edition.
- Collins, M. D. and Kuperman, W. A. (1994). Inverse problems in ocean acoustics. *Inverse Problems*, 10 :1023–1040.
- Colton, D. and Kress, R. (1992). *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*. Number 93 in Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag.
- Dorn, O. and Lesselier, D. (2006). Level set methods for inverse scattering. *Inverse Problems*, 22(4) :R67–R131.
- Fletcher, R. (1987). *Practical Methods of Optimization*. John Wiley & Sons Ltd.

Bibliographie II

- Groetsch, C. W. (1993). *Inverse Problems in the Mathematical Sciences*. Vieweg, Wiesbaden.
- Lesselier, D. and Duchêne, B. (1996). Wavefield inversion of objects in stratified environments. From backpropagation schemes to full solutions. In Stone, W. R., editor, *Review of Radio Science 1993-1996*, pages 235–268. Oxford University Press, Oxford.
- Sabatier, P. C., editor (1987). *Inverse Problems : an Interdisciplinary Study*, volume 19 of *Advances in Electronics and Electron Physics*. Academic Press.
- Sabatier, P. C. (2000). Past and future of inverse problems. *J. Math. Phys.*, 41(6) :4082–4124.
- Sabatier, P. C. (2001). Should we study sophisticated inverse problems? *Inverse Problems*, 17(4) :1219–1223.
- Sethian, J. A. (1999). *Level Set Methods and Fast Marching Methods*. Cambridge University Press, Cambridge, 2nd edition.
- Sokolowski, J. and Zolésio, J.-P. (1992). *Introduction to Shape Optimization. Shape Sensitivity Analysis*. Springer, Berlin.
- Tarantola, A. (1987). *Inverse Problem Theory*. Elsevier Science Publisher.

Bibliographie III

- Tikhonov, A. and Arsénine, V. (1976). *Méthodes de Résolution de Problèmes Mal Posés*. Mir, Moscou.
- van den Berg, P. M. and Kleinman, R. E. (1997). Gradient methods in inverse acoustic and electromagnetic scattering. In Chavent, G. and Sabatier, P. C., editors, *Large-Scale Optimization with Applications*, pages 143–158. Berlin : Springer.

Plan

3 Bibliographie

4 Compléments

Expression of $\nabla_{\chi^e} [\Delta Z (\chi^e)] - I$

$$\Delta Z (\chi^e) = K \int_{\Omega} \mathbf{E}_{2,R}^{\text{inc}}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_{2,T}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', K = -\frac{\sigma_2}{I_T I_R} \quad \text{Receiver, Transmitter} \quad (22)$$

By definition, we have

$$\begin{aligned} d\Delta Z (\chi^e) &= \langle \nabla_{\chi^e} [\Delta Z (\chi^e)], d\chi^e \rangle_{\Omega} \\ &= \int_{\Omega} \overline{\nabla_{\chi^e} [\Delta Z (\chi^e)](\mathbf{r}') d\chi^e(\mathbf{r}') d(\mathbf{r}')} \end{aligned}$$

Now expression of $d\Delta Z (\chi^e)$ as a function of $d\chi^e(\mathbf{r}')$ and identification

- 1 Differentiation : $d\Delta Z (\chi^e) = K \int_{\Omega} \mathbf{E}_{2,R}^{\text{inc}}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{J}_{2,T}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'$
- 2 Using expression of $\mathbf{E}_{2,R}^{\text{inc}}(\mathbf{r})$

$$\mathbf{E}_2^{\text{inc}}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) - j\omega\sigma_2\mu_2 \int_{\Omega} \underline{\mathbf{G}}_{22}^{\text{ee}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \chi^e(\mathbf{r}') \mathbf{E}_2(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'.$$

Expression of $\nabla_{\chi^e} [\Delta Z(\chi^e)] - II$

- Rewriting $d\Delta Z(\chi^e)$ using Manipulation + Reciprocity relations

$$\begin{aligned}
 d\Delta Z(\chi^e) &= K \int_{\Omega} d\mathbf{r}' \left[\mathbf{E}_{2,R}(\mathbf{r}') - j\omega\sigma_2\mu_2 \int_{\Omega} \underbrace{\mathbf{G}_{22}^{ee}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \cdot \chi^e(\mathbf{r}) \mathbf{E}_{2,R}(\mathbf{r})}_{\chi^e(\mathbf{r})\mathbf{E}_{2,R}(\mathbf{r}) \cdot \underline{\mathbf{G}}_{22}^{ee\ t}(\mathbf{r}', \mathbf{r})} d\mathbf{r} \right] \cdot d\mathbf{J}_{2,T}(\mathbf{r}') \\
 &= K \left\{ \int_{\Omega} \mathbf{E}_{2,R}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{J}_{2,T}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right. \\
 &\quad \left. - j\omega\sigma_2\mu_2 \int_{\Omega} d\mathbf{r} \int_{\Omega} d\mathbf{r}' \underbrace{\chi^e(\mathbf{r}) \mathbf{E}_{2,R}(\mathbf{r}) \cdot \underline{\mathbf{G}}_{22}^{ee\ t}(\mathbf{r}', \mathbf{r})}_{\chi^e(\mathbf{r})\mathbf{E}_{2,R}(\mathbf{r}) \cdot \underline{\mathbf{G}}_{22}^{ee\ t}(\mathbf{r}', \mathbf{r})} \cdot d\mathbf{J}_{2,T}(\mathbf{r}') \right\} \\
 &= K \int_{\Omega} \mathbf{E}_{2,R}(\mathbf{r}) \cdot \left[d\mathbf{J}_{2,T}(\mathbf{r}) - j\omega\sigma_2\mu_2 \chi^e(\mathbf{r}) \int_{\Omega} \underline{\mathbf{G}}_{22}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot d\mathbf{J}_{2,T}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right].
 \end{aligned}$$

Expression of $\nabla_{\chi^e} [\Delta Z(\chi^e)]$ – III

• Working on $d\mathbf{J}_{2,T}(\mathbf{r}) - j\omega\sigma_2\mu_2\chi^e(\mathbf{r}) \int_{\Omega} \underline{\mathbf{G}}_{22}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot d\mathbf{J}_{2,T}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'$

$$\mathbf{J}_{2,T}(\mathbf{r}) = \chi^e(\mathbf{r}) \mathbf{E}_{2,T}^{\text{inc}}(\mathbf{r}) + j\omega\sigma_2\mu_2\chi^e(\mathbf{r}) \int_{\Omega} \underline{\mathbf{G}}_{22}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_{2,T}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}',$$

$$d\mathbf{J}_{2,T}(\mathbf{r}) = d\chi^e(\mathbf{r}) \mathbf{E}_{2,T}^{\text{inc}}(\mathbf{r}) + j\omega\sigma_2\mu_2 d\chi^e(\mathbf{r}) \int_{\Omega} \underline{\mathbf{G}}_{22}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_{2,T}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \\ + j\omega\sigma_2\mu_2\chi^e(\mathbf{r}) \int_{\Omega} \underline{\mathbf{G}}_{22}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot d\mathbf{J}_{2,T}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'$$

$$d\mathbf{J}_{2,T}(\mathbf{r}) - j\omega\sigma_2\mu_2\chi^e(\mathbf{r}) \int_{\Omega} \underline{\mathbf{G}}_{22}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot d\mathbf{J}_{2,T}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \\ d\chi^e(\mathbf{r}) \underbrace{\left(\mathbf{E}_{2,T}^{\text{inc}}(\mathbf{r}) + j\omega\sigma_2\mu_2 \int_{\Omega} \underline{\mathbf{G}}_{22}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_{2,T}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right)}_{=\mathbf{E}_{2,T}(\mathbf{r})}$$

Expression of $\nabla_{\chi^e} [\Delta Z (\chi^e)]$ – IV

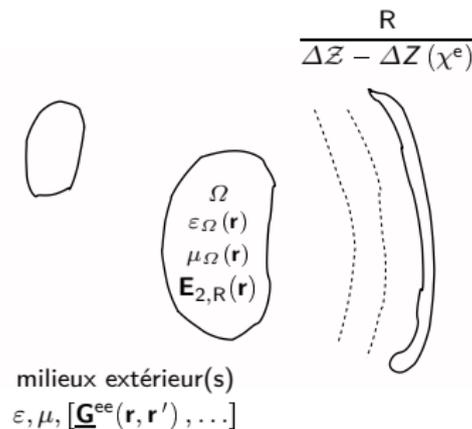
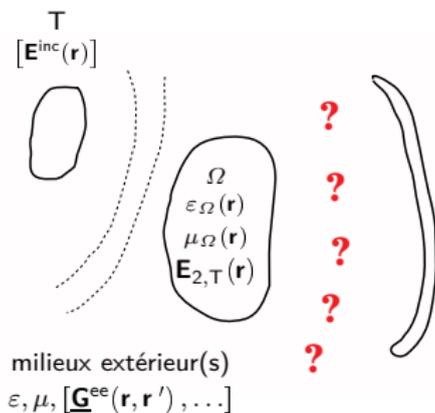
- Replacing $d\mathbf{J}_{2,T}(\mathbf{r}) - j\omega\sigma_2\mu_2\chi^e(\mathbf{r}) \int_{\Omega} \underline{\mathbf{G}}_{22}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot d\mathbf{J}_{2,T}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'$ with $\mathbf{E}_{2,T}(\mathbf{r})$

$$\begin{aligned} d\Delta Z (\chi^e) &= \int_{\Omega} K \mathbf{E}_{2,R}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_{2,T}(\mathbf{r}) d\chi^e(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \\ &= \int_{\Omega} \overline{\nabla_{\chi^e} [\Delta Z (\chi^e)](\mathbf{r}')} d\chi^e(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \end{aligned}$$

- By identification

$$\nabla_{\chi^e} [\Delta Z (\chi^e)](\mathbf{r}') = \overline{K \mathbf{E}_{2,R}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_{2,T}(\mathbf{r})}$$

Which adjoint problem ?



$$\nabla_{\chi^e} [\Delta Z(\chi^e)](\mathbf{r}') = \overline{K \mathbf{E}_{2,R}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_{2,T}(\mathbf{r})}$$

$$\nabla_{\chi^e} \mathcal{F}(\chi^e) = 2\Re \{ \langle \Delta Z - \Delta Z(\chi^e), \nabla_{\chi^e} [\Delta Z(\chi^e)] \rangle \}$$

Need to solve one more direct problem

$$[\mathbf{E}_2^{\text{inc}}] = [\mathbf{I} - \underline{\mathcal{G}}_{22}^{\text{ee}} \chi^e] [\mathbf{E}_2]$$