

# Une famille de représentations covariantes de signaux discrets et son application à la détection de signaux à partir de leurs zéros<sup>†</sup>

Barbara PASCAL, Rémi BARDENET

Centre de Recherche en Informatique, Signal et Automatique de Lille,  
Univ. Lille, CNRS, Centrale Lille, UMR 9189 CRISTAL, F-59000 Lille, France  
{barbara.pascal, remi.bardenet}@univ-lille.fr

**Résumé** – Dans un précédent article, nous introduisîmes une représentation covariante qui s’applique aux signaux discrets, et fait intervenir les fonctions de Kravchuk *symétriques*, associées à la loi binomiale de paramètre  $p = 0.5$ . Dans le présent article, nous montrons qu’étendre la définition à  $p \in ]0, 1[$  revient à considérer la même représentation, à une rotation près dans l’espace des phases, qui est la sphère. L’effet de ces rotations est illustré sur une stratégie de détection de signal à partir de la distribution des zéros de la transformée de Kravchuk.

**Abstract** – In a previous article, we introduced a covariant representation that applies to discrete signals, and involves the symmetric Kravchuk functions, associated to the binomial distribution of parameter  $p = 0.5$ . In the current paper, we show that extending the definition to  $p \in ]0, 1[$  only amounts to composing the previous representation with a rotation in phase space, the latter being the sphere. We illustrate the effect of these rotations on signal detection based on the distribution of zeros of the Kravchuk transform.

## 1 Introduction

**Contexte.** Des travaux récents [1–4] en analyse temps-fréquence ont proposé d’étudier les zéros du spectrogramme, plutôt que de se concentrer sur ses maxima. Suite aux travaux de [1], démontrant que la configuration des zéros de la transformée de Fourier à court-terme à fenêtre gaussienne circulaire caractérisait le signal étudié, un lien statistique rigoureux a été établi entre les zéros du spectrogramme gaussien du bruit blanc et ceux de la fonction gaussienne analytique planaire [2, 4], et étendu à d’autres représentations, comme le scalogramme analytique [4, 5] et une transformée s’appliquant aux signaux finis [4]. Des outils de géométrie stochastique [6] permettent alors de détecter et reconstruire des signaux dans du bruit, en se basant sur le processus ponctuel des zéros [1, 2, 5].

**État-de-l’art.** Récemment, nous avons enrichi ces approches par la construction d’une transformée covariante spécifiquement adaptée aux signaux discrets, appelée transformée de Kravchuk et dont l’espace des phases est la sphère unité  $S^2$ . Notre transformée, initialement motivée par la recherche d’une interprétation temps-fréquence de la transformée finie de [4, Section 4.5], a les mêmes avantages que cette dernière, à savoir de ne nécessiter ni discrétisation, puisqu’elle s’applique à des signaux de  $\mathbb{C}^{N+1}$ ,  $N \in \mathbb{N}$ , ni gestion des effets de bords pour le calcul des statistiques spatiales des zéros, puisque son espace des phases, compact, peut être observé dans son intégralité. Crucialement, notre transformée est en outre covariante sous l’action des rotations de la sphère et dispose d’une implémentation

numériquement stable. En suivant un raisonnement similaire à [4], nous avons établi un lien statistique entre les zéros du spectrogramme de Kravchuk et ceux de la fonction gaussienne analytique sphérique

$$\text{GAF}_{\mathbb{S}}(z) = \sum_{n=0}^N \xi[n] \sqrt{\binom{N}{n}} z^n, \quad \xi[n] \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1) \quad (1)$$

dont les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes. Nous avons ensuite proposé une stratégie de détection à partir des zéros du spectrogramme de Kravchuk, s’avérant significativement plus robuste à un niveau de bruit élevé et à un faible nombre de points dans le signal analysé que la méthode basée sur les zéros du spectrogramme gaussien [2], et moins sensible à la connaissance *a priori* de la taille du support du signal.

**Objectifs et contributions.** L’objectif de ce travail est de valider théoriquement comme empiriquement que la transformée de Kravchuk et ses versions étendues permettent de représenter fidèlement un signal discret en s’adaptant automatiquement aux échelles caractéristiques du signal. Pour cela, nous exhibons un paramètre  $p$  contrôlant la largeur de la fenêtre binomiale sous-jacente à la construction de la transformée de Kravchuk [7, Section III], fixé à  $p = 0.5$  pour la transformée standard, et introduisons la  $p$ -transformée de Kravchuk, étendue à  $p \in ]0, 1[$ . Nous établissons ensuite théoriquement qu’un changement de variance de la fenêtre binomiale correspond, dans l’espace des phases  $S^2$  à une simple rotation du spectrogramme de Kravchuk. Il n’y a donc pas de paramètre de fenêtre à régler dans une analyse de Kravchuk, contrairement à, par exemple, la largeur de la fenêtre pour le spectrogramme gaussien. Enfin, nous étudions empiriquement l’influence de cette rotation sur les performances de détection de signal à partir de la distribu-

<sup>†</sup>. Avec le soutien du financement ERC Blackjack (ERC-2019-STG-851866) et de la chaire IA Baccarat (ANR-20-CHIA-0002).

tion des zéros du spectrogramme de Kravchuk.

## 2 Une famille de transformées discrètes

Nous étendons la définition de la transformée de Kravchuk [7] d'un signal de  $\mathbb{C}^{N+1}$  en y ajoutant un paramètre  $p \in ]0, 1[$ .

**Base de Kravchuk de paramètre  $p$ .** Les polynômes orthogonaux pour la loi binomiale de paramètre  $p$  sont appelés *polynômes de Kravchuk de paramètre  $p$* . Ils sont définis [8, Section 6.2] par les relations d'orthogonalité

$$\sum_{\ell=0}^N \binom{N}{\ell} p^\ell (1-p)^{N-\ell} Q_n(\ell; N, p) Q_{n'}(\ell; N, p) = \binom{N}{n}^{-1} \binom{N}{1-p}^{-n} \delta_{n,n'}, \quad (2)$$

où  $\delta_{n,n'}$  désigne le delta de Kronecker. En posant  $\eta = \sqrt{\frac{p}{1-p}}$ , on définit alors les *fonctions de Kravchuk* par

$$q_n(\ell; N, p) = \sqrt{\binom{N}{n} \frac{\eta^n Q_n(\ell; N, p) \eta^\ell}{\sqrt{(1+\eta^2)^N}}} \sqrt{\binom{N}{\ell}}. \quad (3)$$

Par (2), les vecteurs  $\mathbf{q}_n^{(p)} = (q_n(\ell; N, p))_{\ell=0}^N$  forment une base orthonormée de  $\mathbb{C}^{N+1}$ , appelée *base de Kravchuk de paramètre  $p$* , dont les éléments de plus bas ( $n=0$ ) et plus haut ( $n=N$ ) dégères sont représentés Figure 1 pour  $N=32$  et plusieurs  $p$ .

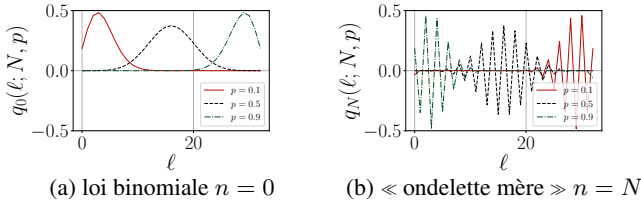


FIGURE 1 – Fonctions de Kravchuk extrêmes pour  $N=32$ .

**Transformées de Kravchuk à paramètre.** La transformée de Kravchuk des signaux de  $\mathbb{C}^{N+1}$  introduite dans [7, Section III] pour  $p=0.5$  se généralise facilement à  $p \in ]0, 1[$ .

**Définition 1.** La transformée de Kravchuk de paramètre  $p$  d'un signal  $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^{N+1}$  est définie comme  $T^{(p)}\mathbf{y}(\vartheta, \varphi) =$

$$\sum_{n=0}^N \sqrt{\binom{N}{n}} \left(\cos \frac{\vartheta}{2}\right)^n \left(\sin \frac{\vartheta}{2}\right)^{N-n} e^{in\varphi} (\mathbf{Q}^{(p)}\mathbf{y})[n], \quad (4)$$

où  $(\vartheta, \varphi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$  sont les coordonnées sphériques naturelles de l'espace des phases  $S^2$ , et

$$(\mathbf{Q}^{(p)}\mathbf{y})[n] = \langle \mathbf{y}, \mathbf{q}_n^{(p)} \rangle = \sum_{\ell=0}^N \overline{\mathbf{y}[\ell]} q_n(\ell; N, p) \quad (5)$$

sont les coefficients de  $\mathbf{y}$  dans la base de Kravchuk.

**États cohérents de  $SO(3)$  généralisés.** Pour  $\vartheta \in [0, \pi]$  et  $\varphi \in [0, 2\pi]$ , les vecteurs

$$\Psi_{\vartheta, \varphi}^{(p)} = \sum_{n=0}^N \sqrt{\binom{N}{n}} \left(\cos \frac{\vartheta}{2}\right)^n \left(\sin \frac{\vartheta}{2}\right)^{N-n} e^{in\varphi} \mathbf{q}_n^{(p)}, \quad (6)$$

s'appellent états cohérents de  $SO(3)$ . Par construction, la combinaison de (4) et (6) fournit par un calcul direct

$$T^{(p)}\mathbf{y}(\vartheta, \varphi) = \langle \mathbf{y}, \Psi_{\vartheta, \varphi}^{(p)} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{R}_{\mathbf{u}(\vartheta, \varphi)} \Psi_{(0,0)}^{(p)} \rangle. \quad (7)$$

où  $\Psi_{(0,0)}^{(p)} = \mathbf{q}_N^{(p)}$ , représentée à la Figure 1b, est l'« ondelette mère » associée à la transformée de Kravchuk, sur laquelle le groupe des rotations agit au moyen des opérateurs  $\mathbf{R}_{\mathbf{u}(\vartheta, \varphi)}$ .<sup>a</sup>

**Transformée d'un bruit blanc.** En posant  $z = \cot(\vartheta/2)e^{i\varphi}$ , qui correspond à la projection stéréographique de la sphère sur le plan complexe étendu  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , on peut réécrire la transformée de Kravchuk

$$T^{(p)}\mathbf{y}(z) = \sqrt{(1+|z|^2)^{-N}} \sum_{n=0}^N \sqrt{\binom{N}{n}} (\mathbf{Q}^{(p)}\mathbf{y})[n] z^n. \quad (8)$$

Pour un bruit blanc complexe  $\xi \in \mathbb{C}^N$ ,  $\mathbf{Q}^{(p)}\mathbf{y}$  est encore un bruit blanc et la loi de  $T^{(p)}\xi$  est celle de  $\sqrt{(1+|z|^2)^{-N}} \text{GAF}_{\mathbb{S}}(z)$ . En particulier, le processus ponctuel formé par les zéros du  $p$ -spectrogramme de Kravchuk du bruit blanc est invariant sous les isométries de la sphère, ce qui est permis de construire le test de détection détaillé à la Section 4.

## 3 Calcul du spectrogramme étendu

L'évaluation des fonctions de Kravchuk s'appuyant sur les relations de récurrence satisfaites par les polynômes de Kravchuk est numériquement instable [7, Section IV]. Le calcul pratique de la transformée de Kravchuk repose sur une reformulation de (4) ne faisant pas intervenir les fonctions  $q_n^{(p)}$ . Comme dans [4], nous utilisons la formule génératrice [8, Formula (6.2.43)] des polynômes de Kravchuk.

**Proposition 1.** Pour  $p \in ]0, 1[$ ,  $\eta = \sqrt{\frac{p}{1-p}}$ ,  $z = \cot(\vartheta/2)e^{i\varphi}$ ,

$$T^{(p)}\mathbf{y}(\vartheta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^N \overline{\mathbf{y}[\ell]} \sqrt{\binom{N}{\ell}} \frac{(\eta - z)^\ell (1 + \eta z)^{N-\ell}}{\sqrt{(1 + \eta^2)^N (1 + |z|^2)^N}}. \quad (9)$$

On remarque grâce à la réécriture (9) que la  $p$ -transformée de Kravchuk est essentiellement la transformée  $\mathcal{L}\mathbf{y}(z)$  de [4, Section 4.5], mais multipliée par  $\sqrt{(1+|z|^2)^{-N}}$ . Ce préfacteur apparaît naturellement lorsqu'on construit la transformée de Kravchuk avec des états cohérents. Il fait de  $T^{(p)}$  une isométrie de  $\mathbb{C}^{N+1}$  vers  $L^2(S^2)$ <sup>b</sup>, donne une formule d'inversion naturelle, et surtout garantit la covariance de la transformée [7, Proposition 1]. En outre, il contribue à une implémentation robuste de  $T^{(p)}\mathbf{y}$ , passant à l'échelle pour des signaux ayant jusqu'à  $N=2048$  points d'échantillonnage.

**Transformée d'un chirp linéaire.** Nous allons considérer des signaux de chirp, consistant en la modulation en amplitude et en fréquence d'une oscillation sinusoïdale,

$$x(t) = A_\nu(t) \times \sin \left( 2\pi \left( f_1 + (f_2 - f_1) \frac{(t + \nu)}{2\nu} \right) t \right) \quad (10)$$

a. Une description détaillée de l'action du groupe des rotations sur les signaux de  $\mathbb{C}^{N+1}$  est fournie dans [7, Annexe C]

b. L'ensemble des fonctions de carré intégrable sur la sphère.

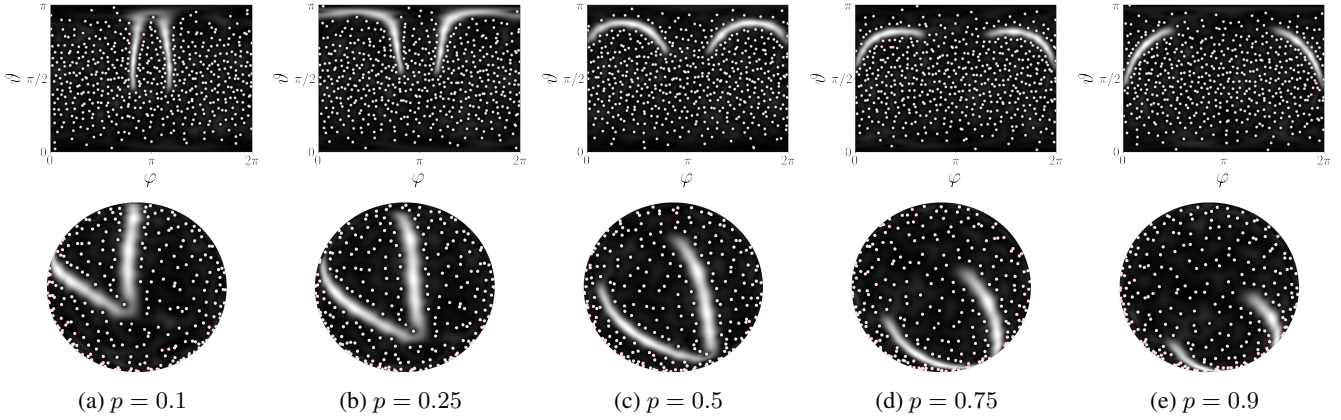


FIGURE 2 –  $p$ -Spectrogrammes de Kravchuk d'un *chirp* linéaire de durée  $2\nu = 30$  s corrompu par un bruit blanc gaussien avec  $\text{snr} = 2$ . Le module au carré de la transformée de Kravchuk est représenté en nuances de gris, les zéros du spectrogramme sont indiqués par les points roses.

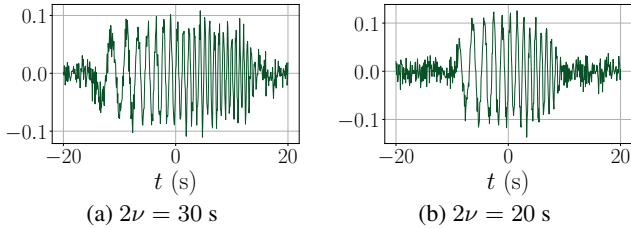


FIGURE 3 – *Chirp* linéaire de durée  $2\nu$  corrompu par un bruit blanc gaussien avec un rapport signal-à-bruit  $\text{snr} = 2$  et  $N + 1 = 513$  points d'échantillonnage.

où la fréquence instantanée croît linéairement de  $f_1$  à  $f_2$  entre les instants  $-\nu$  et  $\nu$ , tandis que l'enveloppe  $A_\nu$  impose la nullité du signal en dehors de cet intervalle. Un exemple de tel signal de durée  $2\nu \in \{30 \text{ s}, 20 \text{ s}\}$ , échantillonné de manière régulière sur une fenêtre temporelle de 40 s, avec  $f_1 = 0.5$ ,  $f_2 = 1$ , dégradé par un bruit blanc gaussien est proposé en Figure 3.

**Lien entre les  $p$ -transformées de Kravchuk.** On observe à la Figure 2 que la  $p$ -transformée de Kravchuk (4) semble ne différer de la transformée de Kravchuk standard [7], correspondant à  $p = 0.5$ , que par une rotation sur la sphère. Cette observation est étayée par le résultat suivant.

**Proposition 2.** Soit  $p \in ]0, 1[$ ,  $\eta = \sqrt{p/(1-p)}$ . La fonction  $h_\eta(z) := \frac{(1+\eta)z - (1-\eta)}{(1-\eta)z + 1 + \eta}$  est une isométrie du plan stéréographique et  $|T^{(p)}\mathbf{y}(h_\eta(z))|^2 = |T^{(0.5)}\mathbf{y}(z)|^2$ .

*Démonstration.*  $h_\eta(z)$  est de la forme  $z \mapsto (az+b)/(-\bar{b}z+\bar{a})$  avec  $a = (1+\eta)$ ,  $b = (1-\eta) \in \mathbb{C}$  et est donc bien une isométrie du plan stéréographique, c'est-à-dire que son action sur  $z = \cot(\vartheta/2)e^{i\varphi}$  se traduit par une rotation du point  $(\vartheta, \varphi) \in S^2$  sur la sphère. En outre, par définition de  $h_\eta$ ,

$$\begin{aligned} \eta - h_\eta(z) &= \frac{(1+\eta^2)(1-z)}{(1-\eta)z + (1+\eta)}, \\ 1 + \eta h_\eta(z) &= \frac{(1+\eta^2)(1+z)}{(1-\eta)z + (1+\eta)}, \\ 1 + |h_\eta(z)|^2 &= \frac{1+\eta^2}{|(1-\eta)z + (1+\eta)|^2} (1+|z|^2). \end{aligned}$$

Ces formules, injectées dans le calcul du  $p$ -spectrogramme de Kravchuk, permettent de conclure.  $\square$

**Corollaire 1.** L'ensemble des propriétés de la transformée de Kravchuk standard [7, Proposition 1] se transfère directement aux  $p$ -transformées de Kravchuk, qui sont donc en particulier covariantes sous l'action de  $\text{SO}(3)$  et préservent l'énergie.

## 4 Test de détection de signal

Le test de détection s'appuyant sur les zéros du spectrogramme de Kravchuk [7] s'inspire de celui pour le spectrogramme gaussien [2], qui permet de rejeter au niveau de confiance  $1 - \alpha$  l'hypothèse  $\mathbf{H}_0 : \mathbf{y} = \boldsymbol{\xi}$  que le signal ne contient que du bruit blanc gaussien. Pour ensuite étudier une mesure de puissance du test, on cherche à détecter  $\mathbf{H}_1 : \mathbf{y} = \text{snr} \times \mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}$ , avec  $\text{snr} > 0$  et  $\mathbf{x}$  un signal déterministe d'intérêt, comme un *chirp* linéaire (cf. Equation (10) et Figure 3).

**Test de Monte Carlo.** Soient  $\alpha > 0$  et  $k \leq m$  deux entiers tels que  $\alpha = k/(m+1)$  et  $s(\mathbf{y})$  une statistique résumante de la distribution des zéros du  $p$ -spectrogramme de Kravchuk d'un signal discret  $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^{N+1}$ , comme par exemple (11). La procédure de test consiste alors à : (i) calculer la statistique résumante de l'observation  $s(\mathbf{y})$ ; (ii) générer  $m$  échantillons sous l'hypothèse nulle, dans notre cas des bruits blancs gaussiens complexes  $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \dots, \boldsymbol{\xi}_m$ ; (iii) calculer et ordonner de manière décroissante les statistiques résumantes des  $m$  simulations,  $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_m$ ; (iv) si  $s(\mathbf{y}) \geq s_k$  rejeter  $\mathbf{H}_0$ . Un argument de symétrie garantit que la probabilité de rejeter  $\mathbf{H}_0$  à tort est plus petite que  $\alpha$ .

**Statistiques spatiales sur  $S^2$ .** Le lien avec  $\text{GAF}_S$  (cf. Section 2), assure que les zéros du  $p$ -spectrogramme de Kravchuk du bruit blanc sont uniformément répartis sur la sphère. En présence d'un signal des « trous » dans la configuration des zéros apparaissent (cf. Figure 2). La statistique résumante  $s(\mathbf{y})$  doit donc refléter un changement dans la distribution des distances entre les zéros. Pour cela nous nous tournons vers une fonctionnelle statistique de second ordre : la fonction d'espace

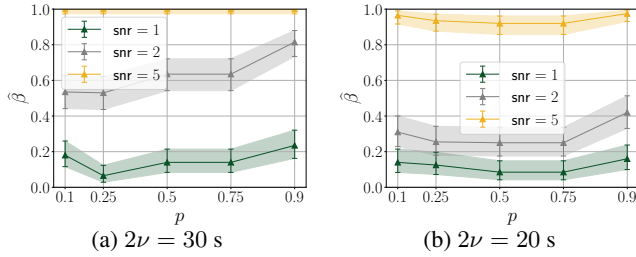


FIGURE 4 – Puissance du test de détection s’appuyant sur la distribution des zéros de la  $p$ -transformée de Kravchuk en fonction de  $p$  pour différents niveaux de bruit  $\text{snr}$  et durée du chirp  $2\nu$ .

vide  $F(r) = \mathbb{P}(b(0, r) \cap Z \neq \emptyset)$ , où  $Z$  est le processus des zéros et  $b(0, r)$  est la boule centrée en le pôle nord de la sphère  $S^2$  et de rayon  $r > 0$  pour la distance de corde. L’écart par rapport à la fonctionnelle statistique obtenue sous l’hypothèse  $\mathbf{H}_0$  est mesurée par la statistique résumante

$$s(\mathbf{y}) = \sqrt{\int_0^\pi |\widehat{F}_{\mathbf{y}}(r) - F_0(r)|^2}, \quad (11)$$

où  $\widehat{F}$  désigne un estimateur sans biais de la fonction d’espace vide d’un processus ponctuel stationnaire sur la sphère [7, 9], et  $F_0$  désigne la fonction d’espace vide sous  $\mathbf{H}_0$ . Si cette dernière n’est pas connue, on peut la remplacer par la moyenne des  $\widehat{F}$  estimées sur les réalisations de bruit blanc et le signal d’intérêt, sans altérer la significativité du test [10].

**Puissance du test.** La Figure 4 illustre les performances de détection du test s’appuyant sur les zéros du  $p$ -spectrogramme de Kravchuk moyennée sur 200 réalisations du signal  $\mathbf{y} = \text{snr} \times \mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}$  en fonction de  $p$  et pour plusieurs niveaux de bruit, piloté par le rapport signal à bruit  $\text{snr}$ . Pour le signal de longueur  $2\nu = 20$  s (cf. Figure 3b), les performances de détection ne varient que très peu en fonction de  $p$ , ce qui était attendu puisque le spectrogramme de Kravchuk subit simplement une rotation sur la sphère. Lorsque la durée du signal est plus importante, pour  $2\nu = 30$  s (cf. Figure 3a), on constate à la Figure 4 que la puissance du test augmente avec  $p$ . Ce gain de performance est purement lié aux propriétés d’implémentation du calcul du  $p$ -spectrogramme de Kravchuk qui est évalué sur une grille *uniforme* en les angles  $(\vartheta, \varphi)$ , donc beaucoup mieux résolue au niveau des pôles qu’à l’équateur. Ainsi, selon la région occupée par le signal sur la sphère, la qualité de l’estimation de la fonction d’espace vide  $F$  varie, conduisant à des performances légèrement meilleures pour un choix de  $p$  idoine.

## 5 Conclusion

Nous avons introduit une famille de transformées covariantes agissant sur les signaux discrets et paramétrée par  $p \in ]0, 1[$ , généralisant la transformée de Kravchuk que nous avons introduite dans [7]. Dans ce formalisme un signal est représenté sur la sphère par son  $p$ -spectrogramme de Kravchuk. Nous démontrons que le choix du paramètre  $p$  revient à effectuer une simple

rotation du spectrogramme, confirmant l’assertion formulée dans [7], que la transformée de Kravchuk ne nécessitait pas de connaître *a priori* l’échelle caractéristique de variation du signal recherché mais au contraire s’adaptait *automatiquement* à l’information présente dans le signal échantillonné. Cette caractéristique est mise à profit pour fournir des procédures de détection efficaces s’appuyant sur la distribution des zéros du  $p$ -spectrogramme de Kravchuk à l’aide d’outils récents de statistiques spatiales sur la sphère. La suite logique de ce travail est d’élaborer un schéma numérique robuste d’inversion des  $p$ -transformées de Kravchuk, pour pouvoir élargir le champ d’application de cette transformée covariante, particulièrement adéquat pour traiter des signaux *discrets*, à des problèmes de débruitage et de démixage.

## Références

- [1] P. Flandrin, “Time–frequency filtering based on spectrogram zeros,” *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 22, no. 11, pp. 2137–2141, 2015.
- [2] R. Bardenet, J. Flamant, and P. Chainais, “On the zeros of the spectrogram of white noise,” *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, vol. 48, no. 2, pp. 682–705, 2020.
- [3] L. D. Abreu, “Local maxima of white noise spectrograms and Gaussian Entire Functions,” *Preprint RG, June, 2020*.
- [4] R. Bardenet and A. Hardy, “Time-frequency transforms of white noises and Gaussian analytic functions,” *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, vol. 50, pp. 73–104, 2021.
- [5] L. D. Abreu, A. Haimi, G. Koliander, and J. L. Romero, “Filtering with wavelet zeros and Gaussian analytic functions,” *Preprint arXiv :1807.03183*, 2018.
- [6] J. Møller and R. P. Waagepetersen, “Modern statistics for spatial point processes,” *Scand. J. Stat.*, vol. 34, no. 4, pp. 643–684, 2007.
- [7] B. Pascal and R. Bardenet, “A covariant, discrete time-frequency representation tailored for zero-based signal detection,” *Preprint arXiv :2202.03835*, 2022.
- [8] M. Ismail, M. EH Ismail, and W. van Assche, *Classical and quantum orthogonal polynomials in one variable*, vol. 13, Cambridge university press, 2005.
- [9] J. Møller and E. Rubak, “Functional summary statistics for point processes on the sphere with an application to determinantal point processes,” *Spat. Stat.*, vol. 18, pp. 4–23, 2016.
- [10] A. Baddeley, P. J Diggle, A. Hardegen, T. Lawrence, R. K Milne, and G. Nair, “On tests of spatial pattern based on simulation envelopes,” *Ecological Monographs*, vol. 84, no. 3, pp. 477–489, 2014.