

Turbo-synchronisation Estimation Paramétrique pour les Communications Haut Débit

Jean-Pierre Barbot

Christophe Vanstraceele, Stéphanie Bay, Benoît Geller

(SATIE ENS Cachan)

Jean-Marc Brossier

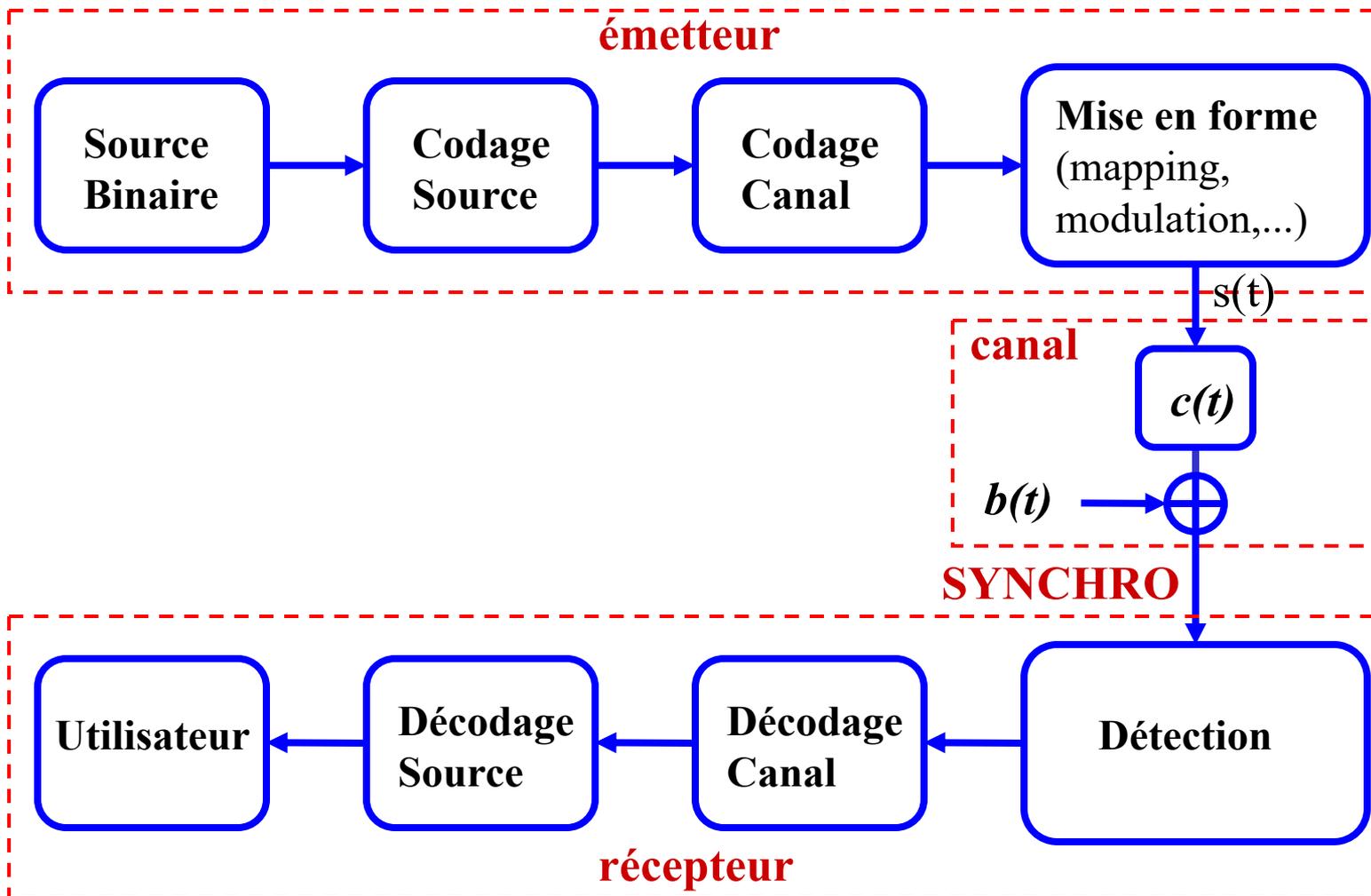
(LIS- Grenoble)

Ecole d'été du GdR-Isis, Peyresq, 27 Juillet 2007

Plan de l'exposé

1. Chaîne de transmission numérique
2. Des codes blocs aux turbo codes
 - Codes blocs linéaires
 - Code produit
3. Turbo codes blocs
 - Décodeur de R. Pyndiah
 - Mise en œuvre simplifiée
4. Les turbo codes pour la synchronisation de phase
 - Maximisation des log-vraisemblances
 - Boucle à remodulation souple
5. Système VDSL
 - Principe du VDSL
 - Turbo codes pour le VDSL

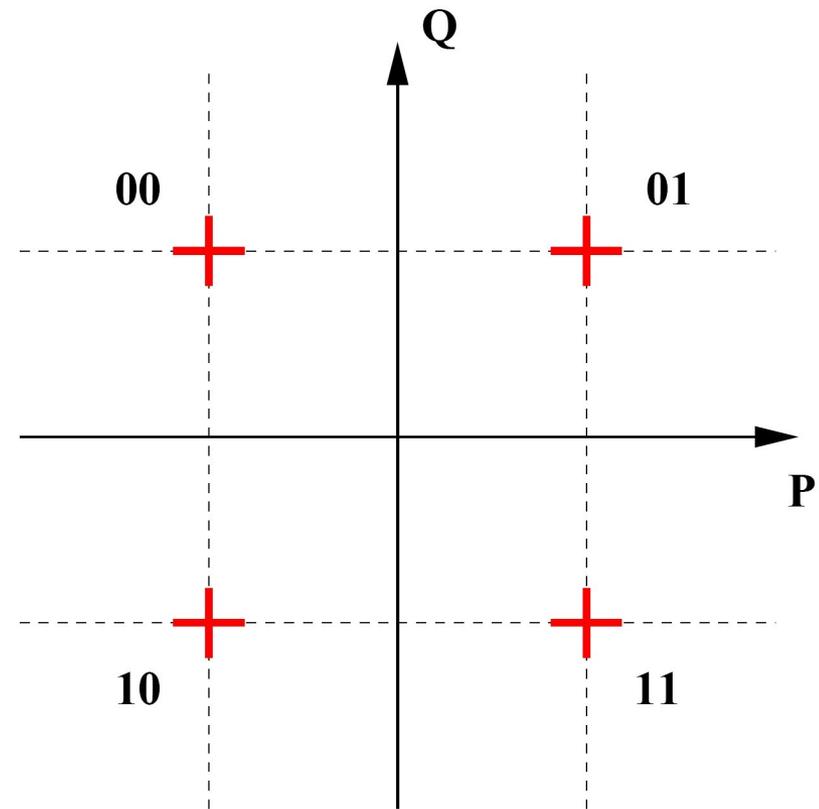
Chaîne de transmission



Chaîne de transmission

Modulation d'Amplitude en Quadrature

P : Phase	p_k
Q : Quadrature	q_k
Symbole MAQ :	$a_k = p_k + j q_k$



Mise en forme :

Enveloppe complexe :

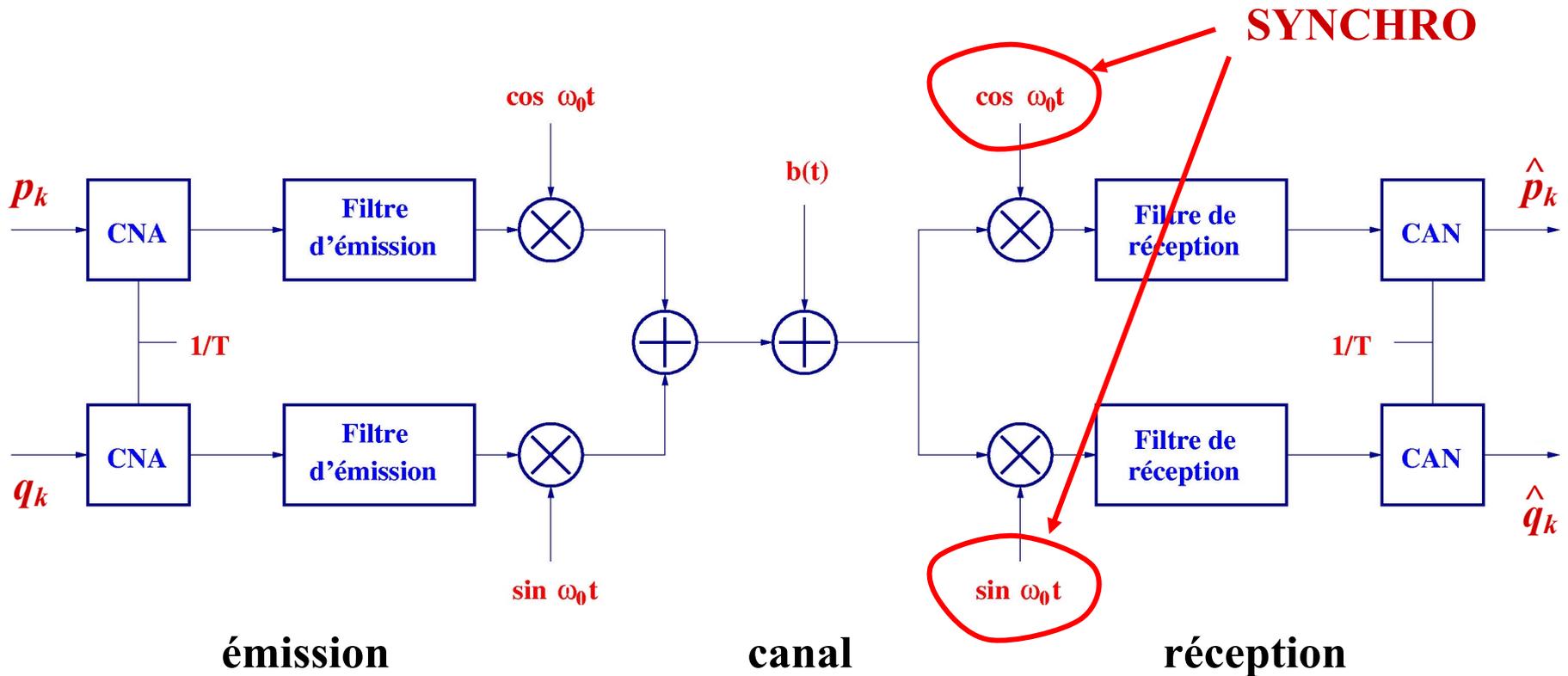
$$x(t) = \sum_k a_k \Pi(t - kT)$$

Signal analytique : $s_a(t) = x(t) e^{j2\pi f_0 t}$

Signal MAQ émis : $s(t) = \text{Re}(x(t) e^{j2\pi f_0 t})$

Chaîne de transmission

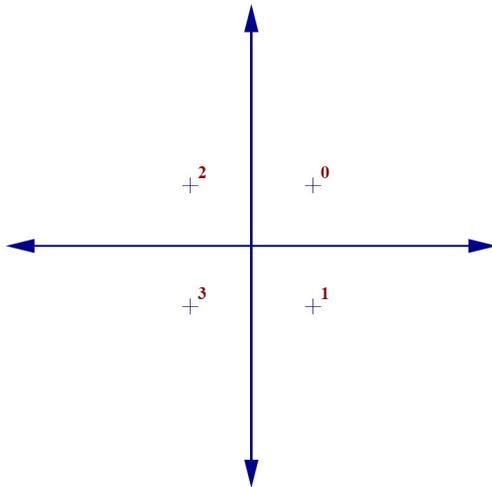
Modulateur et démodulateur MAQ



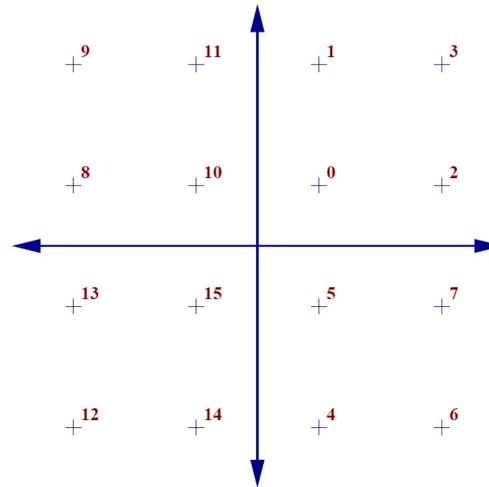
Chaîne de transmission

Constellations MAQ

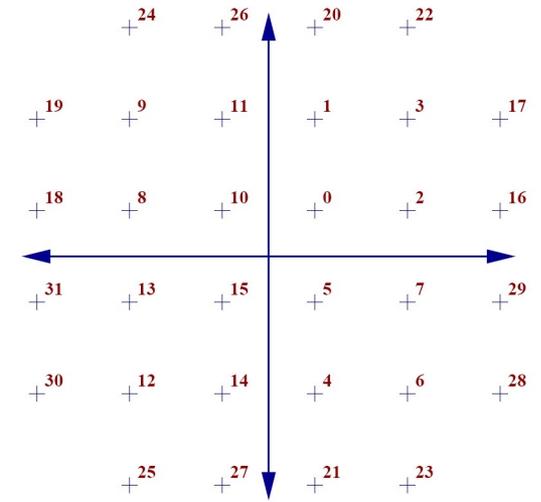
4-QAM



16-QAM



32-QAM



Sensibilité au bruit



Chaîne de transmission

Les paramètres de synchronisation sont :

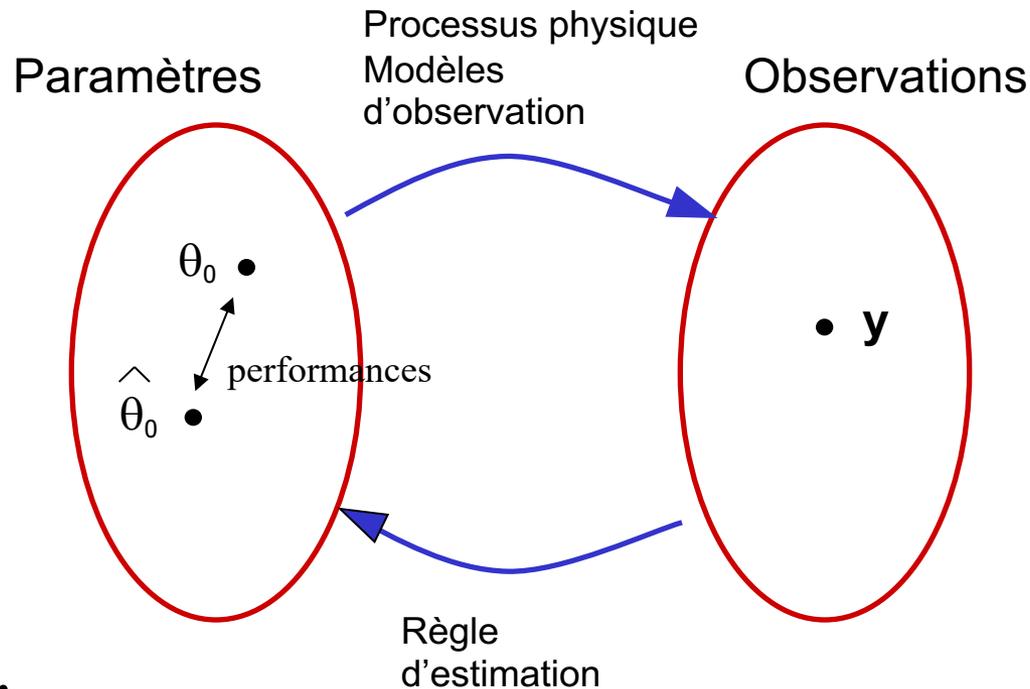
- la fréquence de la porteuse : f_0
- le rythme : T
- le déphasage : φ

C'est un problème d'estimation paramétrique.

⇒ Démarche classique :

- définition d'un estimateur,
- analyse de performance

Chaîne de transmission



Estimateur :

- fonction du modèle d'observation,
- optimisation d'un critère (Max de Vraisemblance, moindres carrés, ...)

Performances :

- biais, variance, ...
- atteint la borne d'estimation (Cramer-Rao, Barankin, Ziv-Zakai, ...)

Chaîne de transmission

Exemple 1 estimation de la fréquence d'une porteuse non-modulée
(Rife, Boorstyn, IEEE Trans. I.T. 1974)

$$y_k = a \cdot \exp(i(\omega_0 kT + \theta)) + b_k \quad (b_k \text{ BABG circulaire})$$

Vecteur d'observation $Y_k = (y_1, y_2, \dots, y_k)^T$

Fonction de vraisemblance:

$$P(Y_k | a, \omega_0, \theta) = \prod_{n=1}^k \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{|y_n - a \cdot \exp(i(\omega_0 nT + \theta))|^2}{2\sigma^2}\right)$$

Recherche du max :

$$\frac{\partial}{\partial \omega_0} \ln \{P(Y_k | a, \omega_0, \theta)\} = 0$$

D'où l'estimateur au sens du max. de vraisemblance

$$(\hat{\omega}_0)_{MV} = \max_{\omega_0} (|TFD(Y_k)|^2)$$

Chaîne de transmission

Idem pour la phase

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln \{P(Y_k | a, \omega_0, \theta)\} = 0 = \sum_{n=1}^k \text{Im}(y_n) e^{-i\varphi_k}$$

D'où l'estimateur MV de la phase

$$\varphi_k = \hat{\theta}_{MV} = \arctan \frac{\sum_{n=1}^k \text{Im}(y_n)}{\sum_{n=1}^k \text{Re}(y_n)}$$

ou sous forme itérative

$$\varphi_k = \varphi_{k-1} + \mu_k \text{Im}(y_k e^{-i\varphi_{k-1}})$$

Etude de performance

$$CRB(\theta) = \frac{1}{\mathbf{E}_y \left[\left(\frac{\partial \ln P(Y|\theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right]} = \frac{\sigma^2}{ka^2}$$

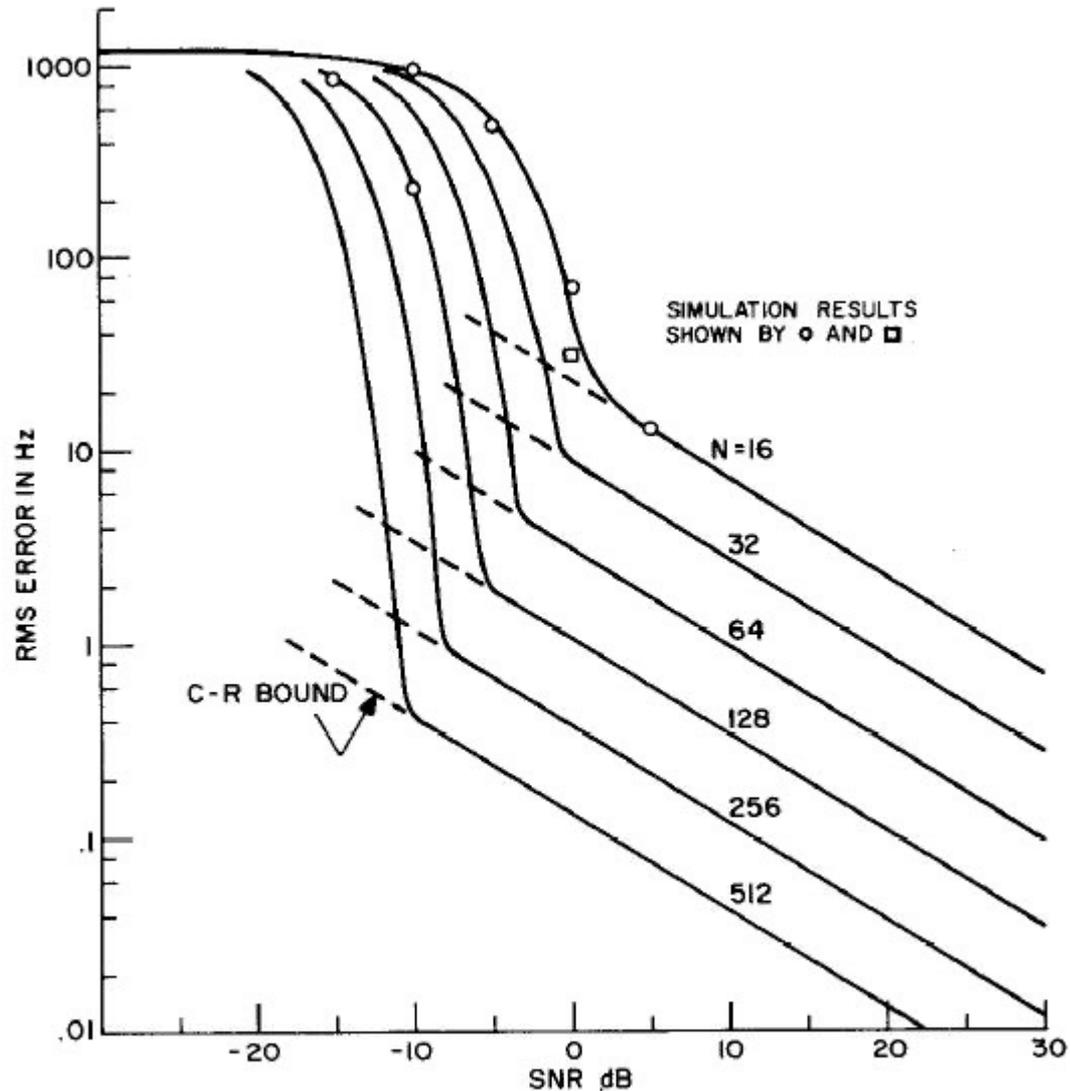


Fig. 4. Approximate performance of ML frequency estimate of single complex tone at 2000 Hz, with unknown phase. $1/T$ is 4000 Hz.

(Rife, Boorstyn 1974)

Chaîne de transmission

Exemple 2 estimation de la fréquence d'une porteuse modulée (BPSK)

$$y_k = a_k e^{i\theta} + b_k \quad (a_k = \pm 1, b_k \text{ BABG circulaire de variance } \sigma^2/2)$$

La fct de vraisemblance :

$$P(Y_k | a_1, \dots, a_k, \theta) = \prod_{n=1}^k \frac{1}{\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{|y_n - a_n \cdot \exp(i(\omega_0 nT + \theta))|^2}{\sigma^2}\right)$$

Marginalisation suivant les a_k : $p(a_k=+1)=p(a_k=-1)=1/2$

$$P(Y_k | \theta) = \left(\frac{1}{\pi\sigma^2}\right)^k \prod_{n=1}^k \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{|y_n - (+1) \cdot \exp(i(\omega_0 nT + \theta))|^2}{\sigma^2}\right) \\ + \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{|y_n - (-1) \cdot \exp(i(\omega_0 nT + \theta))|^2}{\sigma^2}\right) \end{array} \right\}$$

Chaîne de transmission

Recherche du maximum de vraisemblance :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln P(Y_k | \theta) = \sum_{n=1}^k \frac{2}{\sigma^2} \operatorname{Im}(y_n e^{-i\theta}) \tanh \left(\frac{2}{\sigma^2} \operatorname{Re}(y_n e^{-i\theta}) \right)$$

Pb, pas de solution triviale.

D'où solution approchée :

$$\varphi_k = \varphi_{k-1} + \gamma \operatorname{Im}(y_k e^{-i\varphi_{k-1}}) \cdot \tanh \left(\frac{2}{\sigma^2} \operatorname{Re}(y_k e^{-i\varphi_{k-1}}) \right)$$

Cas fort RSB : $\tanh(.) \approx \operatorname{sign}(.)$

$$\varphi_k = \varphi_{k-1} + \gamma \operatorname{Im}(\bar{a}_k y_k e^{-i\varphi_{k-1}}) \quad (\text{DFL: Décision Feedback Loop})$$

Cas faible RSB :

$$\varphi_k = \varphi_{k-1} + \gamma \operatorname{Im}(y_k^2 e^{-i2\varphi_{k-1}}) \quad (\text{Boucle de Costas})$$

Chaîne de transmission

Etude de performance

CRBs pour quelques QAM

(F.G. Cowley, IEEE Trans Commun, Jan 1996)

(F. Rice et al., IEEE Trans Commun, sept 2001)

(F. Rice, IEEE Trans Commun, feb 2006)

MCRB (Modified Cramer Rao-Bound)

(A. D'Andrea, U. Mengali, R. Regiannini,
IEEE Trans Commun, Apr 1998) (appliquée à la synchro)

(F. Gini, R. Regiannini, U. Mengali,
IEEE Trans Commun, Jan 1998)

$$MCRB(\theta) = \frac{1}{\mathbf{E}_{y, a_1, \dots, a_k} \left[\left(\frac{\partial \ln P(Y|\theta, a_k)}{\partial \theta} \right)^2 \right]} = \frac{1}{2k} \frac{1}{E_s/N_0}$$

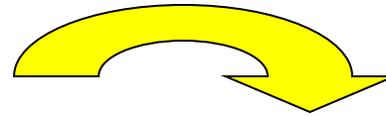
Plan de l'exposé

1. Chaîne de transmission numérique
2. Des codes blocs aux turbo codes
 - Codes blocs linéaires
 - Code produit
3. Turbo codes blocs
 - Décodeur de R. Pyndiah
 - Mise en œuvre simplifiée
4. Les turbo codes pour la synchronisation de phase
 - Maximisation des log-vraisemblances
 - Boucle à remodulation souple
5. Système VDSL
 - Principe du VDSL
 - Turbo codes pour le VDSL

Des codes blocs aux turbo codes

Codes blocs linéaires

Relation linéaire



k bits d'information

bits de redondance

0100100101101

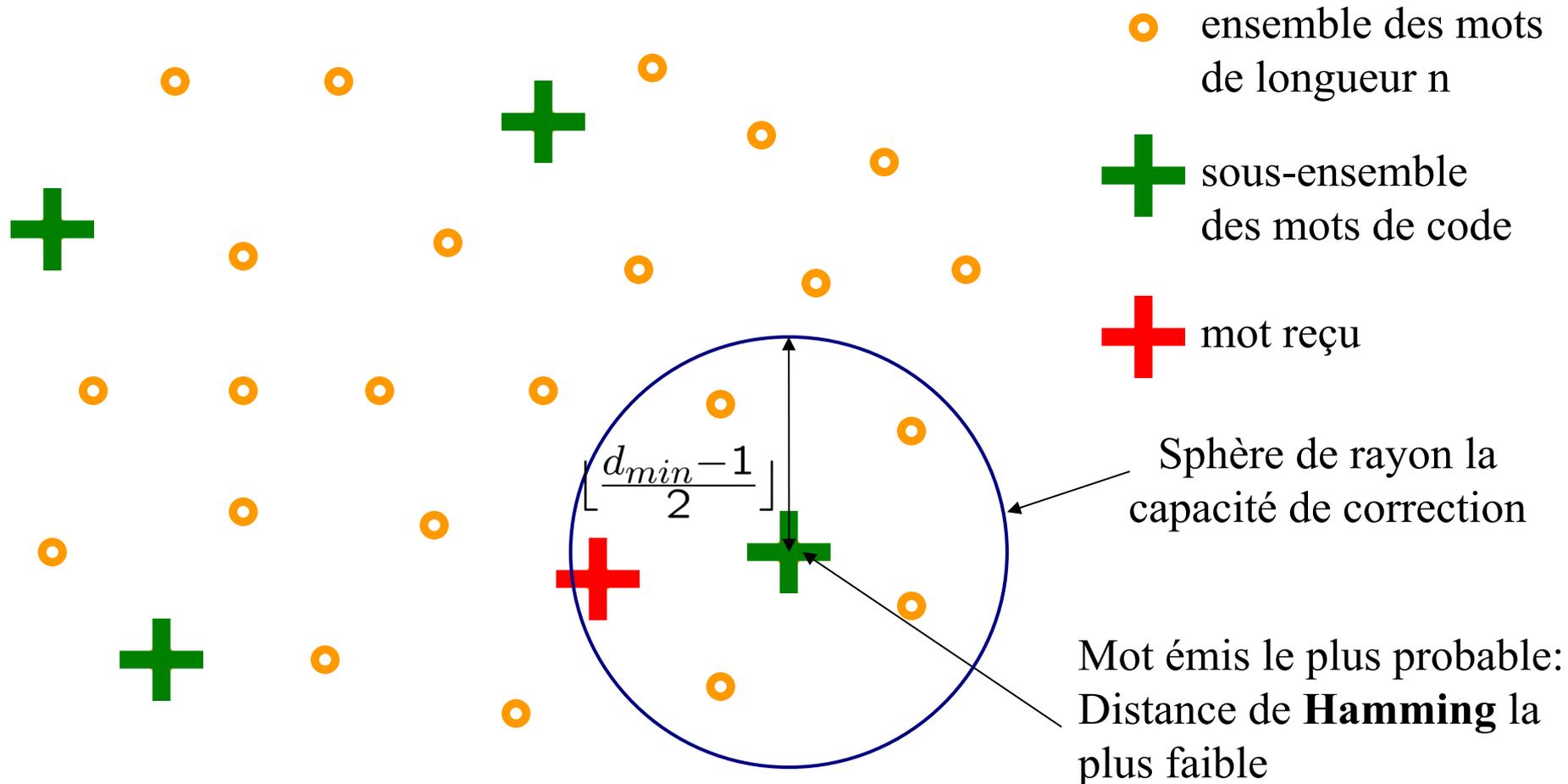
01100101

Distance de Hamming : nombre de bits qui diffèrent entre deux mots

Distance minimale : distance la plus faible entre deux mots du code

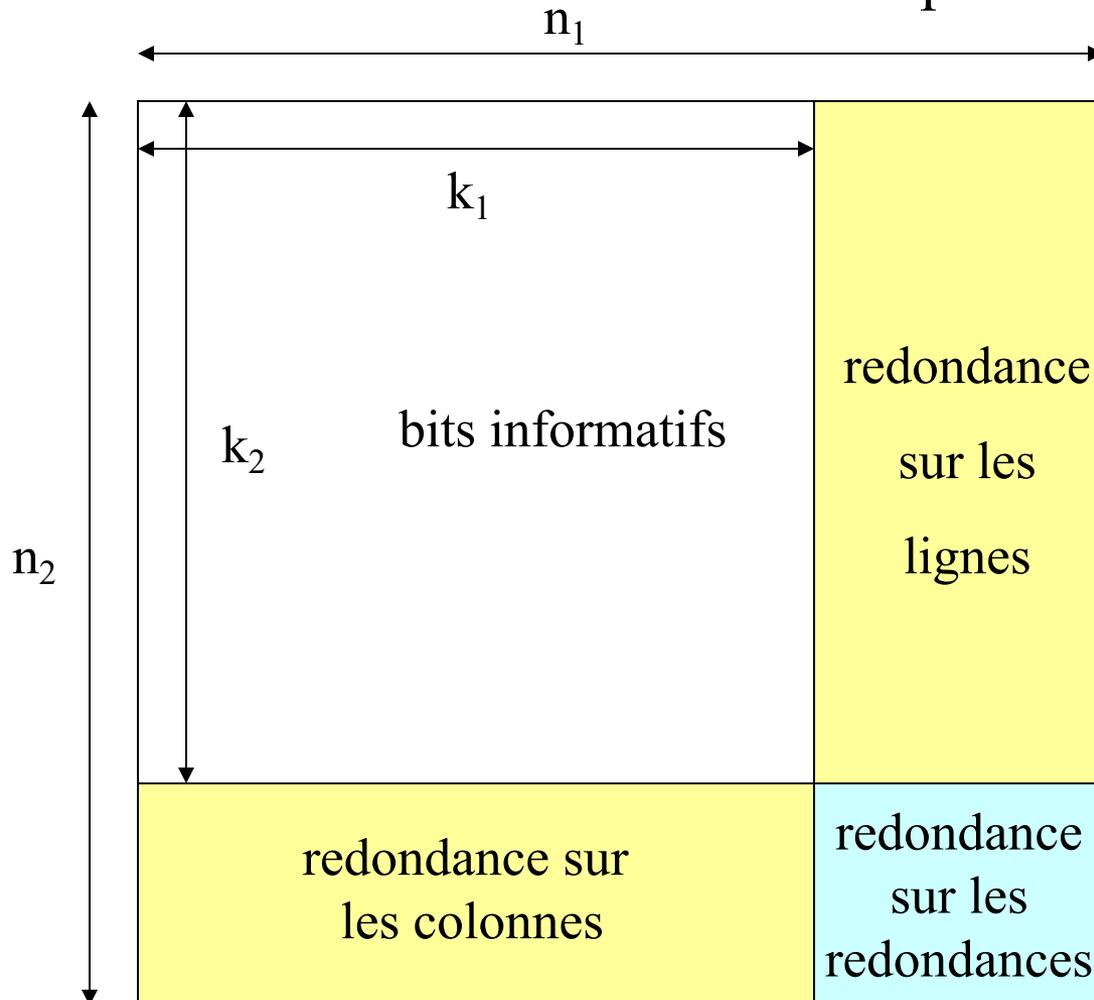
Des codes blocs aux turbo codes

Décodage dur



Des codes blocs aux turbo codes

Code produit



1. $k_1 \times k_2$ bits d'information sont placés dans une matrice,
2. Les k_2 lignes sont codées par $C_1(n_1, k_1, d_1)$,
3. Les n_1 colonnes obtenues sont codées par $C_2(n_2, k_2, d_2)$.

Le code $C = C_1 \times C_2$ obtenu a pour paramètres :

- $n = n_1 \times n_2$
- $k = k_1 \times k_2$
- $d = d_1 \times d_2$

Plan de l'exposé

1. Chaîne de transmission numérique
2. Des codes blocs aux turbo codes
 - Codes blocs linéaires
 - Code produit
3. Turbo codes blocs
 - Décodeur de R. Pyndiah
 - Mise en œuvre simplifiée
4. Les turbo codes pour la synchronisation de phase
 - Maximisation des log-vraisemblances
 - Boucle à remodulation souple
5. Système VDSL
 - Principe du VDSL
 - Turbo codes pour le VDSL

Turbo codes blocs

Décodage à entrée souple : Décodeur de Chase

(Chase, IEEE Trans. IT, Jan. 1972)

Soit une ligne ou une colonne d'un mot de code produit, mappé sur $\{+1;-1\}$:

$$\mathbf{E} = (e_1, \dots, e_l, \dots, e_n)$$

Vecteur reçu (sortie du canal) : $\mathbf{R} = (r_1, \dots, r_l, \dots, r_n)$

Bruit gaussien additif de variance σ^2 : $\mathbf{G} = (g_1, \dots, g_l, \dots, g_n)$

$$\mathbf{R} = \mathbf{E} + \mathbf{G}$$

Décision optimale :

Mot de code $\mathbf{C}^i = (c_1^i, \dots, c_l^i, \dots, c_n^i)$ qui satisfait :

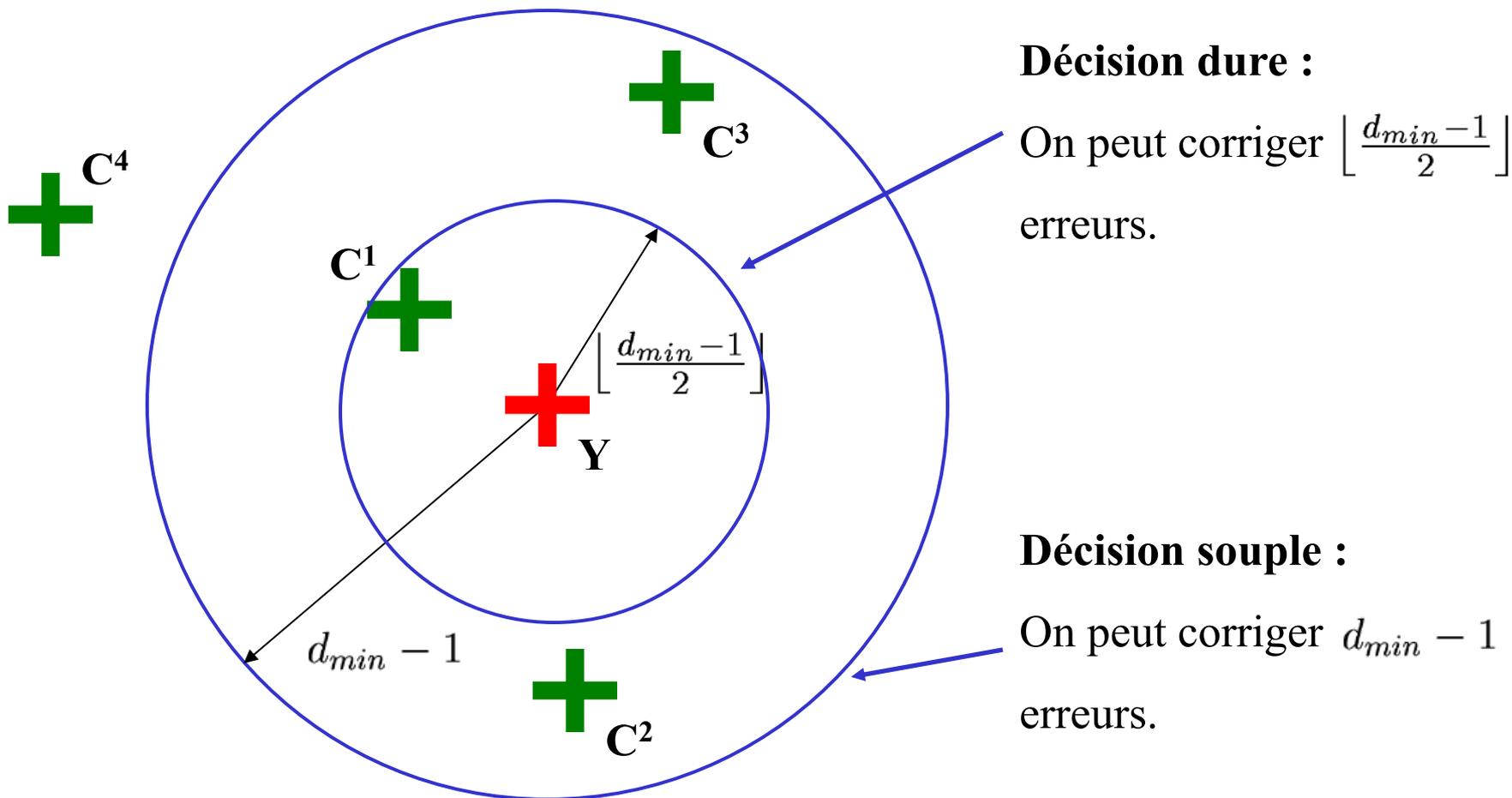
$$\min_i |\mathbf{R} - \mathbf{C}^i|^2$$

$$\text{où : } |\mathbf{R} - \mathbf{C}^i|^2 = \sum_{l=1}^n (r_l - c_l^i)^2$$

(Distance euclidienne minimale)

Turbo codes blocs

Décodage à entrée souple : Décodeur de Chase



Turbo codes blocs

Décodage à entrée souple : Décodeur de Chase

Soit $\mathbf{Y} = \{y_1, \dots, y_n\}$ la décision dure sur \mathbf{R} .

1) **Perturbation** des p bits les moins fiables de $\mathbf{Y} \Rightarrow$ **décodage dur**

\Rightarrow Ensemble de **mots tests** \mathbf{Y}^t ($t = 1 \dots 2^p$) appartenant au code.

2) Pour chaque mot test \mathbf{Y}^t : **calcul du poids analogique**.

3) La décision est le mot de test $\mathbf{D} = \mathbf{Y}^t$ qui satisfait :

$$\min_t |\mathbf{R} - \mathbf{Y}^t|^2$$

Une valeur de p suffisante est $p = \left\lfloor \frac{d_{min}}{2} \right\rfloor$

Turbo codes blocs

Calcul de la sortie souple : Log-vraisemblance

Fiabilité de la décision D du Chasing :

$$\Lambda(d_j) = \ln \left(\frac{\Pr \{e_j = +1/\mathbf{R}\}}{\Pr \{e_j = -1/\mathbf{R}\}} \right)$$

avec :

$$\Pr \{e_j = +1/\mathbf{R}\} = \sum_{\mathbf{C}^i \in \mathbf{S}_j^{+1}} \Pr \{\mathbf{E} = \mathbf{C}^i/\mathbf{R}\}$$

où \mathbf{S}_j^{+1} est l'ensemble des mots de code \mathbf{C}^i tel que $c_j^i = +1$

$$\Pr \{e_j = -1/\mathbf{R}\} = \sum_{\mathbf{C}^i \in \mathbf{S}_j^{-1}} \Pr \{\mathbf{E} = \mathbf{C}^i/\mathbf{R}\}$$

où \mathbf{S}_j^{-1} est l'ensemble des mots de code \mathbf{C}^i tel que $c_j^i = -1$

Turbo codes blocs

Calcul de la sortie souple : Décodeur de R. Pyndiah

(Pyndiah, IEEE Trans Commun, August 98)

Simplification de R. Pyndiah :

$$\Lambda'(d_j) = \frac{1}{2\sigma^2} \left(|\mathbf{R} - \mathbf{C}^{-1(j)}|^2 - |\mathbf{R} - \mathbf{C}^{+1(j)}|^2 \right)$$

Où :

$\mathbf{C}^{+1(j)}$ = mot du code à distance minimale de \mathbf{R} avec le $j^{\text{ième}}$ bit à +1.

$\mathbf{C}^{-1(j)}$ = mot du code à distance minimale de \mathbf{R} avec le $j^{\text{ième}}$ bit à -1.



Décision souple

$$r'_j = r_j + w_j$$

Information extrinsèque

Avec :

$$w_j = \sum_{l=1, l \neq j}^n r_l c_l^{+1(j)} p_l \quad \text{et} \quad p_l = \begin{cases} 0, & \text{si } c_l^{+1(j)} = c_l^{-1(j)} \\ 1, & \text{si } c_l^{+1(j)} \neq c_l^{-1(j)} \end{cases}$$

Turbo codes blocs

Calcul de la sortie souple : Décodeur de R. Pyndiah

- L'un des deux mots $\mathbf{C}^{+1(j)}$ ou $\mathbf{C}^{-1(j)}$ est la décision du chasing \mathbf{D} .
- L'autre mot est appelé $\mathbf{C}^{\mathbf{D}}$: il est recherché parmi les mots tests.

➔ On augmente le nombre p de bits les moins fiables pour augmenter la probabilité de trouver $\mathbf{C}^{\mathbf{D}}$.

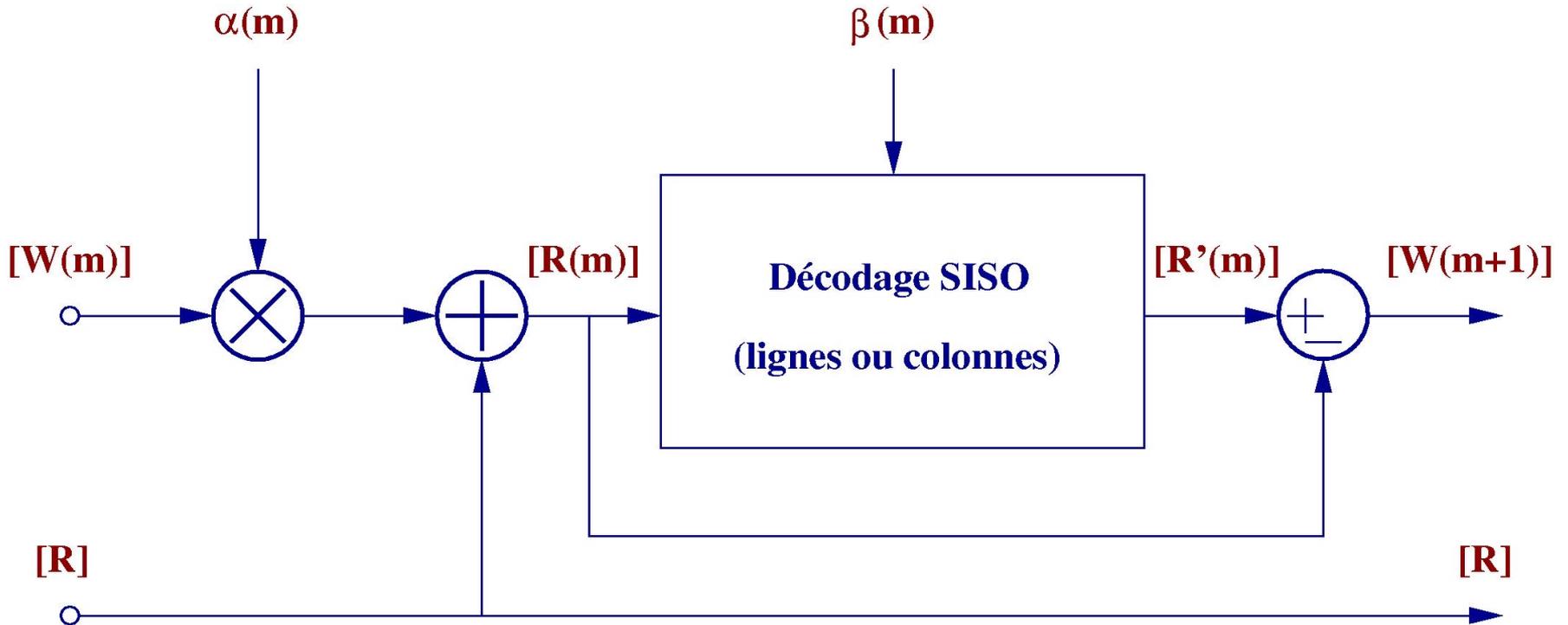
➔ Si on ne trouve pas $\mathbf{C}^{\mathbf{D}}$, on utilise l'approximation suivante :

$$r'_j = \beta \times d_j$$

β = constante positive à optimiser

Turbo codes blocs

Turbo décodeur de R. Pyndiah : demi-itération



Turbo codes blocs

Mise en œuvre classique de l'algorithme

- 1) Algorithme de Chase et **stockage en mémoire** des mots tests obtenus et de leur poids,
- 2) Recherche de la décision dure **D** parmi ces mots,
- 3) Pour chaque bit j , recherche du mot concurrent **C^D** (mot à distance euclidienne minimale du mot reçu **R** avec la contrainte que le $j^{\text{ième}}$ bit soit différent du $j^{\text{ième}}$ bit de **D**)
- 4) Pour chaque bit j , calcul de la fiabilité $f^j = (m^c - m^d)/4$ où m^c et m^d sont respectivement les poids de **C^D** et **D**,
- 5) Calcul des informations extrinsèques par : $w_j = [f_j - d_j \cdot r_j] d_j$

Turbo codes blocs

Mise en œuvre simplifiée

Soit $\mathbf{C}^{+1(j)} = \{c_0^{+1(j)}, \dots, c_n^{+1(j)}\}$ et $\mathbf{C}^{-1(j)} = \{c_0^{-1(j)}, \dots, c_n^{-1(j)}\}$ les mots du code à distance minimale de \mathbf{R} avec le $j^{\text{ième}}$ bit respectivement à +1 et à -1.

$$r'_j = \frac{m^{-1(j)} - m^{+1(j)}}{4} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} m^{+1(j)} &= \|\mathbf{R} - \mathbf{C}^{+1(j)}\|^2 \\ m^{-1(j)} &= \|\mathbf{R} - \mathbf{C}^{-1(j)}\|^2 \end{aligned}$$

Donc : $r'_j = P(\mathbf{C}^{-1(j)}) - P(\mathbf{C}^{+1(j)})$

avec $P(\mathbf{C}) = -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^n r_i c_i$

Il est inutile de stocker les mots tests !

Turbo codes blocs

Mise en œuvre simplifiée

Registres des poids :

$$PM^{(-1)} = \{PM_0^{(-1)}, \dots, PM_j^{(-1)}, \dots, PM_n^{(-1)}\}$$

$$PM^{(+1)} = \{PM_0^{(+1)}, \dots, PM_j^{(+1)}, \dots, PM_n^{(+1)}\}$$

Pour $j = 0 \dots n$, $PM_j^{(-1)} = +\infty$ et $PM_j^{(+1)} = +\infty$

Pour chaque vecteur test y' :

Pour $j = 0 \dots n$, Si $y'_j = -1$ et $P(y') < PM_j^{(-1)} \Rightarrow PM_j^{(-1)} = P(y')$

Si $y'_j = +1$ et $P(y') < PM_j^{(+1)} \Rightarrow PM_j^{(+1)} = P(y')$

Finalement :

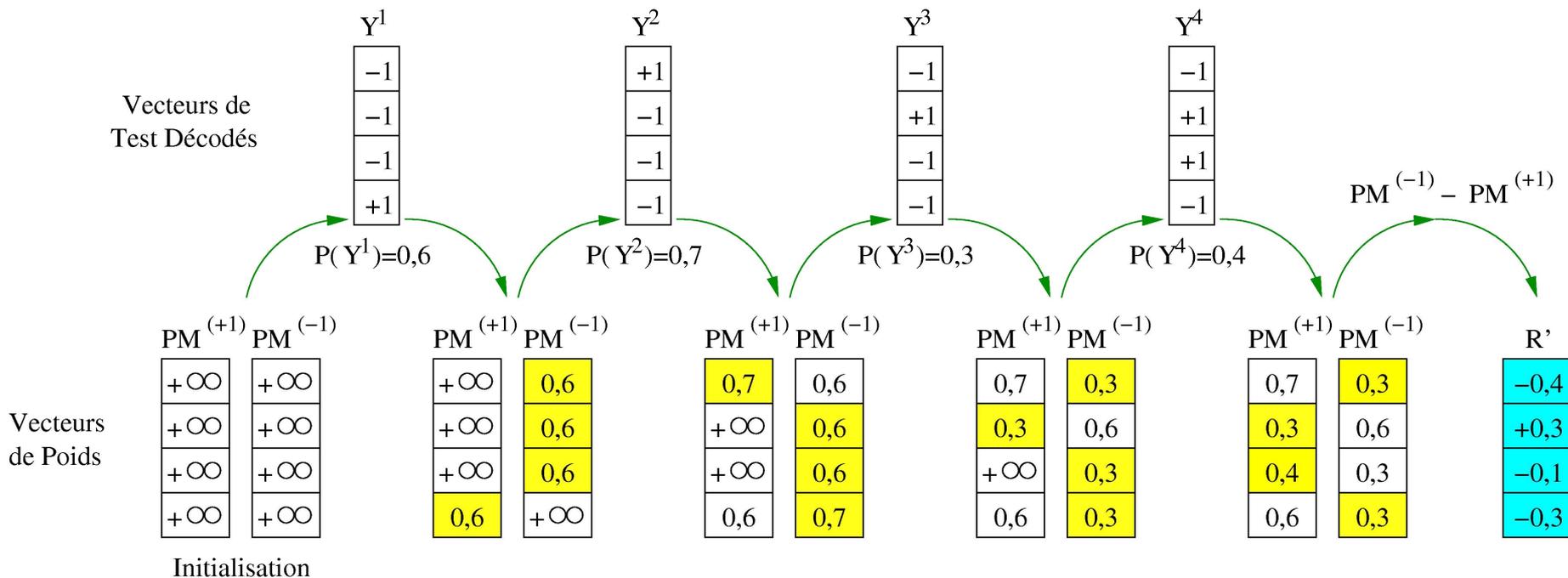
$$PM_j^{(-1)} = P(\mathbf{C}^{-1}(j))$$

$$PM_j^{(+1)} = P(\mathbf{C}^{+1}(j))$$

Donc : $r'_j = PM_j^{(-1)} - PM_j^{(+1)}$

Turbo codes blocs

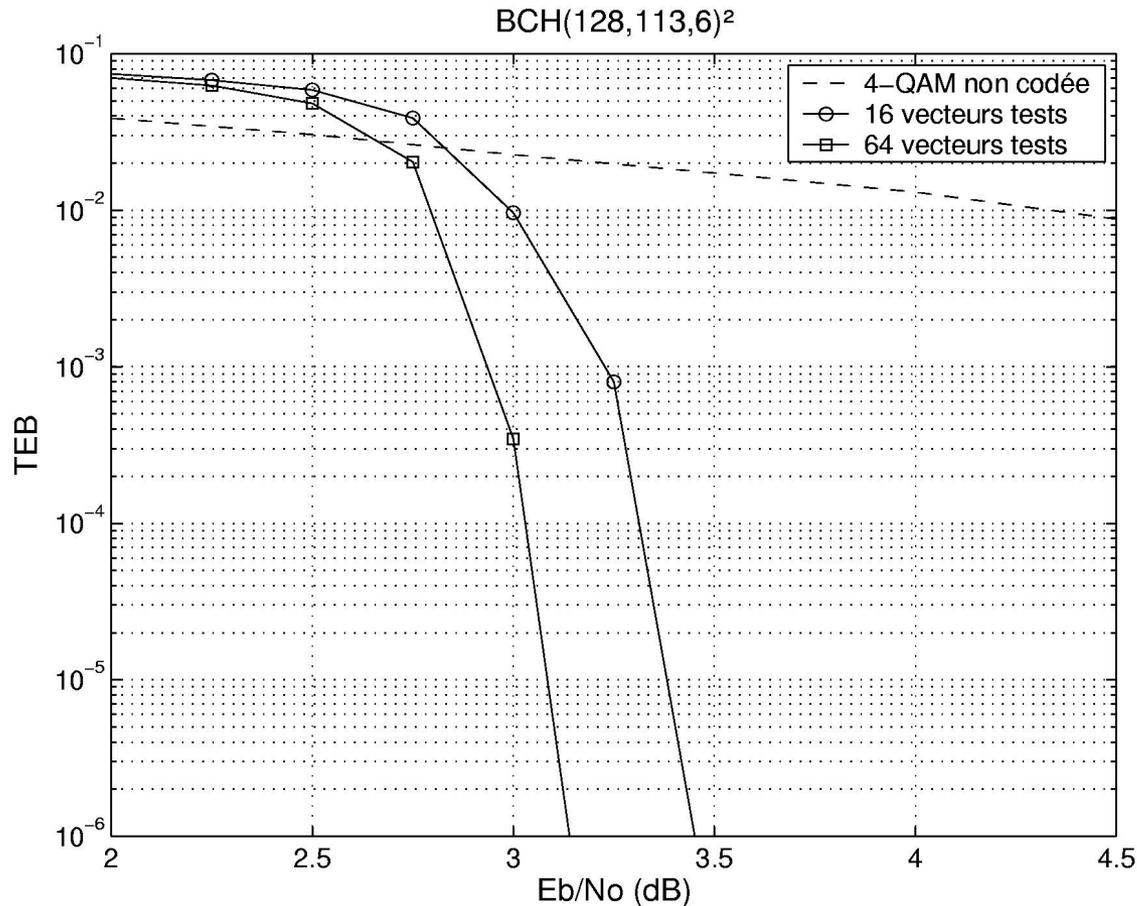
Mise en œuvre simplifiée



Poids concerné par le dernier mot de test décodé

Turbo codes blocs

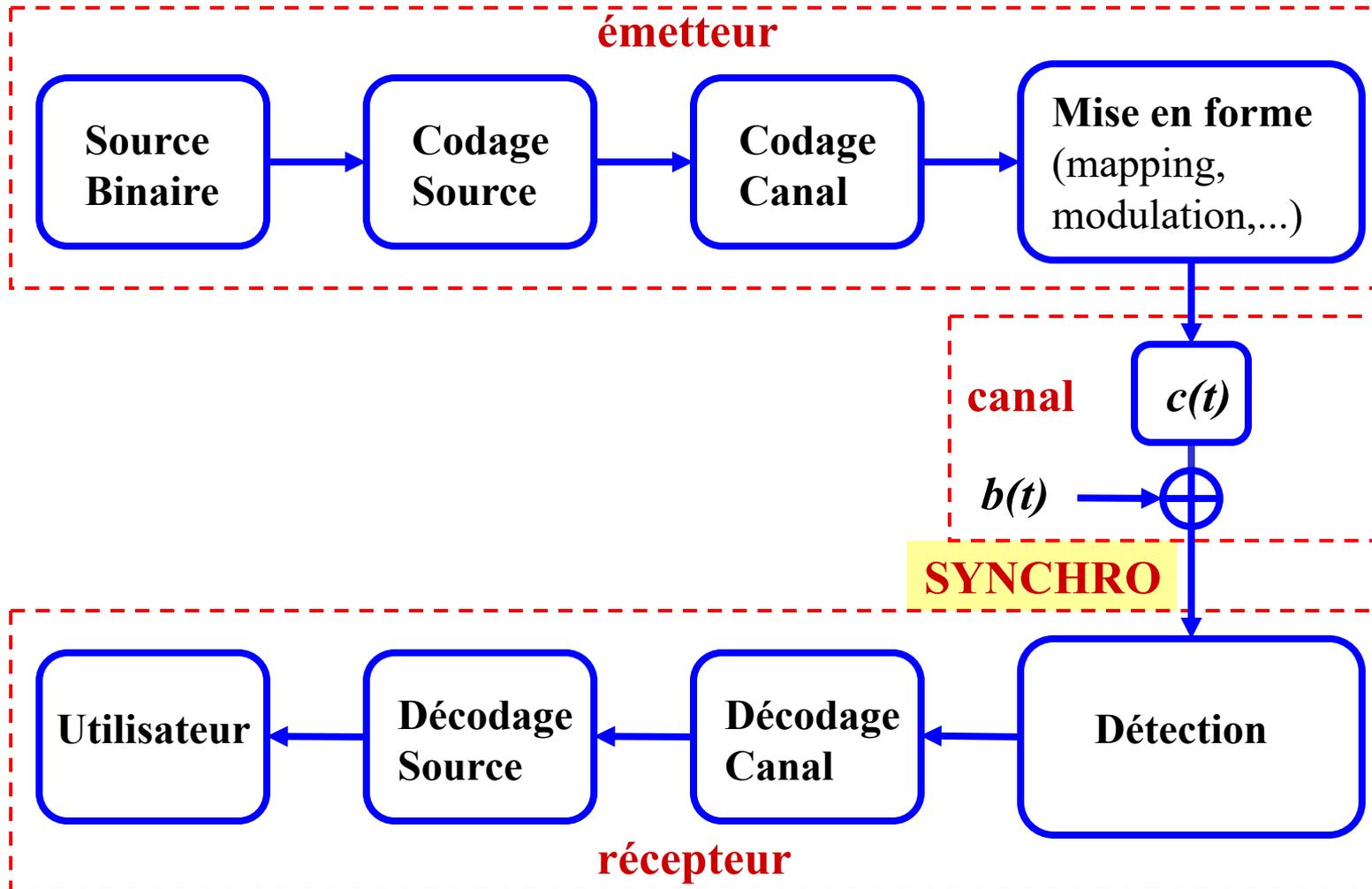
Comparaison des taux d'erreurs binaires pour $p=4$ et $p=6$



Plan de l'exposé

1. Chaîne de transmission numérique
2. Des codes blocs aux turbo codes
 - Codes blocs linéaires
 - Code produit
3. Turbo codes blocs
 - Décodeur de R. Pyndiah
 - Mise en œuvre simplifiée
4. Les turbo codes pour la synchronisation de phase
 - Maximisation des log-vraisemblances
 - Boucle à remodulation souple
5. Système VDSL
 - Principe du VDSL
 - Turbo codes pour le VDSL

Chaîne de transmission



Synchro : Maximisation des LLR

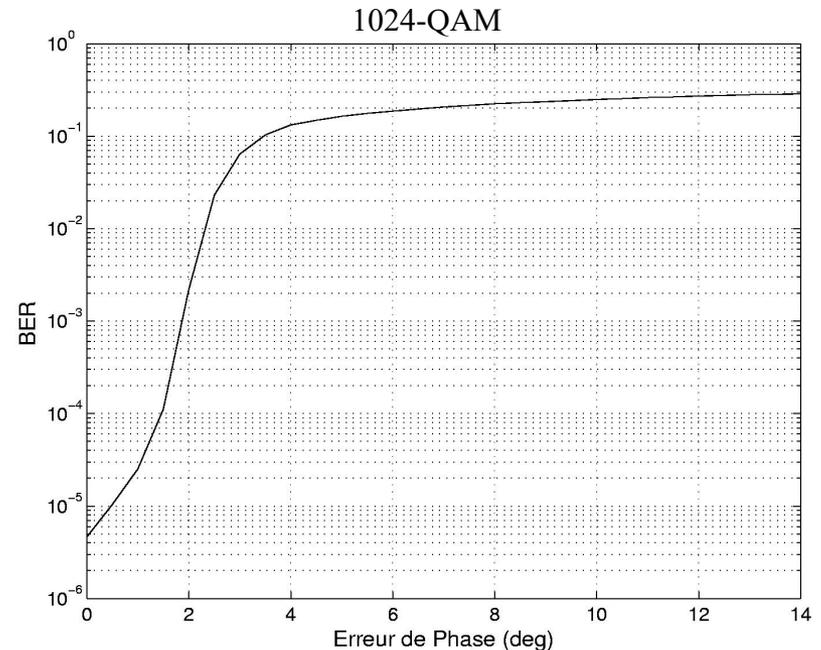
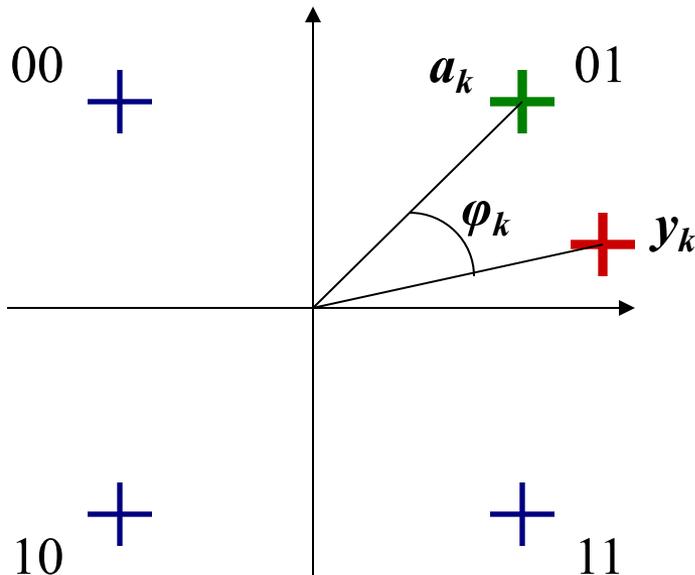
Présentation du problème

(C. Vanstraceele et al., IEEE Signal Processing letters, march 2006)

(Wrangok Oh et al., IEEE Commum letters, sept 2001)

Symboles émis

Symboles reçus



Synchro : Maximisation des LLR

Distribution des log-vraisemblances

Déphasage constant
sur un mot de code



$$z_k = a_k e^{j\varphi} + b_k$$



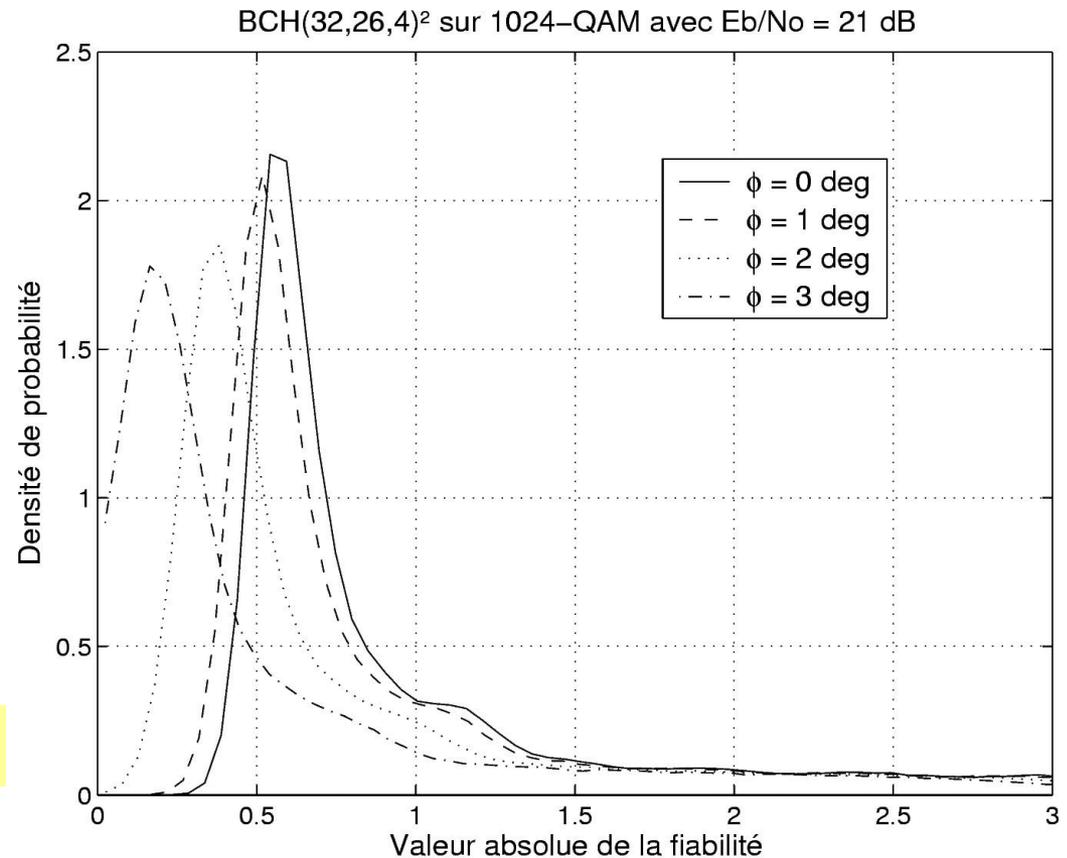
demapping



turbo décodeur



LLR



Synchro : Maximisation des LLR

Moyenne des valeurs absolues des LLR

$R^{(l)}$ = fiabilités du $l^{\text{ième}}$
mot de code.



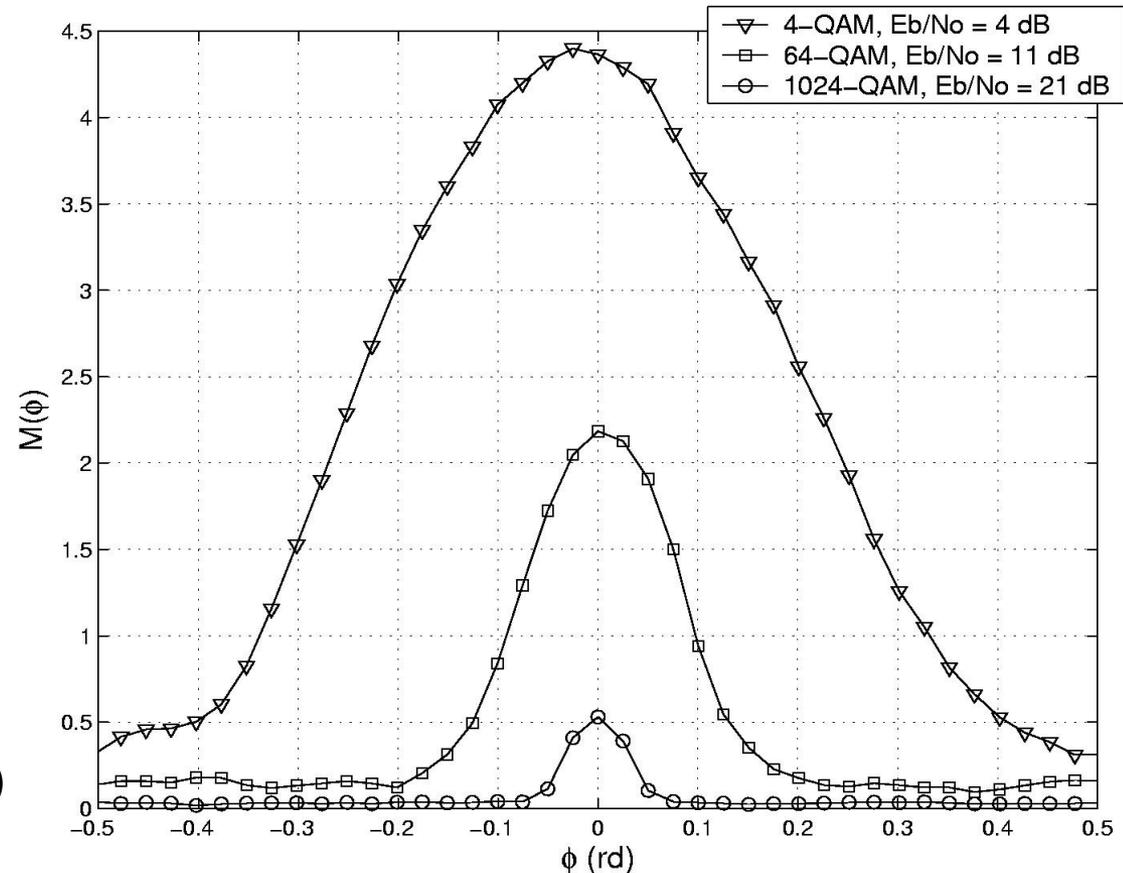
Valeur absolue
Tri (ordre croissant)



$Rtri^{(l)}$

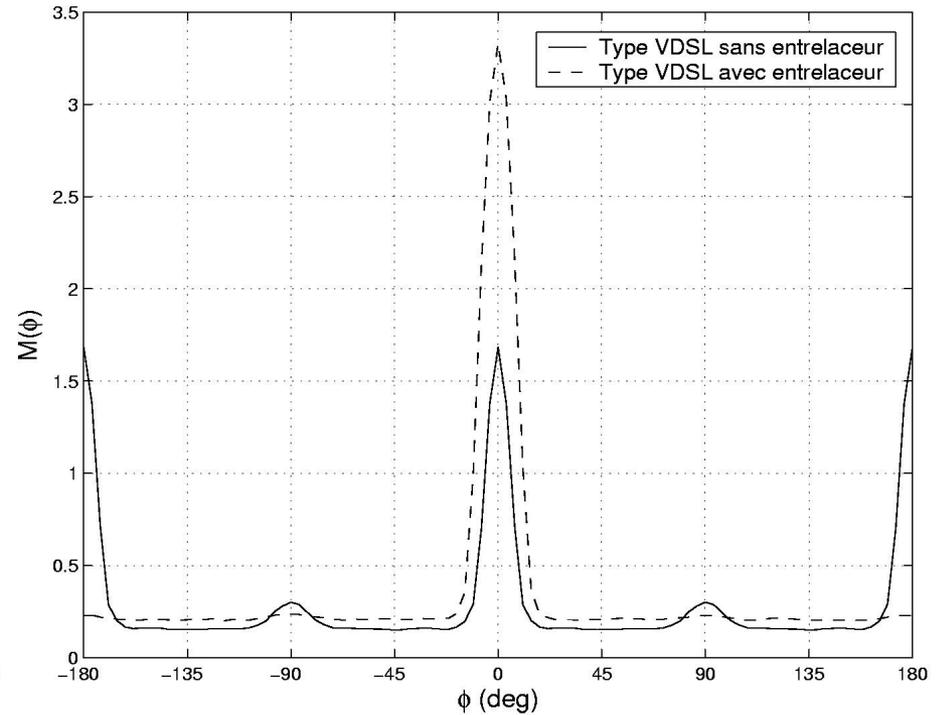
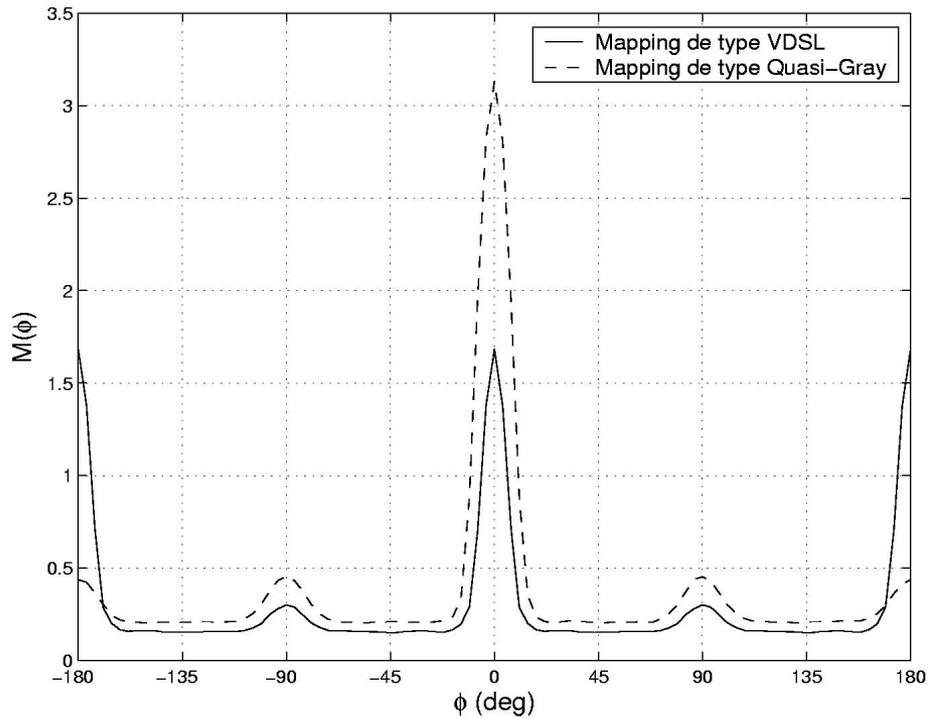


$$M^{(l)} = \frac{1}{m_f} \sum_{i=1}^{m_f} Rtri_i^{(l)}$$



Synchro : Maximisation des LLR

Ambiguïté de phase



Synchro : Maximisation des LLR

Dérive linéaire

Erreur de phase
constante associée à
une dérive linéaire



$$z_k = a_k e^{j\{\varphi + \Delta f(k - \frac{K}{2})\}} + b_k$$



demapping

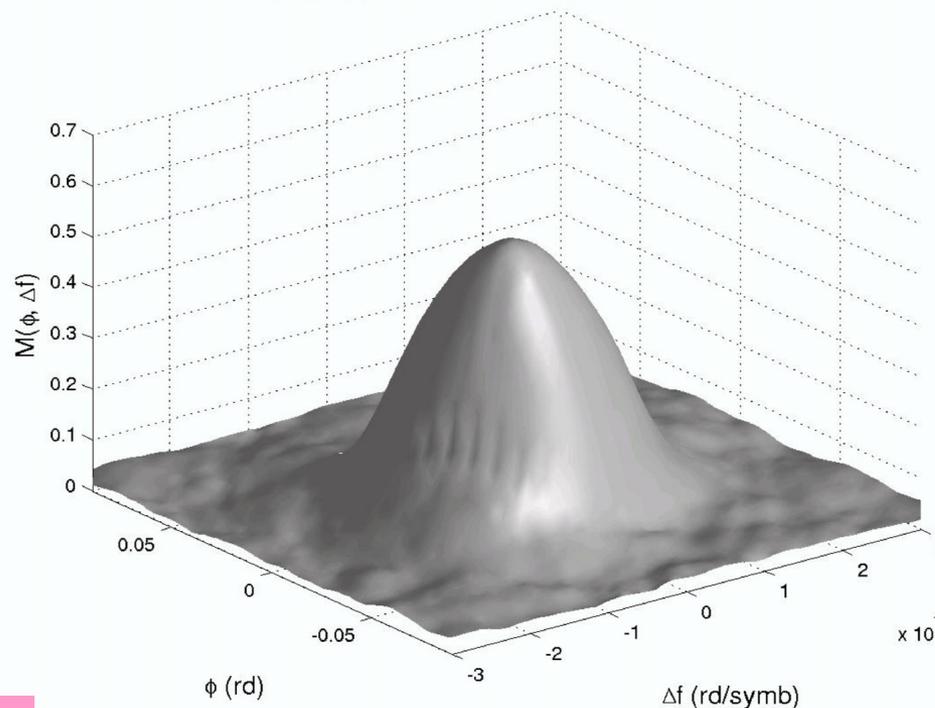


turbo décodeur



$M^{(l)}$

BCH(32,26,4)² sur 1024-QAM avec $E_b/N_0 = 21$ dB



Synchro : Maximisation des LLR

Définition de l'estimateur

Symboles émis

$$a_k$$



Symboles reçus

$$y_k = a_k e^{j\varphi} + b_k$$

$$k = 1 \dots K$$

On construit :

$$y'_k = y_k e^{j\theta}$$



demapping



turbo décodeur



$$M^{(l)} = f(\theta, y_1, \dots, y_K)$$

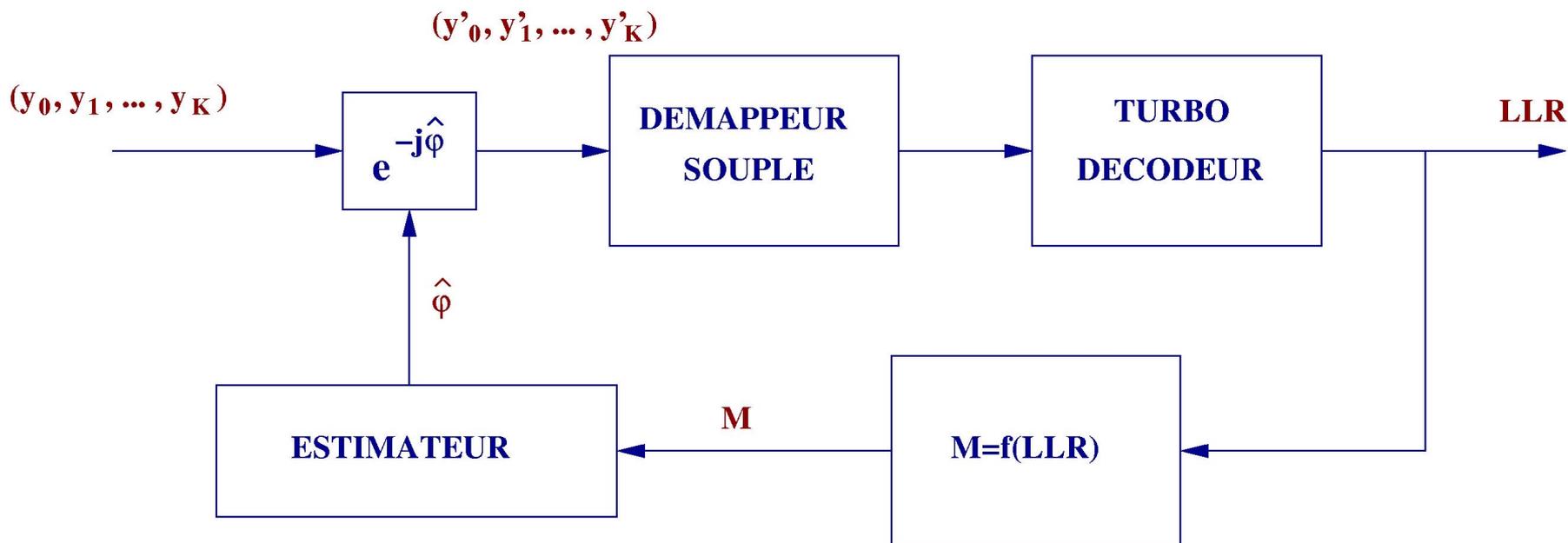
Estimateur :

$$\hat{\varphi} = \arg \max_{\theta} M^{(l)}(\theta, y_1, \dots, y_K)$$

Synchro : Maximisation des LLR

Algorithme du gradient

$$\hat{\varphi}_i = \hat{\varphi}_{i-1} + \mu \left(M^{(l)}(\hat{\varphi}_{i-1}, y_1, \dots, y_K) - M^{(l)}(\hat{\varphi}_{i-2}, y_1, \dots, y_K) \right) [\text{sign}(\hat{\varphi}_{i-2} - \hat{\varphi}_{i-1})]$$



Synchro : Maximisation des LLR

Identification avec une gaussienne

Modélisation : $M_G(\theta) = (M_{max} - M_{min}) e^{-K(\theta - \theta_0)^2} + M_{min}$

N valeurs de phase : $\varphi_1, \dots, \varphi_N$

N mesures : $M^{(l)}(\varphi_1), \dots, M^{(l)}(\varphi_N)$

Erreur quadratique :

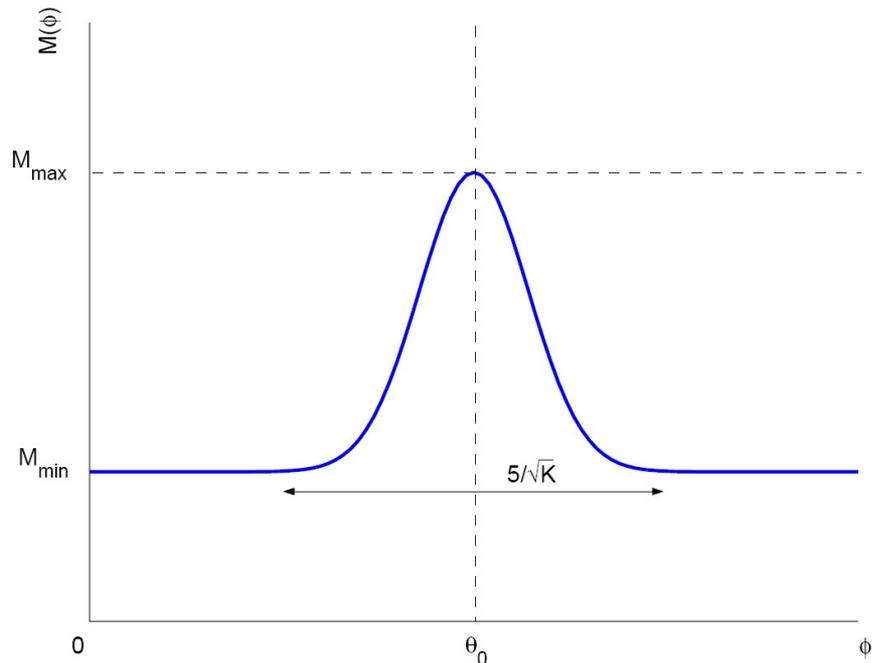
$$\varepsilon = \sum_{j=1}^{j=N} (M_G(\varphi_j), \dots, M^{(l)}(\varphi_j))^2$$

Minimisation de ε

Convergence

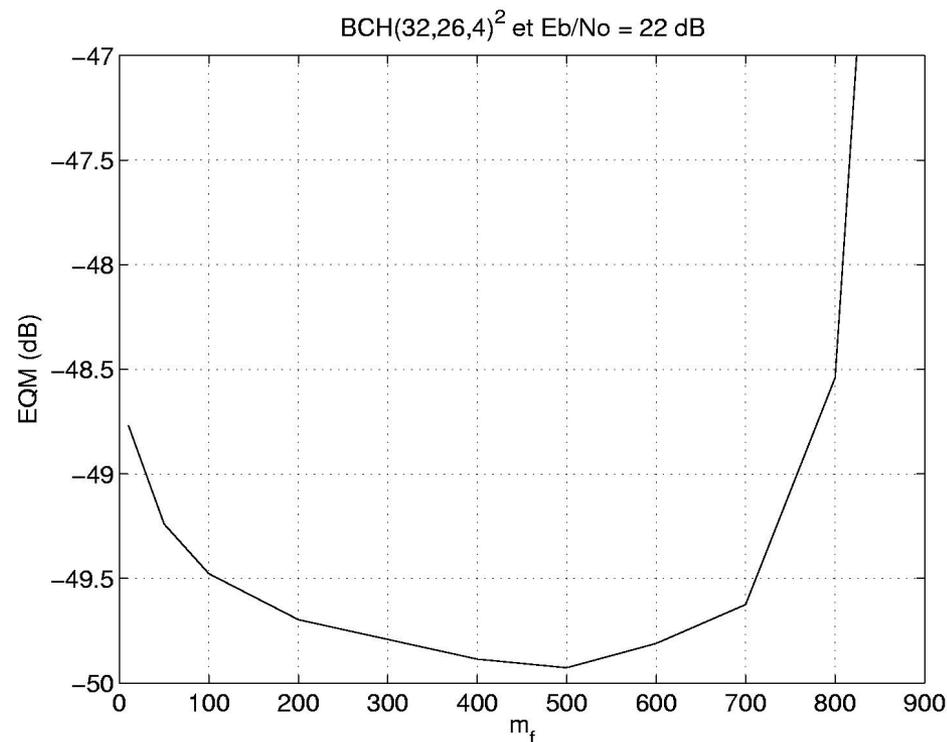
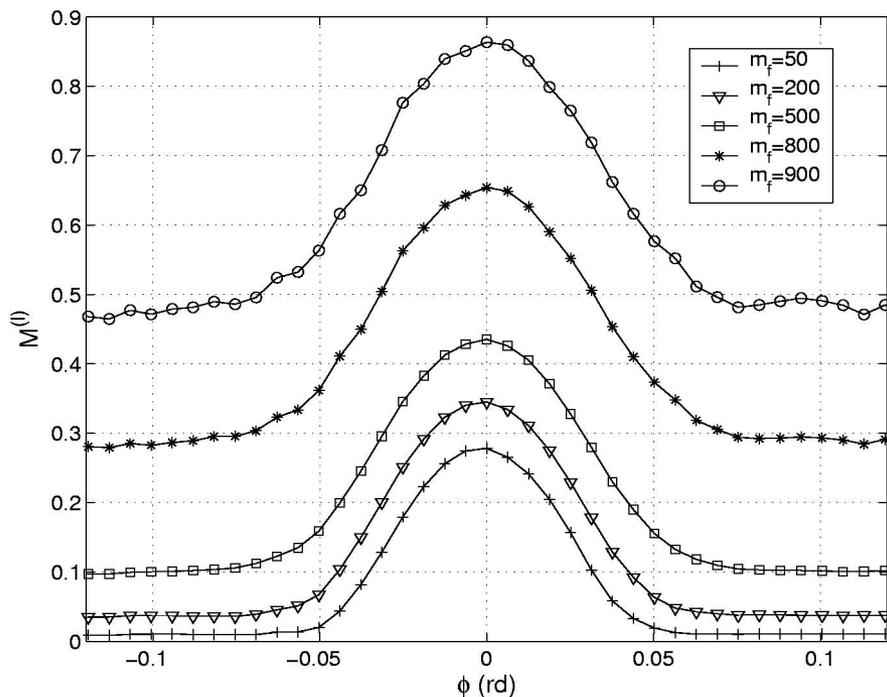


$$\hat{\varphi} = \theta_0$$



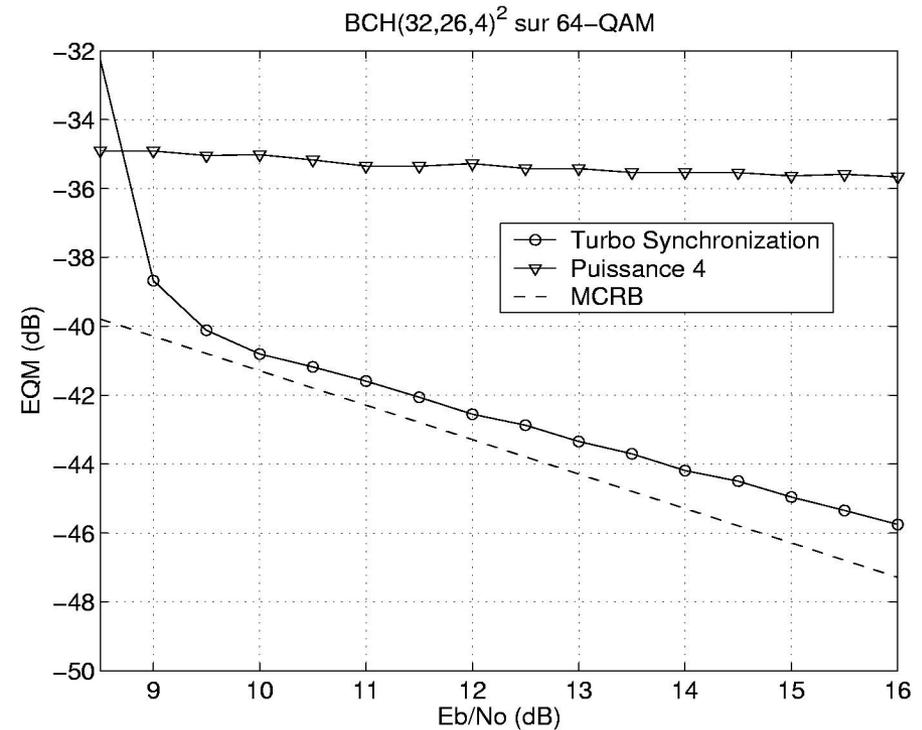
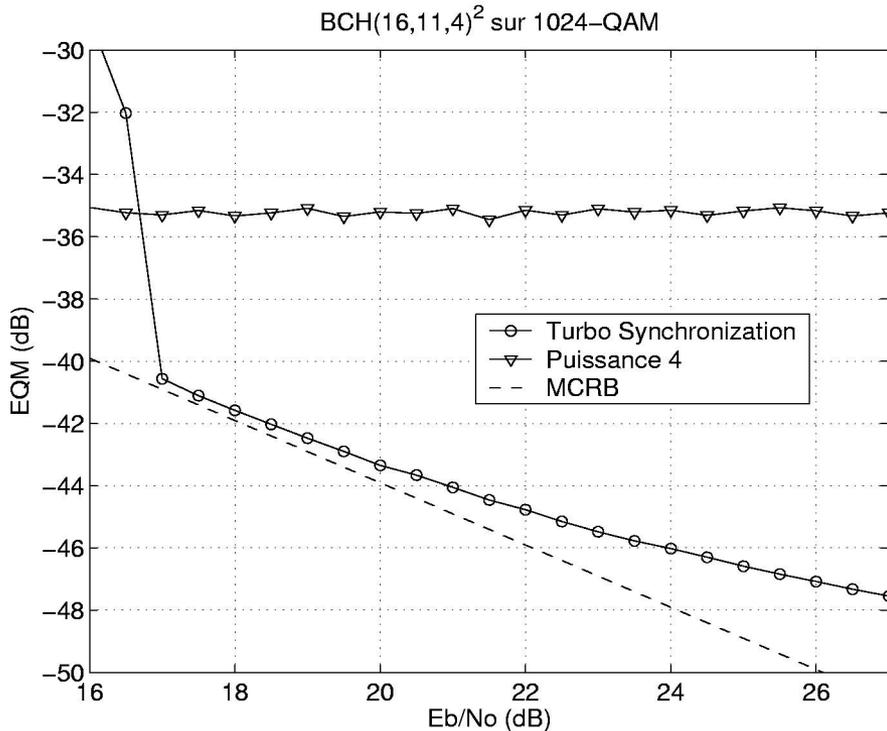
Synchro : Maximisation des LLR

Dépendance au paramètre m_f



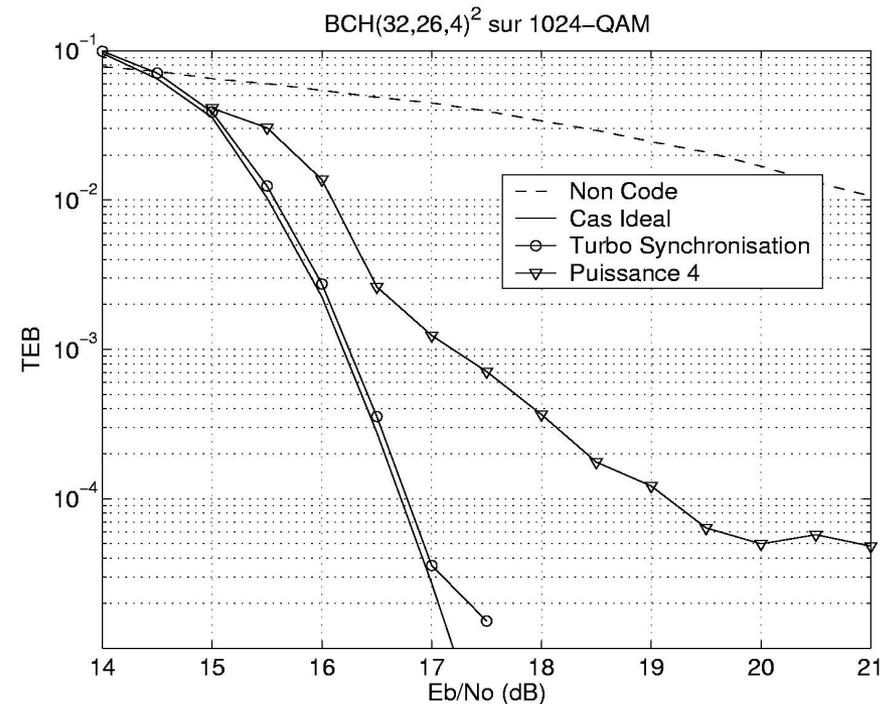
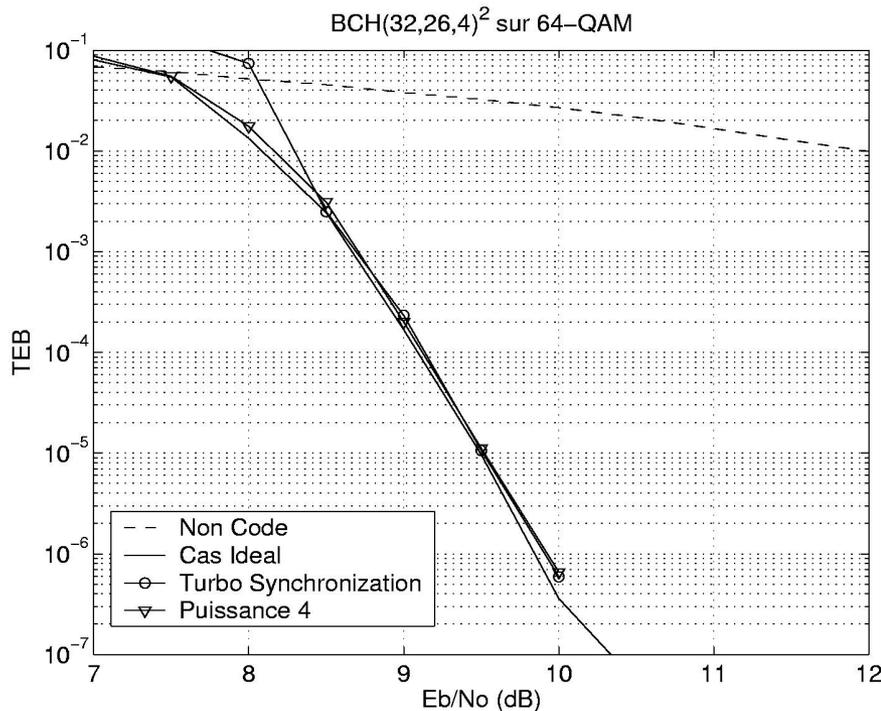
Synchro : Maximisation des LLR

Erreur quadratique moyenne



Synchro : Maximisation des LLR

Erreur quadratique moyenne



- Grandes constellations, faibles RSB,
- Pas de symboles pilotes,

- Pas d'ambiguïté de phase,
- Simple à mettre en œuvre.

Plan de l'exposé

1. Chaîne de transmission numérique
2. Des codes blocs aux turbo codes
 - Codes blocs linéaires
 - Code produit
3. Turbo codes blocs
 - Décodeur de R. Pyndiah
 - Mise en œuvre simplifiée
4. Les turbo codes pour la synchronisation de phase
 - Maximisation des log-vraisemblances
 - Boucle à remodulation souple
5. Système VDSL
 - Principe du VDSL
 - Turbo codes pour le VDSL

Boucle à remodulation souple

Estimation de phase

Symboles émis : $a_k \in \{Q_1, Q_2, \dots, Q_M\}$ $M = 2^N$

Symboles reçus : $y_k = a_k e^{i\theta_k} + b_k$ $k = 1 \dots K$

$$Y = (y_1, \dots, y_K)^T$$

Vraisemblance des observations (bruit gaussien):

$$P(Y | \theta, a_1, \dots, a_K) = \prod_{k=1}^K \frac{1}{\pi \sigma_b^2} \exp\left(-\frac{|y_k - a_k e^{i\theta}|^2}{\sigma_b^2}\right)$$

Boucle à remodulation souple

Estimation de phase

Intégration sur les symboles inconnus : (supposés indépendants)

$$P(Y | \theta) = \sum_{\substack{a_k \in \{Q_1, \dots, Q_M\} \\ k = 1 \dots K}} P(Y | \theta, a_1, \dots, a_K) \times P(a_1, \dots, a_K)$$

(càd marginalisation suivant tous les a_k)

d'où

$$P(Y | \theta) = \left(\frac{1}{\pi \sigma_b^2} \right)^K \prod_{k=1}^K \left[\sum_{m=1}^M P(a_k = Q_m) \exp \left(-\frac{|y_k - Q_m e^{i\theta}|^2}{\sigma_b^2} \right) \right]$$

Boucle à remodulation souple

En considérant les bits indépendants:

$$P(a_k = Q_m) = \prod_{n=1}^N P(b_n^k = q_n^m)$$

Comme : $L^k = (L_1^k, \dots, L_N^k)$ L_n^k log-vraisemblance sur le n^{iem} du k^{iem} symbole QAM

alors

$$P(b_n^k = +1) = \frac{e^{\frac{L_n^k}{2}}}{e^{-\frac{L_n^k}{2}} + e^{\frac{L_n^k}{2}}} \text{ et } P(b_n^k = -1) = \frac{e^{-\frac{L_n^k}{2}}}{e^{-\frac{L_n^k}{2}} + e^{\frac{L_n^k}{2}}}$$

et donc

$$P(b_n^k = q_n^m) = \frac{e^{\frac{q_n^m L_n^k}{2}}}{2 \cosh\left(\frac{L_n^k}{2}\right)}$$

Boucle à remodulation souple

ainsi
$$P(a_k = Q_m) = \left[\prod_{n=1}^N \frac{1}{2 \cosh\left(\frac{L_n^k}{2}\right)} \right] \times \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N q_n^m L_n^k\right)$$

d'où
$$P(Y | \theta) = \left(\frac{1}{\pi\sigma_b^2}\right)^K \prod_{k=1}^K \left[\left(\prod_{n=1}^N \frac{1}{2 \cosh\left(\frac{L_n^k}{2}\right)}\right) \sum_{m=1}^M W_m(y_k, L^k, \theta) \right]$$

Dérivée du log :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \log P(Y | \theta) = \frac{2}{\sigma_b^2} \sum_{k=1}^K \frac{\sum_{m=1}^M \operatorname{Im}(y_k \overline{Q_m} e^{-i\theta}) W_m(y_k, L^k, \theta)}{\sum_{m=1}^M W_m(y_k, L^k, \theta)}$$

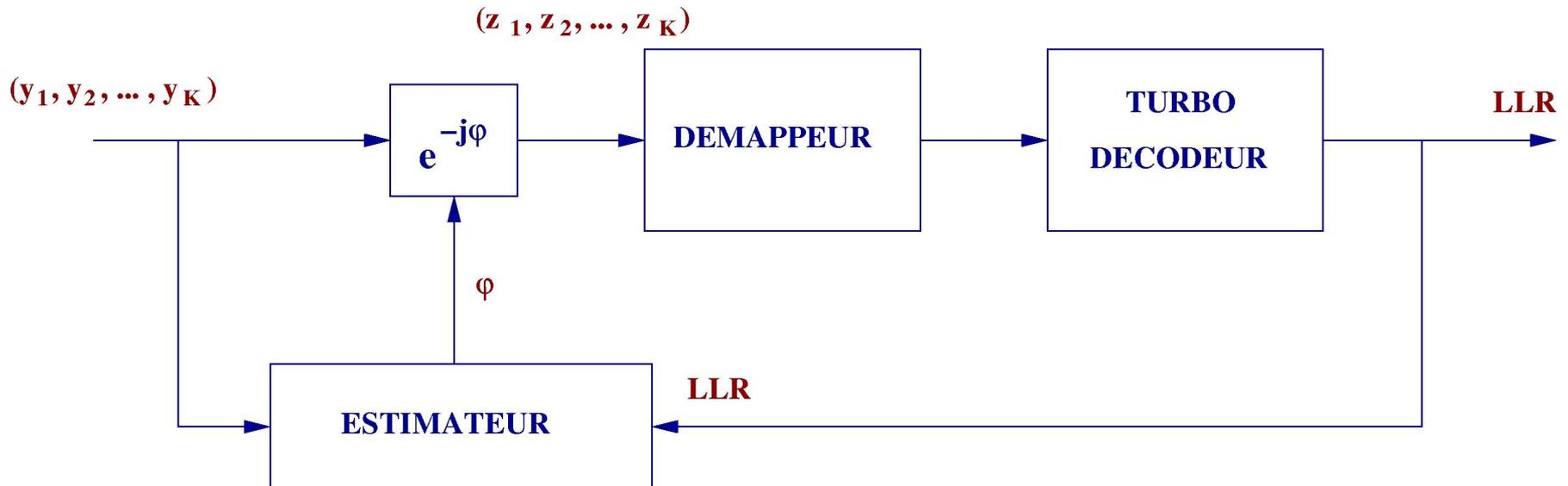
Poids du symbole Q_m :
$$W_m(y_k, L^k, \theta) = \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N q_n^m L_n^k - \frac{|y_k - e^{i\theta} Q_m|^2}{\sigma_b^2}\right)$$

Boucle à remodulation souple

Estimation de phase

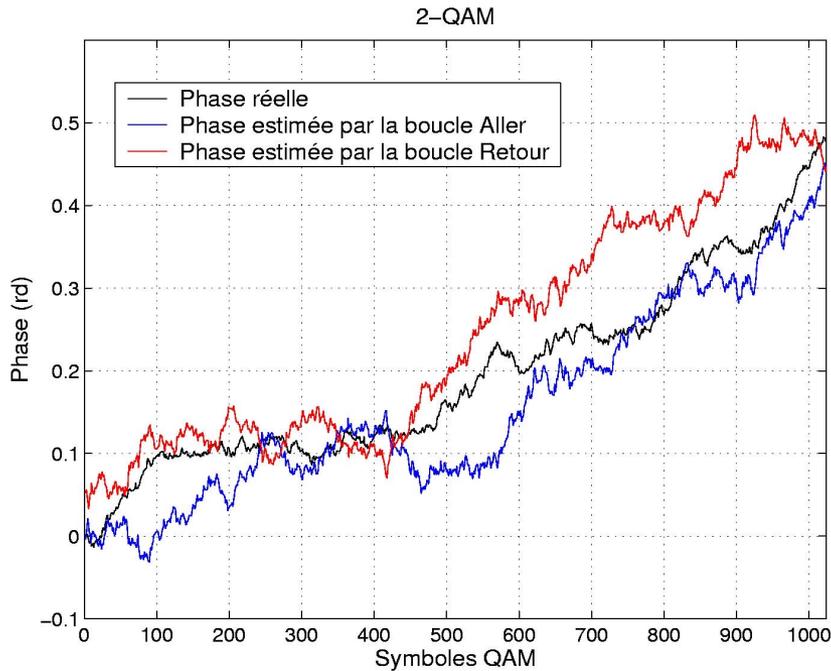
Boucle itérative à remodulation souple :

$$\varphi_k = \varphi_{k-1} + \gamma \frac{\sum_{m=1}^M \text{Im} (y_k \overline{Q_m} e^{-i\varphi_{k-1}}) W_m (y_k, L^k, \varphi_{k-1})}{\sum_{m=1}^M W_m (y_k, L^k, \varphi_{k-1})}$$

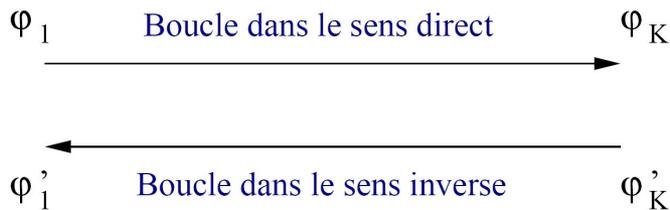
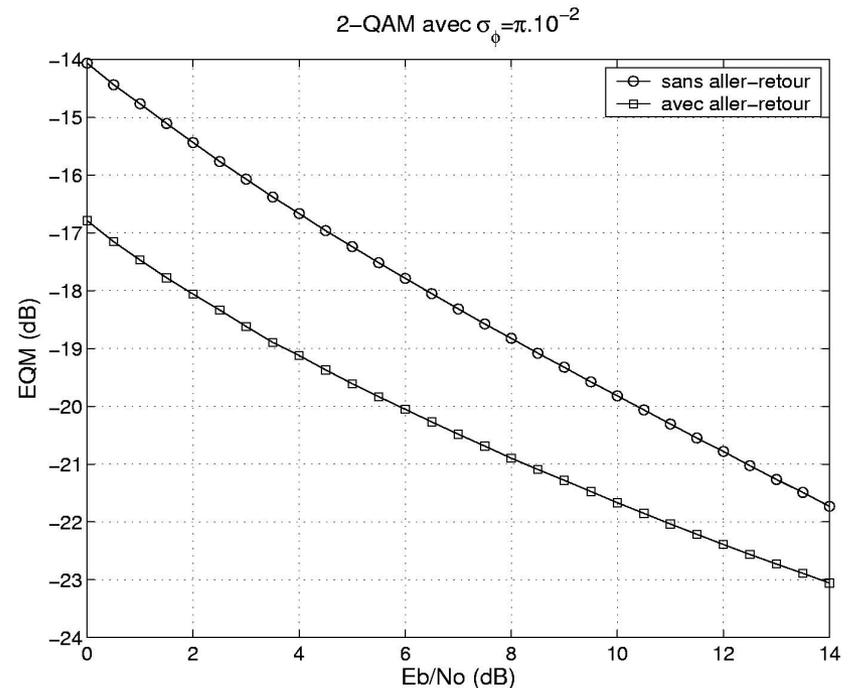


Boucle à remodulation souple

Boucle aller-retour



$$\varphi_k'' = \frac{\varphi_k + \varphi_k'}{2}$$



Boucle à remodulation souple

Interprétation : Cas d'une BPSK

$$\varphi_k = \varphi_{k-1} + \gamma \operatorname{Im} (y_k e^{-i\varphi_{k-1}}) \tanh \left(\frac{1}{2} L^k + \frac{2 \operatorname{Re} (y_k e^{-i\varphi_{k-1}})}{\sigma_b^2} \right)$$

Fort RSB : les valeurs absolue des LLR sont élevées ($\tanh(.) \approx \operatorname{sign}(.)$)

$$\varphi_k = \varphi_{k-1} + \gamma \operatorname{Im} (y_k \overline{\hat{a}_k} e^{-i\varphi_{k-1}})$$

c'est-à-dire une boucle à remodulation dure « classique »

Boucle à remodulation souple

Estimation conjointe phase et gain

Symboles émis : $a_k \in \{Q_1, Q_2, \dots, Q_M\}$ ($M = 2^N$)

$$k = 1 \dots K$$

Symboles reçus : $y_k = a_k G e^{i\theta_k} + b_k$

Vraisemblance des observations :

$$P(Y | \theta, G, a_1, \dots, a_K) = \prod_{k=1}^K \frac{1}{\pi \sigma_b^2} \exp \left(-\frac{|y_k - G e^{-i\theta} a_k|^2}{\sigma_b^2} \right)$$

Boucle à remodulation souple

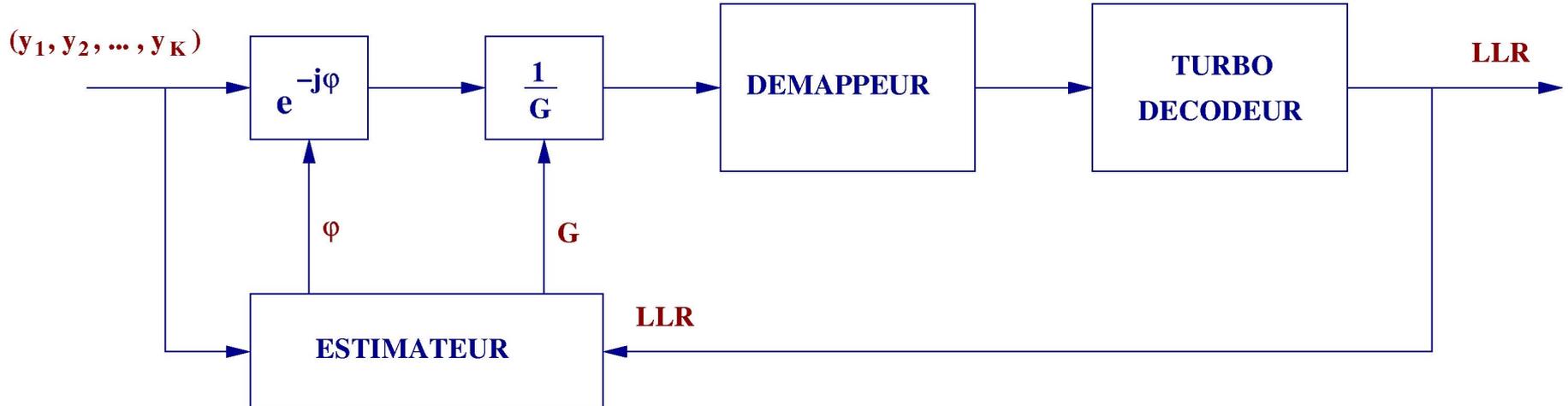
Estimation conjointe phase et gain

Boucle gain-phase à remodulation souple :

$$\varphi_k = \varphi_{k-1} + \gamma \frac{\sum_{m=1}^M \text{Im} (y_k \overline{Q_m} G_{k-1} e^{-i\varphi_{k-1}}) W_m (y_k, L^k, \varphi_{k-1}, G_{k-1})}{\sum_{m=1}^M W_m (y_k, L^k, \varphi_{k-1}, G_{k-1})}$$

$$G_k = G_{k-1} + \gamma \frac{\sum_{m=1}^M (\text{Re} (y_k \overline{Q_m} e^{-i\varphi_{k-1}}) - G_{k-1} |Q_m|^2) W_m (y_k, L^k, \varphi_{k-1}, G_{k-1})}{\sum_{m=1}^M W_m (y_k, L^k, \varphi_{k-1}, G_{k-1})}$$

(z_1, z_2, \dots, z_K)

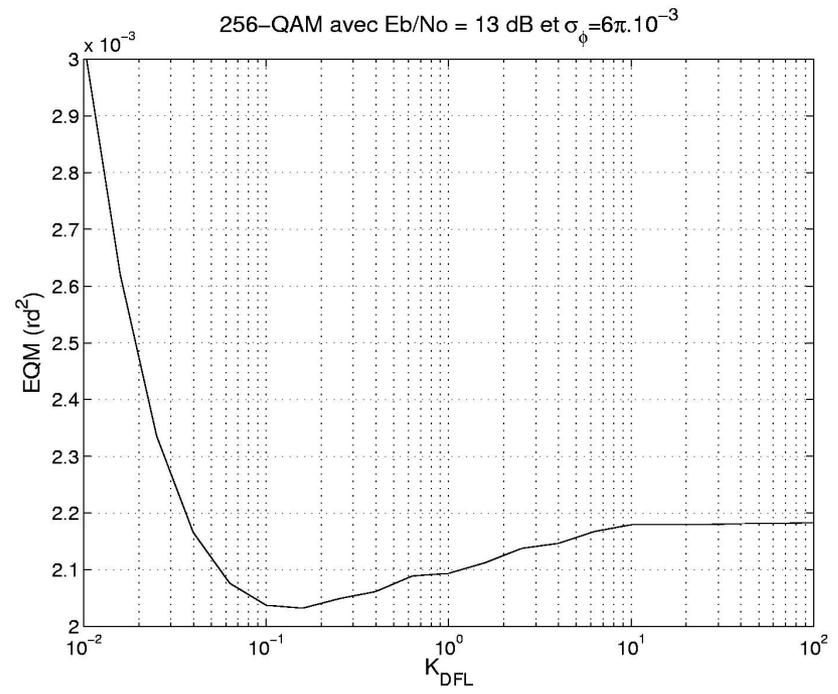
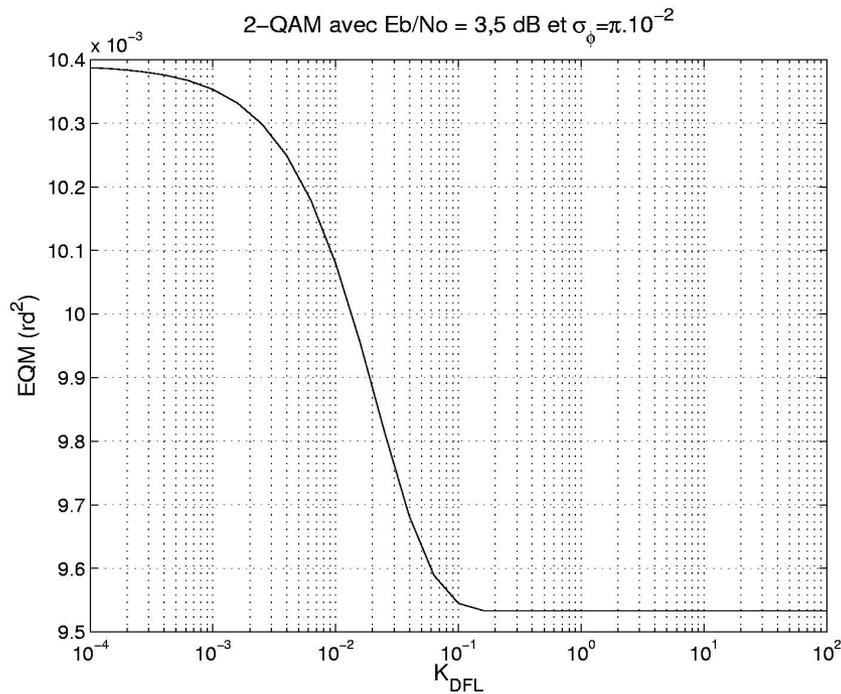


Boucle à remodulation souple

Poids du retour de décision souple

$$W_m(y_k, L^k, \theta) = \exp \left(K_{DFL} \sum_{n=1}^N q_n^m L_n^k - \frac{|y_k - e^{i\theta} Q_m|^2}{\sigma_b^2} \right)$$

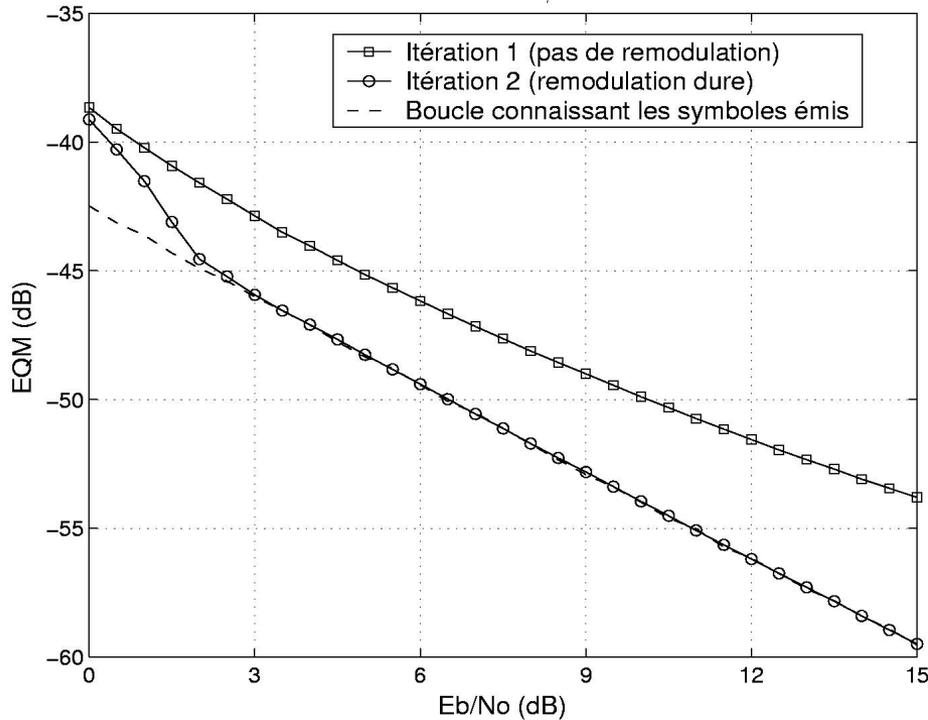
Coefficient de pondération



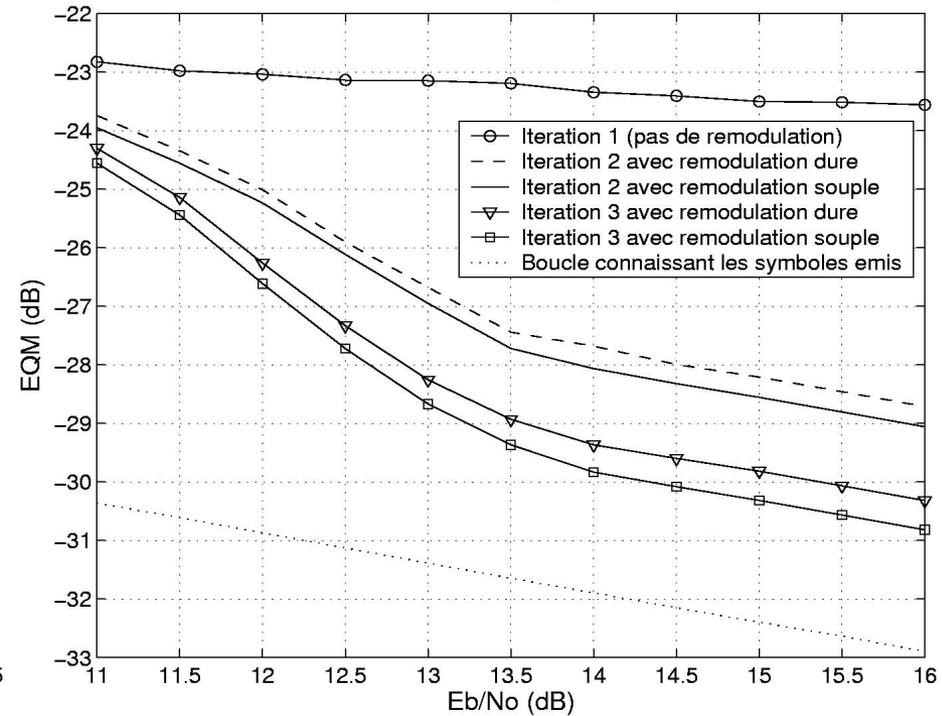
Boucle à remodulation souple

Erreur quadratique moyenne

2-QAM avec $\sigma_\phi = \pi 10^{-2}$



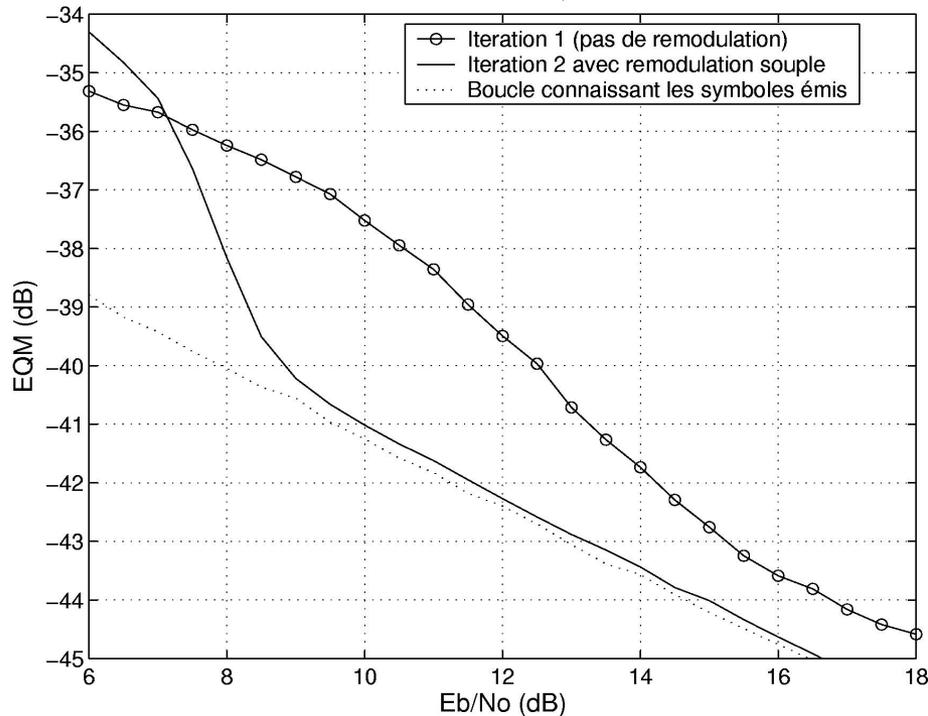
256-QAM avec $\sigma_\phi = 6\pi \cdot 10^{-3}$



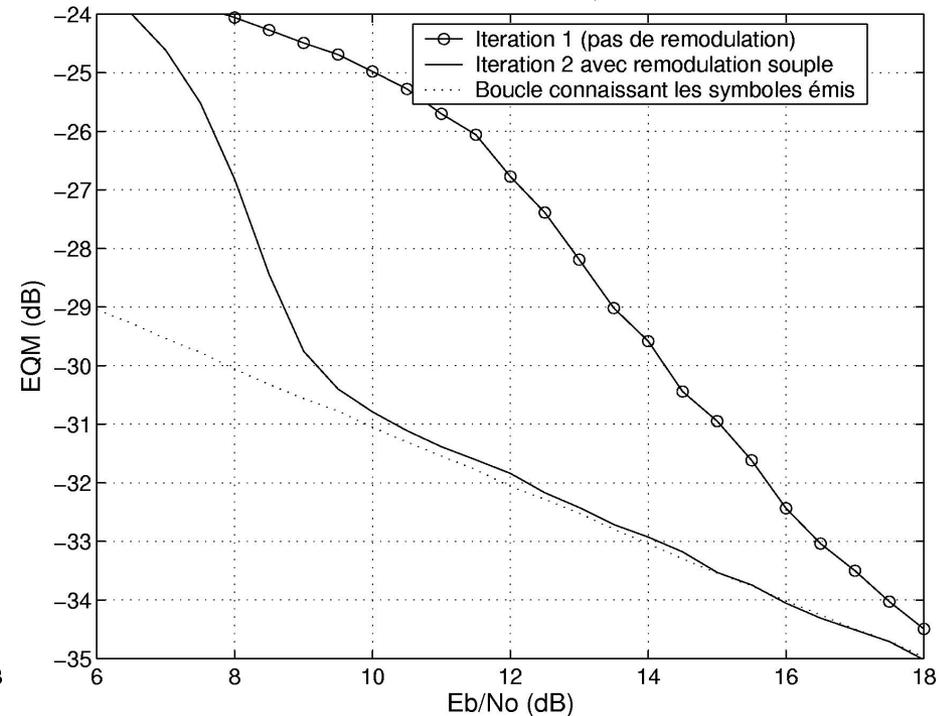
Boucle à remodulation souple

Erreur quadratique moyenne gain et phase

Estimation du gain sur 64-QAM ($\sigma_\phi=4\pi \cdot 10^{-3}$ et $\sigma_G=2\pi \cdot 10^{-3}$)



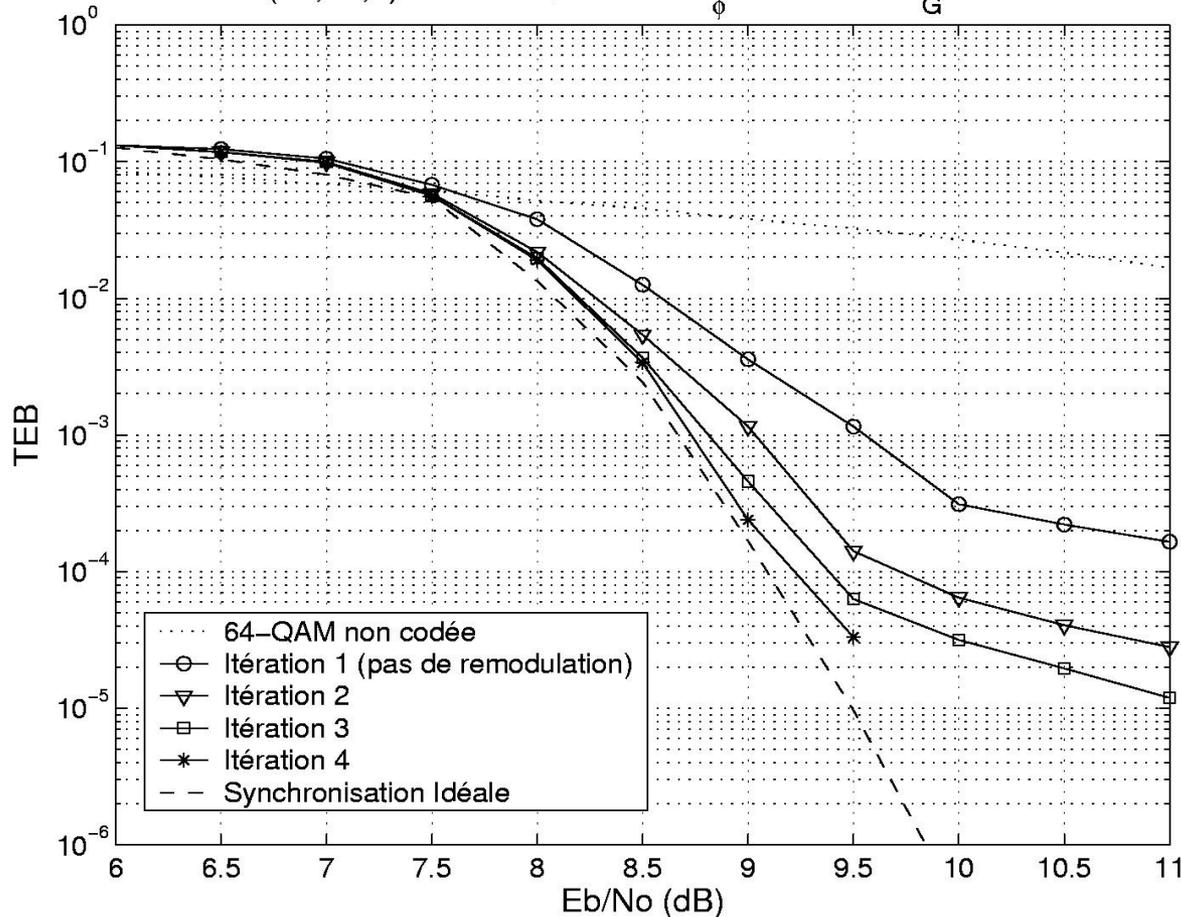
Estimation de la phase sur 64-QAM ($\sigma_\phi=4\pi \cdot 10^{-3}$ et $\sigma_G=2\pi \cdot 10^{-3}$)



Boucle à remodulation souple

TEB (gain-phase)

BCH(32,26,4)² sur 64-QAM avec $\sigma_\phi = 4\pi \cdot 10^{-3}$ et $\sigma_G = 2\pi \cdot 10^{-3}$



- Grandes constellations,
- Faibles RSB,
- Evolutions de phase rapides,
- Pas de symboles pilotes,
- Estimation du gain.

Brevet n°04P0441

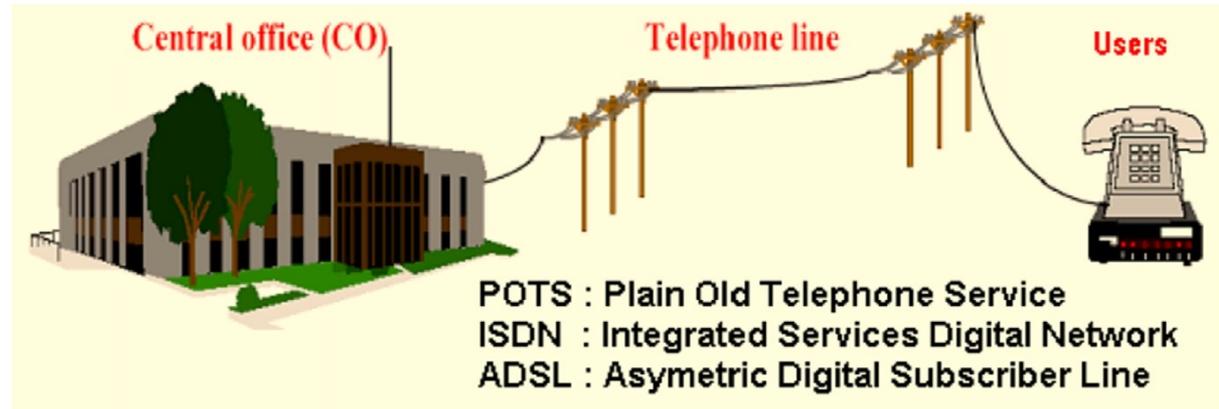
Plan de l'exposé

1. Chaîne de transmission numérique
2. Des codes blocs aux turbo codes
 - Codes blocs linéaires
 - Code produit
3. Turbo codes blocs
 - Décodeur de R. Pyndiah
 - Mise en œuvre simplifiée
4. Les turbo codes pour la synchronisation de phase
 - Maximisation des log-vraisemblances
 - Boucle à remodulation souple
5. **Système VDSL**
 - **Principe du VDSL**
 - **Turbo codes pour le VDSL**

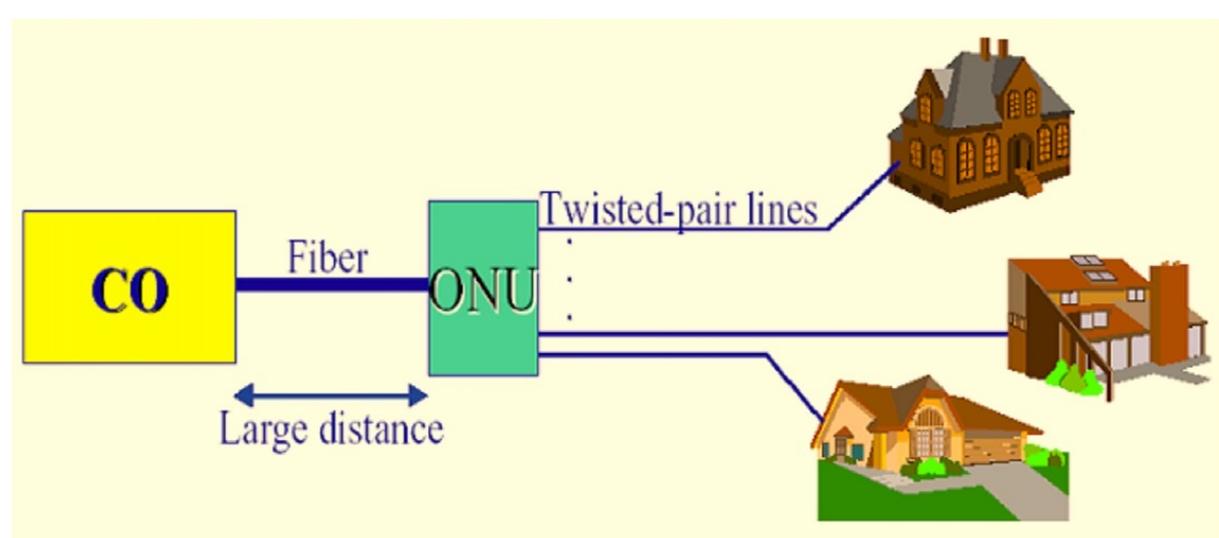
Le système VDSL

Description du système

Système ADSL



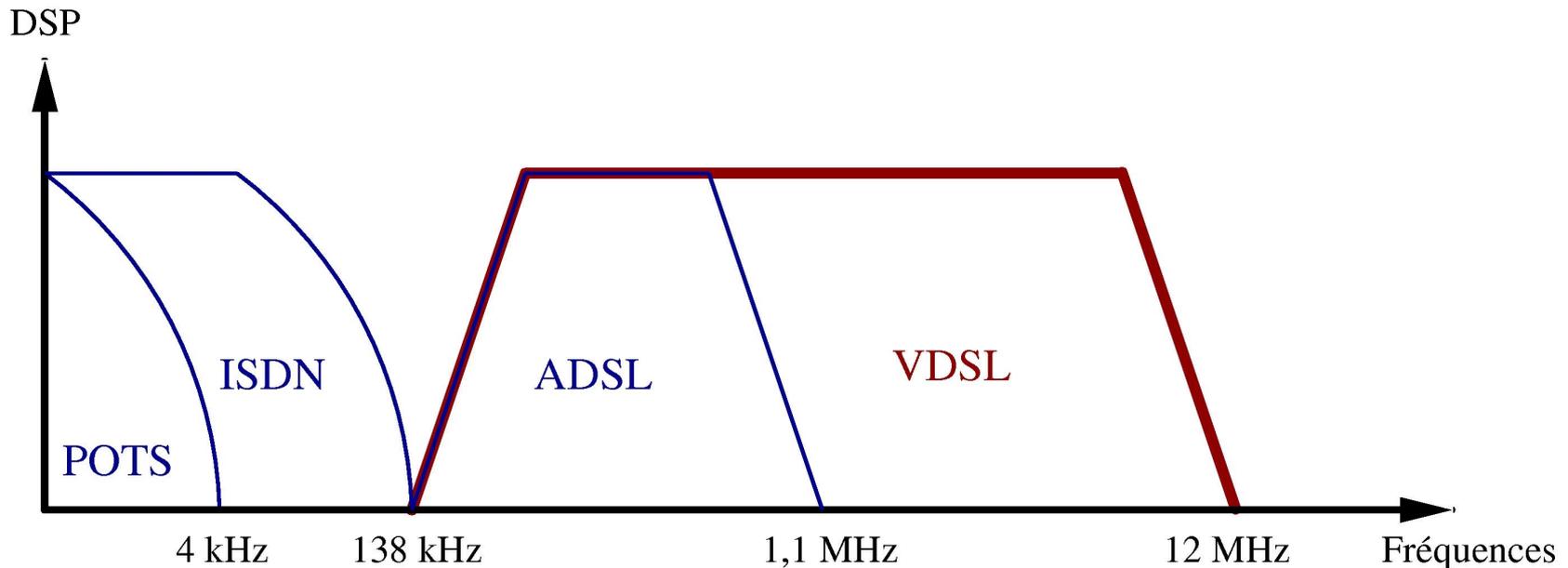
Système VDSL



Le système VDSL

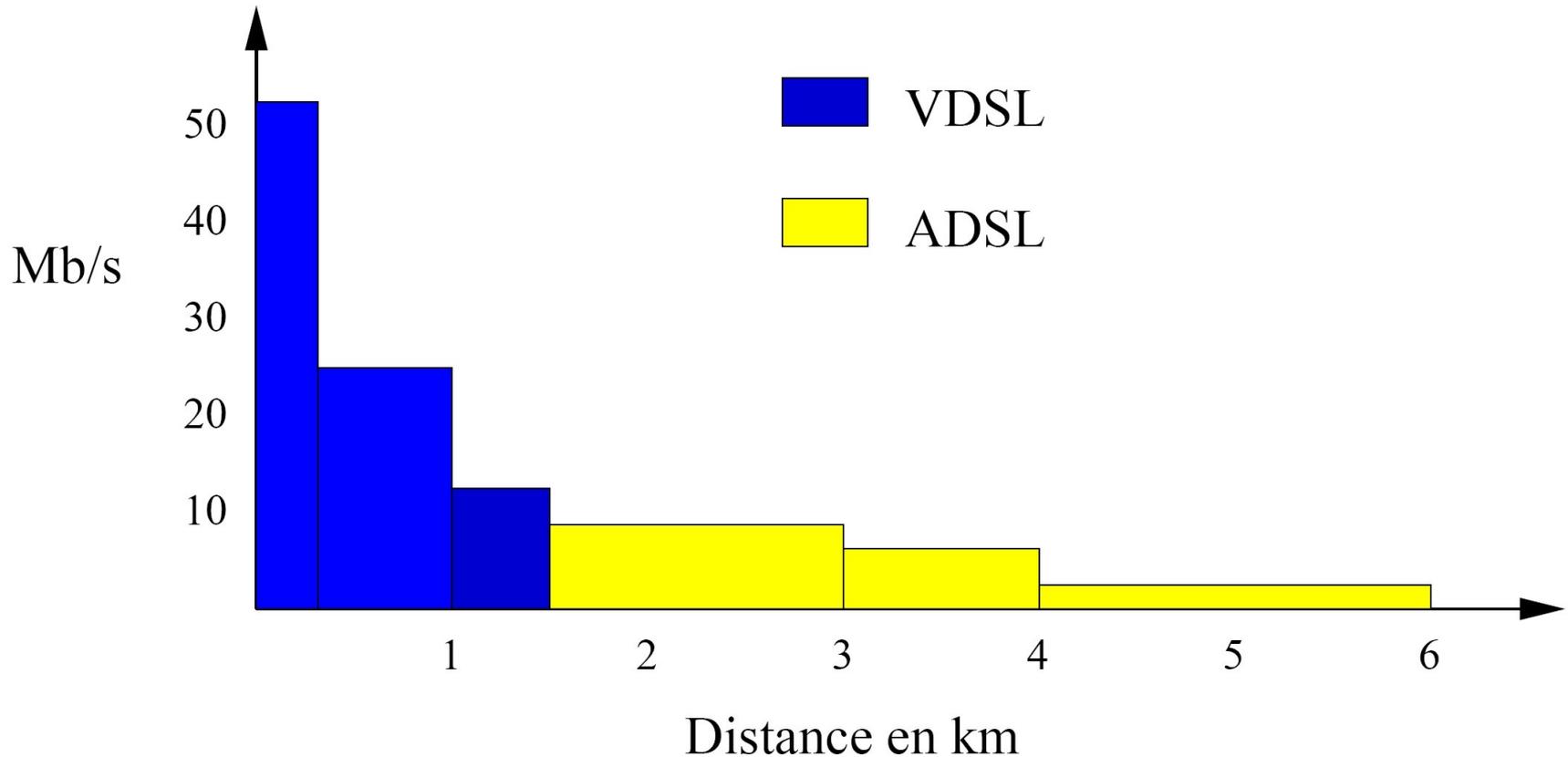
Description du système

- 2750 porteuses (MAQ) espacées de $\Delta f = 4.3125$ kHz,
- Symboles DMT de durée $T = 250$ μ s,
- Constellations de 2-QAM (1 bit) jusqu'à 32768-QAM (15 bits).



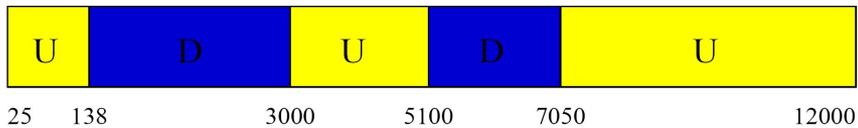
Le système VDSL

Description du système

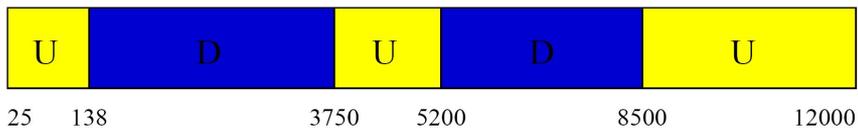


Le système VDSL

Débits cibles



Plan code 997 – Débits symétriques



Plan code 998 – Débits asymétriques

PROFILS	Download (Kbit/s)	Upload (Kbit/s)
S1	6400	6400
S2	8576	8576
S3	14464	14464
S4	23168	23168
S5	28288	28288
A1	6400	2048
A2	8576	2048
A3	14464	3072
A4	23168	4096

Le système VDSL

Bruits du canal VDSL

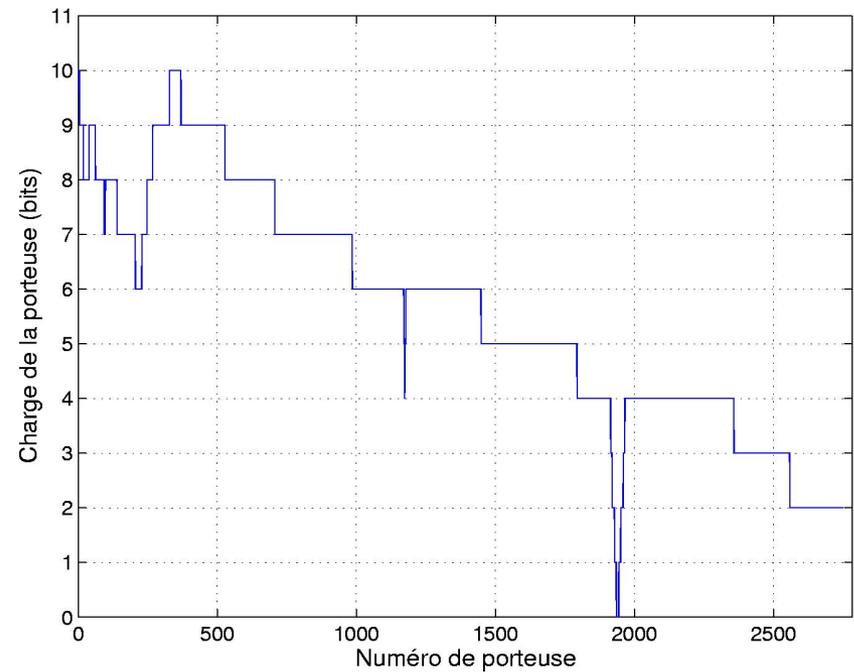
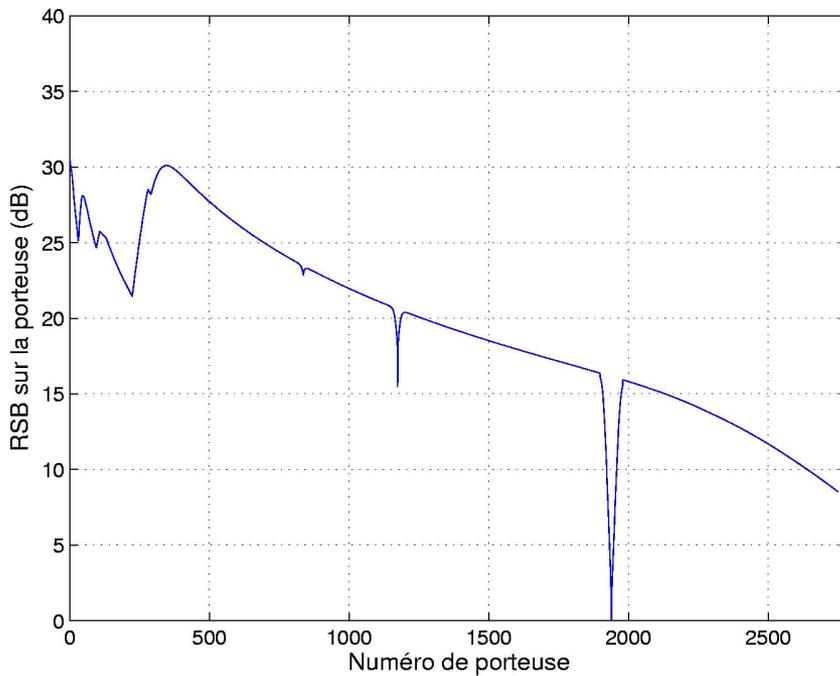
- **NEXT** : paradiaphonie, l'émetteur perturbe les récepteurs qui lui sont proches.
- **FEXT** : télédiaphonie, l'émetteur perturbe les récepteurs qui sont à l'autre extrémité de la ligne.
- **AWGN** : bruit additif blanc gaussien.
- **Alien noise** : éléments perturbateurs étrangers au système VDSL, notamment les technologies ADSL, ISDN ou POTS, les CBistes.

Le système VDSL

Description du système

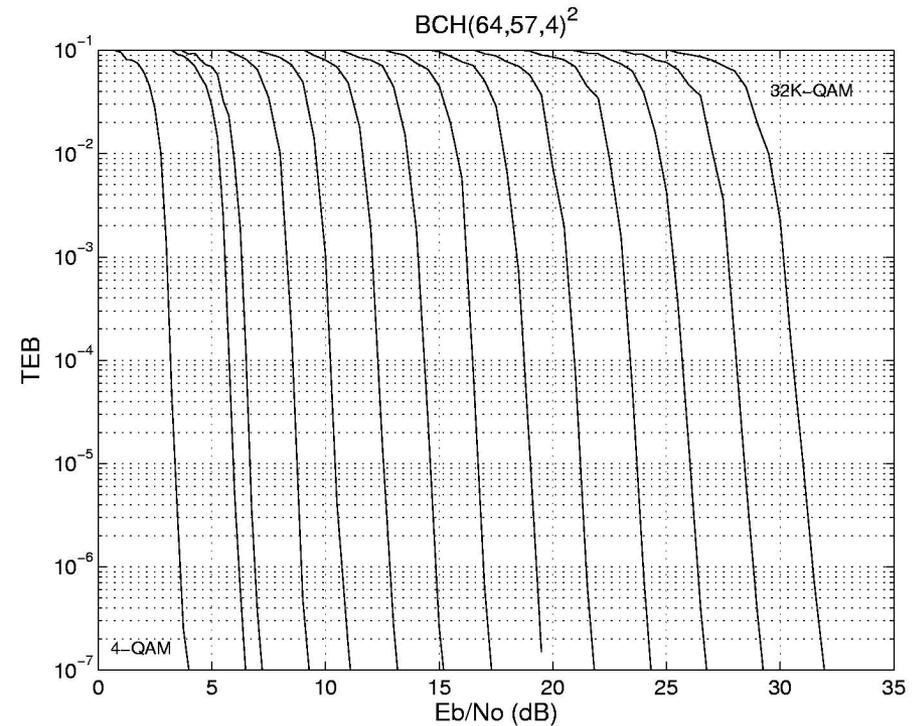
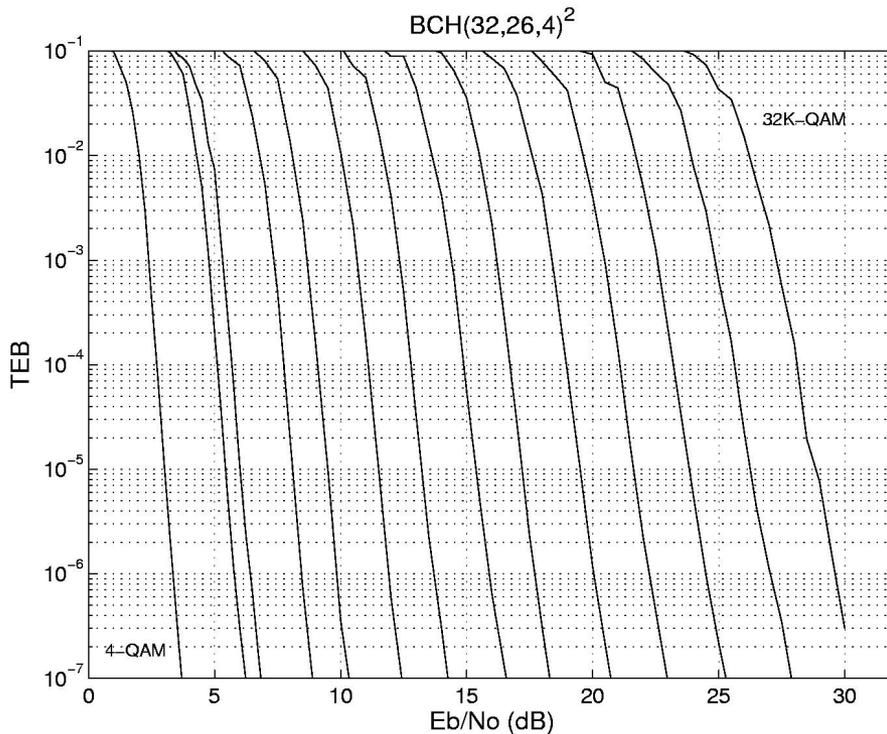
Procédure d'allocation du nombre de bits : $b(i) = \log_2\left(1 + \frac{RSB(i)}{\Gamma}\right)$

Débit total : $C = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^N b(i) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^N \log_2\left(1 + \frac{RSB(i)}{\Gamma}\right)$



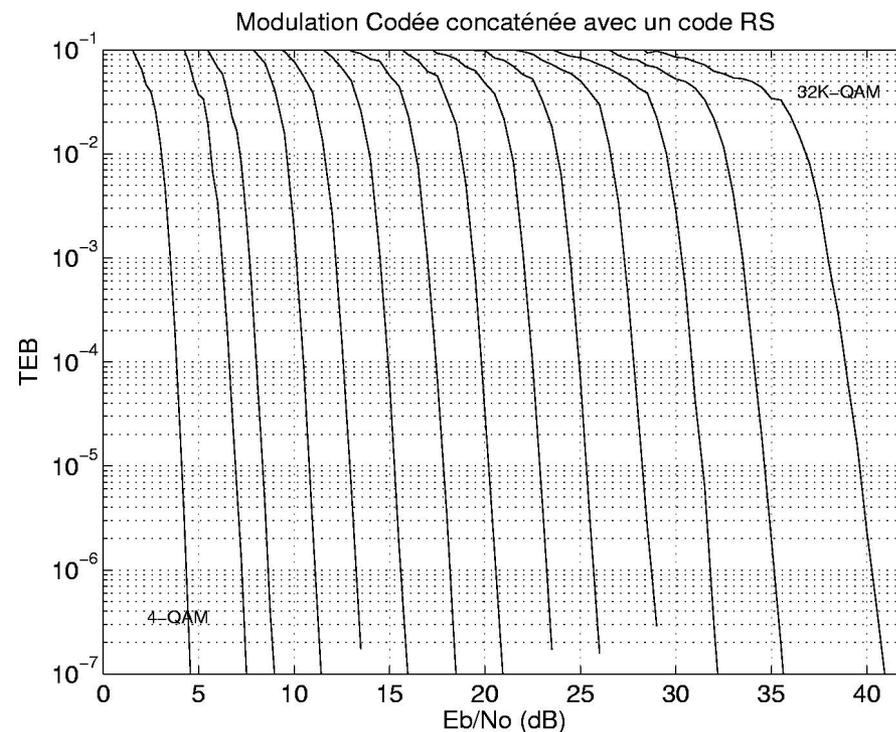
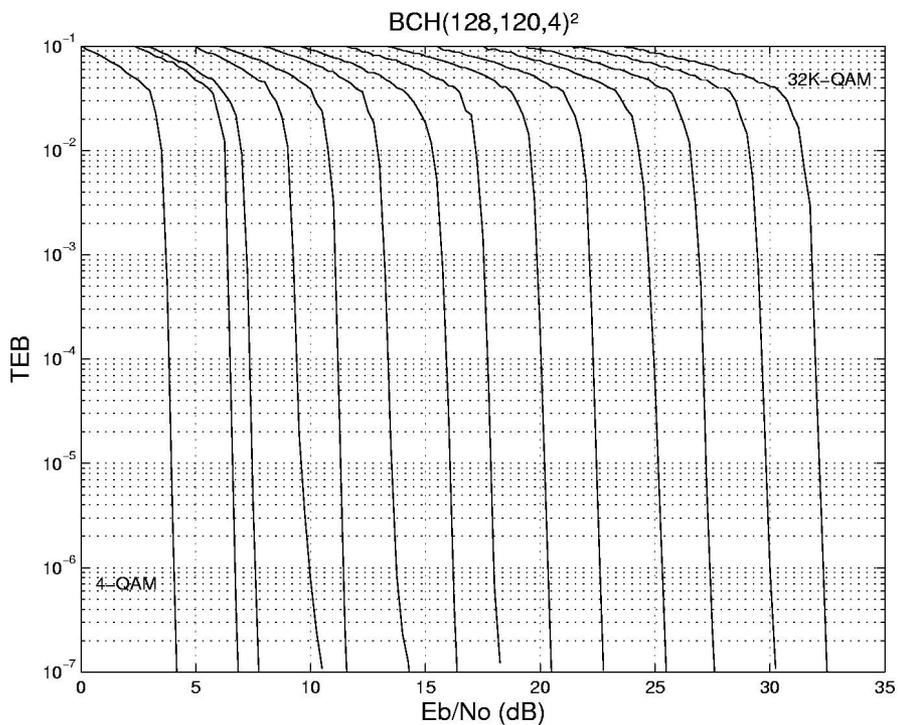
Le système VDSL

Turbo codes pour le VDSL : TEB



Le système VDSL

Turbo codes pour le VDSL : TEB



Le système VDSL

Turbo codes pour le VDSL : débits atteints

