

Analyse Multifractale des données physiologiques de marathoniens

Guillaume SAËS^{1,2}, Wejdene BEN NASR², Stéphane JAFFARD², Florent PALACIN³, Véronique BILLAT^{2,3,4}

¹Département de Mathématique, Université de Mons, Place du Parc 20, 7000 Mons (Belgique),

²Univ Paris Est Creteil, Univ Gustave Eiffel CNRS, LAMA UMR8050, F-94010 Creteil, France,

³Laboratoire de neurophysiologie et de biomécanique du mouvement,
Institut des neurosciences de l'Université Libre de Bruxelles, Belgique,

⁴Université Paris-Saclay, Univ Evry, F-91000 Evry-Courcouronnes, France

guillaume.saes@u-pec.fr, wejdene.nasr-ben-hadj-amor@u-pec.fr, jaffard@u-pec.fr,
palacinflorent@gmail.com, veronique.billat@billatraining.com

Résumé – Nous proposons une analyse de la fréquence cardiaque de marathoniens, mise en oeuvre par le calcul de spectres multifractals basés sur les p -exposants; nous en déduisons des conclusions physiologiques sur leurs performances. Cette analyse permet de mettre en évidence les perturbations de l'autorégulation de la fréquence cardiaque au cours du marathon, ce qui n'a été observé pour le moment que par des échelles de ressenti des marathoniens au cours de la course.

Abstract – We propose an analysis of heart rate marathon runners implemented by computing a multifractal spectrum based on p -exponents. We draw physiological conclusions about their performance. Finally, we link this analysis with the disturbances of the heart rate autoregulation during the marathon, which had been put in evidence up to now only by scales of feeling of marathon runners during the race.

1 Introduction

Au cours de l'évolution, la physiologie humaine a été optimisée pour couvrir de grandes distances afin de trouver suffisamment de nourriture pour soutenir le métabolisme du cerveau. La popularité du marathon chez les humains est un héritage de notre capacité à courir de longues distances en utilisant le métabolisme aérobie. Le nombre de participants au marathon de Londres est passé de 7 000 à 35 000 au cours des 30 dernières années et la participation aux courses sur route en général a augmenté de plus de 50% au cours de la dernière décennie. Cette popularité est caractérisée par l'émergence de marathoniens amateurs. Ils disposent désormais de cardiofréquence mètres GPS et cherchent à courir dans une zone de vitesse ou de fréquence cardiaque (FC) sans bases théoriques et subissent une chute drastique de leur vitesse à partir du 25ème km. D'autres coureurs préfèrent courir "à la sensation" et un défi important est d'analyser et d'interpréter les séries temporelles de leurs réponses physiologiques pour les aider à améliorer leurs performances.

A partir des années 1990, de nombreux auteurs ont mis en évidence le comportement fractal de données physiologiques [2, 4]. En 2005, une première analyse multifractale sur la FC de marathoniens a été effectuée avec la MMTO (méthode des maxima de la transformée en ondelettes) [13]. Cette étude fût complétée en 2009 en utilisant deux autres méthodes d'analyse multifractale, basées sur les DFA (Detrended Fluctuation Analysis) et les coefficients d'ondelettes dominants appliquées sur

des primitives des signaux [12]. Les comparaisons entre ces résultats sont difficiles; en effet ces méthodes ne conduisent pas à des analyses associées au même exposant de régularité: la MMTO est adaptée au *weak scaling exponent* [10], la DFA au 2-exposant [7], et les coefficients dominants à l'exposant de Hölder [5]. De plus on ne dispose de résultats mathématiques généraux de validité que pour la méthode des coefficients dominants [5]. La comparaison de l'analyse de la FC dans la première moitié et le dernier quart du semi-marathon, lorsque le coureur a commencé à avoir un épuisement du glycogène (cause majeure de la diminution de la vitesse à la fin de la course) met en évidence un changement dans la dynamique de la FC [12]. Cette étude a révélé que la fatigue affecte les propriétés de régularité du signal, ainsi qu'une diminution constante des rapports entre la vitesse, la cadence de pas, les réponses cardiorespiratoires (fréquence respiratoire, cardiaque, volume d'oxygène consommé) et le niveau de taux de perception de l'épuisement (Rate of Perception of Exhaustion (RPE)), selon l'échelle psychophysique de Borg.

Nous confirmons et complétons ces études en montrant qu'une analyse multifractale basée sur les p -exposants permet de travailler directement sur les données (et non sur des primitives) et caractérise plus précisément les modifications physiologiques durant un marathon.

2 Analyse avec les p -leaders

2.1 Exposants de régularités ponctuelles

Soient $X \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R})$, $t_0 \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$; X appartient à $C^\alpha(t_0)$ s'il existe un polynôme P_{t_0} et $K, r > 0$ tels que $\forall t \in [t_0 - r, t_0 + r]$, $|X(t) - P_{t_0}(t - t_0)|^p \leq K|t - t_0|^\alpha$. L'exposant de Hölder ponctuel est $h_X(t_0) = \sup\{\alpha : X \in C^\alpha(t_0)\}$. Cet exposant n'est pas défini si X n'est pas localement borné; on utilise alors la notion suivante adaptée au cadre L^p [6]. Soient $p \in [1, +\infty[$, $X \in L_{loc}^p(\mathbb{R})$, $t_0 \in \mathbb{R}$ et $\alpha \geq -1/p$; $X \in T_\alpha^p(t_0)$ s'il existe un polynôme P_{t_0} , $K, R > 0$ tels que

$$\forall r \leq R, \left(\frac{1}{r} \int_{t_0-r}^{t_0+r} |X(t) - P_{t_0}(t - t_0)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq Kr^\alpha.$$

Le p -exposant de X est $h_X^{(p)}(t_0) = \sup\{\alpha : X \in T_\alpha^p(t_0)\}$. Lorsque $p = +\infty$, on retrouve l'exposant de Hölder. Cet exposant de régularité se caractérise par les coefficients d'ondelettes de la manière suivante.

2.2 Coefficients dominants et p -leaders

Soit ψ une "ondelette", c'est-à-dire une fonction régulière et bien localisée telle que les $\{\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k)\}_{(j,k) \in \mathbb{Z}^2}$ forment une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$. Les coefficients d'ondelette de X sont définis par $c_{j,k} = 2^{j/2} \int_{\mathbb{R}} X(t)\psi_{j,k}(t)dt$. Ils permettent de déterminer la valeur de l'exposant de régularité uniforme H_{min} de X qui est caractérisé par regression log-log

$$\sup_k |c_{j,k}| \sim 2^{-H_{min}j} \quad (1)$$

(dans la limite des petites échelles, c'est-à-dire quand $j \rightarrow +\infty$). Si $H_{min} > 0$, alors f est localement bornée et on peut déterminer l'exposant de Hölder ponctuel de X de la façon suivante : On note un intervalle dyadique $\lambda = \lambda_{j,k} = [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}[$ et la réunion avec ses deux voisins est $3\lambda = [(k-1)2^{-j}, (k+2)2^{-j}[$. Les coefficients dominants de X sont définis par $l_{j,k} = \sup_{\lambda' \subset 3\lambda} |c_{\lambda'}|$. Ils permettent de caractériser les exposants de Hölder ponctuels si $H_{min} > 0$ puisque pour $j \rightarrow +\infty$, on a (pour les $\lambda_{j,k}$ contenant x) $l_{j,k} \sim 2^{-j h_X(x)}$, cf. [1]. Si $H_{min} < 0$, l'exposant de Hölder de X n'est plus défini, mais, il est possible de travailler sur une intégrée fractionnaires de X d'ordre $\gamma > -H_{min}$. Pour éviter une telle transformation, on peut utiliser le p -exposant pour des valeurs de p telles que $X \in L^p(\mathbb{R})$. Pour déterminer la valeur d'un tel p , il suffit de vérifier que $\eta(p) > 0$ où la fonction d'échelle ondelette η est définie par $2^{-j} \sum_k |c_{j,k}|^p \sim 2^{-\eta(p)j}$. Soit $X \in L_{loc}^p(\mathbb{R})$. Les p -leaders sont définis par $l_{j,k}^{(p)} = \left(\sum_{\lambda' \subset 3\lambda} |c_{\lambda'}|^p 2^{j-j'} \right)^{\frac{1}{p}}$. Ils permettent de caractériser les p -exposants si $\eta(p) > 0$; on a : $l_{j,k}^{(p)} \sim 2^{-j h_X^{(p)}(k2^{-j})}$ [1, 6].

2.3 p -spectre multifractal

L'analyse multifractale a pour objet l'étude de signaux dont l'exposant de régularité ponctuelle varie fortement d'un point à

un autre. Le p -spectre multifractal d'une fonction $X \in L_{loc}^p(\mathbb{R})$, est $D_X^{(p)} : H \mapsto \dim_H \left(\left\{ x \in \mathbb{R} : h_X^{(p)}(x) = H \right\} \right)$, où \dim_H désigne la dimension de Hausdorff. Il est en général impossible de calculer point par point les p -exposants de données expérimentales. On estime plutôt le p -spectre de la façon suivante. Soit $S_X^{(p)}(j, q) = 2^{-j} \sum_k \left(l_{j,k}^{(p)} \right)^q$. Si $S_p(j, q) \sim 2^{-j \zeta_X^{(p)}(q)}$, on appelle $\zeta_X^{(p)}(q)$ la p -fonction d'échelle. Sa transformée de Legendre $\mathcal{L}_X^{(p)}(H) = \inf_{q \in \mathbb{R}} \{1 + qH - \zeta_X^{(p)}(q)\}$ permet d'estimer le p -spectre. En effet $D_X^{(p)}(H) \leq \mathcal{L}_X^{(p)}(H)$ [5, 6].

3 Analyse multifractale de la fréquence cardiaque

Nous analysons la fréquence cardiaque de 8 marathoniens (des hommes de la même tranche d'âge), cf. la Fig. 1. Nous avons également considéré la cadence et l'accélération, mais elles ne permettent pas de mettre en évidence des paramètres pertinents pour la classification; cela peut être dû au fait que, contrairement à la cadence ou l'accélération, le coureur ne contrôle pas directement son rythme cardiaque.

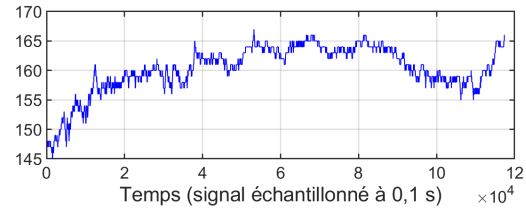


FIGURE 1 – Fréquence cardiaque d'un marathonien.

3.1 Estimation du paramètre H_{min}

Le paramètre H_{min} , cf. (1), permet de déterminer si une analyse basée sur les coefficients dominants est possible, et nous verrons qu'il est également un paramètre de classification important. La Fig. 2 est un exemple d'estimations de cette valeur : la régression est effectuée entre $j = 8$ et $j = 11$ (soit environ entre 26s et 3min25s), échelles identifiées comme pertinentes pour les données physiologiques, cf. [3].

Pour la plupart des marathoniens, on obtient que $H_{min} < 0$ (cf. la Table 1) ce qui justifie l'utilisation des p -leaders. Il est alors nécessaire de déterminer pour quelle valeurs de p on a $\zeta(p) > 0$, cf. les Fig. 3 et 4. Suite à cette première analyse, nous allons effectuer une analyse basée sur les p -leaders de la fréquence cardiaque.

3.2 Détermination des 1-spectres

Nous avons choisi de prendre $p = 1$ et $p = 1,4$ pour le calcul des p -leaders car les données étudiées vérifient toujours $\zeta(p) > 0$ pour ces valeurs, cf. la Fig. 3. La Fig. 4 fournit un

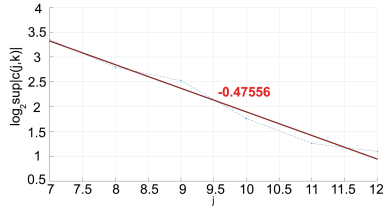


FIGURE 2 – Estimation par régression log-log du H_{min} d'une fréquence cardiaque. Le bon alignement des points montre que la régression linéaire permet d'estimer avec précision la valeur de H_{min} , et qu'il est négatif.

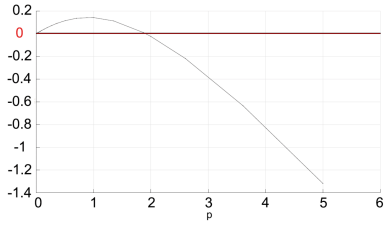


FIGURE 3 – Exemple de fonction d'échelle ondelette de la fréquence cardiaque. Elle permet de déterminer les p tels que $\zeta(p) > 0$. L'estimation du p spectre est alors possible.

tel exemple d'estimation de $\eta(1)$. Il est alors justifié d'estimer le 1-spectre multifractal pour les données physiologiques sur la fréquence cardiaque des marathoniens. Sur la Fig. 5, on représente un exemple de 1-spectre de Legendre.

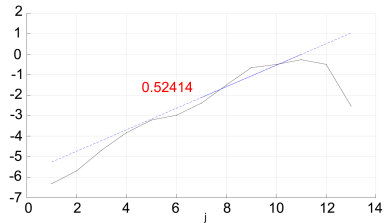


FIGURE 4 – Estimation par régression log-log de la fonction d'échelle ondelettes de la fréquence cardiaque pour $p = 1$. La pente de la régression est positive. L'utilisation de 1-leaders pour l'analyse multifractale est ainsi justifiée.

On effectue alors une classification des données sur les 8 marathoniens avec des valeurs $p = 1$ et $p = 1, 4$ (cf. Table 1).

Dans la Fig. 6, on représente pour chaque marathonien les valeurs (H_{min}, c_1^1) où c_1^p est la valeur de H pour laquelle le maximum du p -spectre est atteint. Il correspond mathématiquement à l'exposant presque partout du signal. Les valeurs de c_1^1 restent très proches de 0, 4 tandis que celles du H_{min} varient fortement, mettant en évidence des différences entre coureurs plus ou moins expérimentés. Les autres paramètres permettant de caractériser la forme des spectres (c_2^p et c_3^p [2]) ne s'avèrent pas pertinents pour la classification, ainsi nous ne les présente-

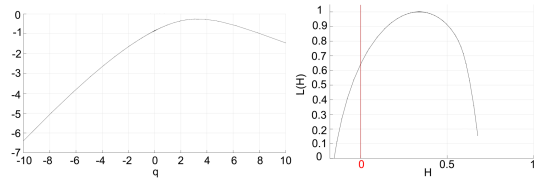


FIGURE 5 – Estimations de la fonction d'échelle 1-leaders de la fréquence cardiaque (à gauche) et de sa transformée de Legendre (à droite). La partie gauche du spectre débute pour des exposants $H < 0$ confirmant ainsi la présence de singularités d'exposant négatif dans le signal.

TABLE 1 – Analyse multifractale de la fréquence cardiaque des marathoniens (\tilde{H}_{min} et \tilde{c}_1^p sont respectivement le H_{min} et c_1^p de la primitive du signal)

	H_{min}	\tilde{H}_{min}	c_1^1	$c_1^{1,4}$	\tilde{c}_1^1	$\tilde{c}_1^{1,4}$
M1	-0, 2768	0, 7232	0, 8099	0, 8064	1, 8242	1, 8213
M2	-0, 0063	0, 9937	0, 4564	0, 4043	1, 3926	1, 3509
M3	-0, 0039	0, 9961	0, 6856	0, 6625	1, 6942	1, 6351
M4	-0, 1633	0, 8367	0, 6938	0, 6785	1, 6653	1, 6636
M5	-0, 2434	0, 7566	0, 5835	0, 5689	1, 5401	1, 5224
M6	-0, 3296	0, 6704	0, 5809	0, 5636	1, 5644	1, 5500
M7	0, 1099	1, 1099	0, 5652	0, 5483	1, 4754	1, 4379
M8	-0, 5380	0, 4620	0, 3382	0, 2977	1, 2588	1, 2086

rons pas. Le coureur M8 qui présente le H_{min} le plus petit est le seul coureur de *trail*, et il a surpassé son précédent record; de plus, il est le plus entraîné avec une façon de courir (nombre de pas par minute et vitesse/accélération) très irrégulière.

La Table 1 montre que les valeurs de c_1^p varient très peu en fonction de p , et que, pour des primitives, le décalage des paramètres H_{min} et c_1^p est d'environ 1, ce qui est caractéristique de signaux ne contenant que des singularités de type *cusp* (absence de chirps dans le signal), et montre le caractère intrinsèque de la valeur de c_1^p pour ce type de données. Ces résultats sont confirmés en vérifiant que le spectre d'une primitive du signal se translate de 1.

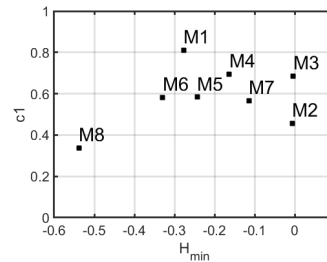


FIGURE 6 – Représentation du couple (H_{min}, c_1) déduits du 1-spectre de la fréquence cardiaque; H_{min} apparaît comme le paramètre de classification le plus pertinent. Le point isolé à gauche correspond à M8, le coureur le plus entraîné.

3.3 Classification des phases d'un marathon

Nous nous intéressons aux évolutions des paramètres multifractals lors du marathon. Vers le 25ème kilomètre (environ à 60%) les coureurs ressentent une pénibilité accrue sur l'échelle RPE Borg (Rate of Perceived Exertion) utilisée pour identifier l'intensité d'un exercice en fonction du ressenti. La Fig. 7 permet d'observer l'évolution des paramètres de multifractalité entre la première moitié du marathon et le dernier quart, mettant en évidence les différences de réactions physiologiques face à la fatigue ressenties à partir du 28ème kilomètre.

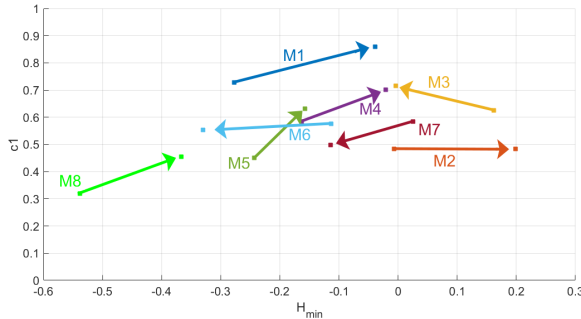


FIGURE 7 – Évolution de (H_{min}, c_1^1) déduits du 1-spectre de la fréquence cardiaque entre le début (en bleu) et le dernier quart (en rouge) du marathon : les évolutions sont similaires sauf pour trois coureurs : M3 et M6 qui ont éprouvé de grandes difficultés et M7 qui est le moins expérimenté avec un temps de course nettement plus long et une façon de courir très régulière.

4 Conclusion et perspectives

L'analyse au moyen de p -leaders du rythme cardiaque de marathoniens permet de compléter les analyses précédentes basées sur la MMT0, la DFA, ou les coefficients dominants. Sur le plan méthodologique, nous avons mis en évidence le fait qu'une analyse basée sur les 1-exposants permet de travailler directement sur les données et non sur des primitives. De plus l'analyse des différentes phases de la course permet de relier l'évolution des paramètres multifractals et la physiologie des coureurs : L'exposant H_{min} évolue peu durant la course pour des coureurs expérimentés, mais diminue en fin de course pour les autres, ce que l'on peut interpréter comme une désorganisation dans leurs efforts. De plus, ces résultats confirment des analyses réalisées sur des matrices physiologiques complètes (cardio respiratoire), nécessitant des mesures coûteuses avec des analyseurs ne permettant pas de restituer des données en qualité suffisante comme le fait le cardiofréquence mètre mesurant chaque période cardiaque, avec une précision de 0.001s soit 0.01 hertz pour la fréquence cardiaque). Ces cardiofréquence mètres sont à présent largement utilisés par les coureurs, en revanche, le traitement des série temporelles post course se fait tout au plus avec la méthode DFA.

Nous avons mentionné que l'analyse multifractale de la ca-

dence et de l'accélération des coureurs ne fournit pas de paramètres pertinents pour la classification. Il est cependant possible qu'une analyse multivariée qui utilise conjointement ces données avec la fréquence cardiaque (en suivant les outils développés dans [8]) puisse fournir des informations plus riches. Ce point sera l'objet d'une étude future.

Références

- [1] P. Abry, S. Jaffard, et H. Wendt. *A bridge between geometric measure theory and signal processing : Multifractal analysis*. The Abel Symposium vol.9, 2015.
- [2] P. Abry, H. Wendt, H. Helgason, P. Goncalves, E. Pereira, C. Gharib, P. Gaucherand, et M. Doret. *Methodology for multifractal analysis of heart rate variability : from lf/hf ratio to wavelet leaders*. Annu Int Conf IEEE Eng Med Biol Soc, 2010.
- [3] V. Cantrambone, H. Wendt, R. Barbieri, P. Abry et G. Valenza. *Quantifying Functional Links between Brain and Heartbeat Dynamics in the Multifractal Domain : a Preliminary Analysis*. IEEE, 2020.
- [4] A.L. Goldberger. *Is the normal heartbeat chaotic or homeostatic ?*. News Physiol. Sci., 1991.
- [5] S. Jaffard. *Wavelet techniques in multifractal analysis*. Fractal Geometry and Applications, 2014.
- [6] S. Jaffard, et C. Melot. *Wavelet analysis of fractal boundaries*. Communications Math. Physics, 2005.
- [7] S. Jaffard, C. Melot, R. Leonarduzzi, H. Wendt, P. Abry, S. G. Roux et M. E. Torres. *p-exponent and p-leaders*. Physica A, 2016.
- [8] S. Jaffard, S. Seuret, H. Wendt, R. Leonarduzzi et P. Abry. *Multifractal formalisms for multivariate analysis*. Proc. Royal Society A, 2019.
- [9] J. W. Kantelhardt, S. A. Zschiegner, E. Koscielny-Bunde, S. Havlin, A. Bunde et H. E. Stanley. *Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series*. Phys. A 2002.
- [10] Y. Meyer. *Wavelets, vibrations and scalings*. CRM Ser. AMS Vol. 9, Presses de l'Université de Montréal, 1998.
- [11] J. F. Muzy, E. Bacry et A. Arneodo. *Multifractal formalism for fractal signals : The structure-function approach versus the wavelet-transform modulus-maxima method*. Phys. Rev. E, 1993.
- [12] V. Billat, L. Mille-Hamard, Y. Meyer et E. Wesfreid. *Detection of changes in the fractal scaling of heart rate and speed in a marathon race*. Phys. A, 2009.
- [13] E. Wesfreid, V. Billat et Y. Meyer. *Multifractal analysis of heartbeat time series in human races*. Appl. Comput. Harmon. Anal., 2005.
- [14] V. Billat, F. Palacin, M. Correa et J.-R. Pycke. *Pacing strategy affects the sub-elite marathoner's cardiac drift and performance*. Frontiers in Psychology, 2020.