

# Transformée de Fourier sur Graphe pour les Espaces de Hilbert Quelconques.

Benjamin GIRAULT

Université de Rennes, ENSAI, CNRS, CREST-UMR 9194, Rennes, France.

benjamin.girault@ensai.fr

**Résumé** – Nous proposons une généralisation de la transformée de Fourier sur graphe aux espaces de Hilbert quelconques de signaux sur graphe. Cette généralisation permet une plus grande adaptabilité aux signaux étudiés. Plusieurs applications sont données à titre d’illustration.

**Abstract** – We propose a generalization of the graph Fourier transform to arbitrary Hilbert spaces of graph signals. This generalization allows for more flexibility when studying graph signals. Several applications are given as illustration.

## 1 Introduction

Le traitement du signal sur graphe ouvre de nouvelles perspectives en adaptant les outils classiques du traitement des signaux supportés par des structures régulières aux structures discrètes quelconques. Dans ce contexte, la communauté a proposé plusieurs transformées de Fourier sur graphe généralisant le concept de décomposition spectrale. L’interprétation spectrale du contenu de signaux permet alors l’analyse de tels signaux comme somme pondérée de composantes spectrales de variations spatiales quantifiées par les fréquences sur graphe. Elle permet également de transformer de tels signaux par atténuation ou amplification sélective de fréquence par un filtre sur graphe.

Cependant, l’état de l’art ne considère que des espaces de Hilbert de signaux sur graphe pondérant de manière uniforme l’ensemble des nœuds du graphe : les nœuds sont tous supposés d’égale importance. Cette hypothèse généralement vérifiée en traitement du signal classique l’est rarement pour des structures irrégulières telles que des graphes quelconques. Par exemple, les relevés d’un capteur fautif auront une importance moindre, ou la perception du bruit sur les pixels d’une image est atténuée par la quantité de détails.

Dans cette communication, nous proposons une transformée de Fourier sur graphe généralisant plusieurs approches de l’état de l’art, tout en autorisant la prise en compte de l’importance des nœuds du graphe. Cette importance est caractérisée par un espace de Hilbert des signaux sur graphe qui équipe l’espace de ces signaux d’un produit scalaire. Combinée à une fonction de variabilité desdits signaux, nous pouvons définir la transformée de Fourier sur graphe par une décomposition orthogonale, au sens du produit scalaire choisi, et de variabilité croissante.

Cette proposition s’adapte alors à une variété d’applications, pour lesquelles la notion d’importance ou de produit scalaire, comme la notion de variabilité, peuvent prendre de multiples formes. Nous donnons ici des clés de compréhension de l’im-

portance de ce produit scalaire sur l’interprétation spectrale des signaux. En outre, nous montrons comment ce cadre permet de réinterpréter les filtres bilatéraux classiques en traitement des images, et comment ils permettent de faire converger les deux approches classiques de transformée de Fourier sur graphe basées sur le *Graph Shift* et le Laplacien.

Le reste de cette communication, basée sur [2], est organisée en une section d’état de l’art, une section de présentation de notre transformée de Fourier sur graphe paramétrique, et d’une section d’applications. Le lecteur intéressé pourra consulter [2] pour une étude plus complète de notre transformée de Fourier sur graphe.

## 2 Traitement du Signal sur Graphe

Nous présentons ici plusieurs notations nécessaires pour la sec. 4, et le cadre général pour la sec. 3. Notons  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, w)$  un graphe avec  $\mathcal{V} = \llbracket 1, N \rrbracket$  l’ensemble de ses nœuds,  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$  l’ensemble de ses arêtes, et la fonction de pondération des arêtes  $w : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Les graphes peuvent être symétriques ( $\forall ij \in \mathcal{E}, ji \in \mathcal{E}$  and  $w(ij) = w(ji)$ ) ou non. Les graphes dont les poids sont négatifs ou complexes, ou les graphes non symétriques sont valides dans ce papier, sous réserve que l’opérateur de variation choisi vérifie certaines propriétés (cf. sec. 3).

Un graphe peut être représenté par sa matrice d’adjacence  $\mathbf{A}$  vérifiant  $\forall ij \in \mathcal{E}, \mathbf{A}_{ij} = w(ij)$ ,  $\mathbf{A}_{ij} = 0$  sinon. Pour un graphe symétrique, cette structure algébrique basique est alors utilisée pour définir la matrice diagonale des degrés  $\mathbf{D} = \text{diag}(d_1, \dots, d_N)$ , avec  $d_i = \sum_j w(ij)$  le degré du nœud  $i$ . Nous pouvons alors combiner ces deux matrices pour obtenir le Laplacien du graphe  $\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{A}$ . De plus, nous utiliserons deux normalisations classiques de ce Laplacien : le Laplacien normalisé  $\mathcal{L} = \mathbf{D}^{-1/2} \mathbf{L} \mathbf{D}^{-1/2}$ , et le Laplacien de marche aléatoire  $\mathbf{L}_{RW} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{L}$ .

Une signal sur graphe  $\mathbf{x}$  se définit alors comme un signal

TABLEAU 1 – Quelques opérateurs de variation classiques. GQV est la variation quadratique sur graphe, GTV la variation totale sur graphe, et GDV la variation dirigée sur graphe. Les variations pour lesquelles la matrice  $\mathbf{M}$  existe sont dans la moitié supérieure du tableau.

Name ( $\mathbf{M}$ )	$\Delta(\mathbf{x})$
[10] Lapl. ( $\mathbf{L}$ )	$\frac{1}{2} \sum_{ij} w(ij)  x_i - x_j ^2$
[10] Lapl. norm. ( $\mathcal{L}$ )	$\frac{1}{2} \sum_{ij} w(ij) \left  \frac{x_i}{\sqrt{d_i}} - \frac{x_j}{\sqrt{d_j}} \right ^2$
[8] GQV ( $(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{\text{norm}})^2$ )	$\sum_i  x_i - [\mathbf{A}^{\text{norm}} \mathbf{x}]_i ^2$
[8] GTV	$\sum_i  x_i - [\mathbf{A}^{\text{norm}} \mathbf{x}]_i $
[9] GDV	$\sum_{ij} w(ij) [x_i - x_j]_+$

porté par les nœuds du graphe et est représenté par la fonction  $\mathbf{x} : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}$ . On dénote  $\mathbb{C}^{\mathcal{V}}$  l'espace des signaux sur graphe. Si l'indiciage des nœuds est fixé, on pourra utiliser une notation vectorielle  $\mathbf{x} = [\mathbf{x}(1) \cdots \mathbf{x}(N)]^T$ .

### 3 TFG Paramétrique

Dans cette section, nous présentons notre définition de *Transformée de Fourier sur Graphe* (TFG) paramétrisée par un opérateur de variation et un produit scalaire.

#### 3.1 Pré-requis

**Variation** Le premier paramètre de notre TFG est un *opérateur de variation*  $\Delta : \mathbb{C}^{\mathcal{V}} \rightarrow \mathbb{R}_+$  associant à chaque signal une quantité positive donnant sa variation sur le graphe. Intuitivement, on aura pour objectif qu'un signal de variation nulle est constant, et que plus le signal est de fréquence élevée, plus sa variation est forte (à énergie constante).

Lorsqu'il existe une matrice Hermitienne semi-définie positive  $\mathbf{M}$  telle que  $\Delta(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^* \mathbf{M} \mathbf{x}$ , l'opérateur de variation est une *forme Hermitienne semi-définie positive*. C'est le cas de plusieurs opérateurs de variation classiques de l'état de l'art (voir [tableau 1](#)).

**Produit Scalaire** Le deuxième paramètre de notre TFG est le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{Q}}$  caractérisant l'espace de Hilbert des signaux sur graphe  $\mathcal{H}_{\mathbf{G}}(\mathbf{Q}) = (\mathbb{C}^{\mathcal{V}}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{Q}})$ . Notre espace étant de dimension finie, pour tout produit scalaire, il existe une matrice Hermitienne définie positive  $\mathbf{Q}$  telle que  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbf{Q}} = \mathbf{y}^* \mathbf{Q} \mathbf{x}$ . Ce produit scalaire induit une norme dénotée  $\mathbf{Q}$ -norme telle que  $\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{Q}} = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\mathbf{Q}}}$ .

On notera que le produit scalaire généralement utilisé dans l'état de l'art est le produit scalaire usuel caractérisé par  $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ . Notre contribution propose une définition de transformée de Fourier sur graphe s'adaptant au produit scalaire choisi par l'application. Nous donnons des exemples de matrices  $\mathbf{Q}$  pour plusieurs applications à la [sec. 4](#).

#### 3.2 TFG Proposée

Notre transformée de Fourier sur graphe propose de généraliser la transformée de Fourier classique aux signaux sur graphe. Plus précisément, les composantes spectrales d'un signal sont obtenues par projection orthogonale (au sens du produit scalaire  $\mathbf{Q}$ ) du signal sur une famille orthonormale (au sens de  $\mathbf{Q}$ ) de signaux sur graphe de variation croissante : les modes de Fourier sur le graphe. Nous proposons donc la généralisation suivante pour ces modes :

**Définition 1** (Modes de Fourier sur Graphe). Soit  $\mathcal{H}_{\mathbf{G}}(\mathbf{Q})$  un espace de Hilbert de signaux sur graphe, et  $\Delta$  un opérateur de variation sur graphe défini sur le même graphe. L'ensemble des  $(\Delta, \mathbf{Q})$ -modes de Fourier sur graphe ( $(\Delta, \mathbf{Q})$ -MFG) est une base orthonormale des signaux  $\{u_l\}_l$  solution à la séquence suivante de minimisations, pour  $L \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$  croissant :

$$\min_{\mathbf{u}_L} \Delta(\mathbf{u}_L) \quad \text{avec} \quad \mathbf{U}_L^* \mathbf{Q} \mathbf{U}_L = \mathbf{I}, \quad (1)$$

avec  $\mathbf{U}_L = [\mathbf{u}_0 \cdots \mathbf{u}_L]$ . Ci-dessus,  $\lambda_L = \Delta(\mathbf{u}_L)$  est appelé la fréquence du mode  $\mathbf{u}_L$ .

À noter que ces problèmes d'optimisation ont une solution sous forme analytique lorsque l'opérateur de variation est une forme Hermitienne semi-définie positive [2] :

**Théorème 1.** Si  $\Delta(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^* \mathbf{M} \mathbf{x}$  avec  $\mathbf{M}$  Hermitienne semi-définie positive, alors les  $(\Delta, \mathbf{Q})$ -MFGs sont obtenus par la résolution du problème de valeurs propres généralisé suivant :

$$\mathbf{M} \mathbf{u}_L = \lambda_L \mathbf{Q} \mathbf{u}_L, \quad (2)$$

avec  $\|\mathbf{u}_L\|_{\mathbf{Q}} = 1$ . Les modes de Fourier sont donc les vecteurs propres, et les fréquences sont les valeurs propres.

Maintenant que nous avons accès à une définition de mode de Fourier sur le graphe, nous pouvons généraliser la TFG :

**Définition 2** (Transformée de Fourier sur Graphe). La  $(\Delta, \mathbf{Q})$ -transformée de Fourier sur graphe ( $(\Delta, \mathbf{Q})$ -TFG) d'un signal  $\mathbf{x}$  obtenue par projection orthogonale de  $\mathbf{x}$  sur les  $(\Delta, \mathbf{Q})$ -MFGs :

$$\hat{\mathbf{x}}(l) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_l \rangle_{\mathbf{Q}}.$$

Sous forme matricielle, nous obtenons l'opérateur de Fourier  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{F} \mathbf{x}$  et son inverse  $\mathbf{x} = \mathbf{F}^{-1} \hat{\mathbf{x}}$  avec :

$$\mathbf{F} = \mathbf{U}^* \mathbf{Q} \quad \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{U}. \quad (3)$$

Cette définition conserve le théorème de Parseval puisque nous obtenons  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbf{Q}} = \langle \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}} \rangle_{\mathbf{I}}$ .

#### 3.3 Filtres sur Graphe

Pour généraliser les filtres sur graphes, nous introduisons une matrice que nous nommons la  $(\Delta, \mathbf{Q})$ -Matrice Fondamentale du graphe :

$$\mathbf{Z} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{\Lambda} \mathbf{F},$$

avec  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_0, \dots, \lambda_{N-1})$ . De fait, cette matrice est diagonalisée par la matrice de l'opérateur de Fourier, et ses valeurs propres sont les fréquences du graphe. Lorsque  $\Delta(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^* \mathbf{M} \mathbf{x}$ , nous obtenons alors  $\mathbf{Z} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{M}$ . Un corollaire est alors que

pour toute variation  $\Delta$ , qu'elle soit Hermitienne semi-définie positive ou non, la matrice  $\mathbf{M} = \mathbf{QZ}$  définit une variation  $\Delta_{\mathbf{M}}$  telle que la  $(\Delta, \mathbf{Q})$ -TFG et la  $(\Delta_{\mathbf{M}}, \mathbf{Q})$ -TFG sont identiques.

Plusieurs définitions de filtres sur graphes peuvent alors être proposées (cf. [2]), la plus courante étant la suivante :

**Définition 3** (Filtre sur Graphe). *Un  $(\Delta, \mathbf{Q})$ -Filtre sur Graphe  $((\Delta, \mathbf{Q})$ -FG) est un opérateur linéaire polynomial en la  $(\Delta, \mathbf{Q})$ -matrice fondamentale  $\mathbf{H} = \sum_k h_k \mathbf{Z}^k$ .*

## 4 Applications

### 4.1 Unification de l'État de l'Art

L'état de l'art de la transformée de Fourier sur graphe propose deux approches principales : celle basée sur le Laplacien combinatoire [10], et celle basée sur le *graph shift* [8]. Dans les deux cas, l'espace des signaux sur graphes est supposé équipé du produit scalaire usuel ( $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ ), et la TFG est construite sur les vecteurs propres suivants :

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_l = \lambda_l \mathbf{u}_l \quad \mathbf{L}\mathbf{u}_l = \lambda_l \mathbf{u}_l$$

Cependant, dans nombre d'applications, supposer que les nœuds du graphes sont tous d'égale importance ( $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ ) induit des biais. C'est en particulier le cas dans un contexte de diffusion ou marche aléatoire, où l'opérateur de marche aléatoire est central :  $\mathcal{T} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}$ , et dont les vecteurs propres permettent d'identifier les biais :

$$\mathcal{T}\mathbf{u}_l = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{u}_l = (\mathbf{I} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{L})\mathbf{u}_l = \lambda_l \mathbf{u}_l$$

Dès lors, la TFG est identique pour les deux choix classiques de variation du TSG si le produit scalaire considéré est basé sur le degré :  $\mathbf{Q} = \mathbf{D}$ . Dès lors qu'un phénomène de diffusion ou de marche aléatoire est à l'œuvre, on privilégiera alors en première approche  $\mathbf{Q} = \mathbf{D}$ , et la question du choix entre le *graph shift* et le Laplacien combinatoire n'aura pas d'influence. La  $(\mathbf{L}, \mathbf{D})$ -TFG est alors dite basée sur le *Laplacien de Marche Aléatoire*, car  $\mathbf{Z} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{L}$  est le Laplacien de marche aléatoire.

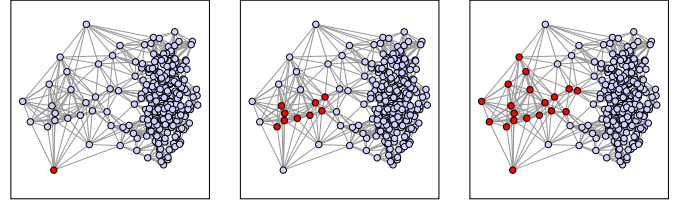
À noter que le Laplacien normalisé  $\mathbf{D}^{-1/2}\mathbf{L}\mathbf{D}^{-1/2}$  n'est en général pas un opérateur désirable, de par son mode de Fourier de fréquence 0 (composante continue) non constant. De plus, ses vecteurs propres sont obtenus par multiplication par  $\mathbf{D}^{1/2}$  des vecteurs propres du Laplacien de marche aléatoire, les valeurs propres étant identiques. La  $(\mathcal{L}, \mathbf{I})$ -TFG et la  $(\mathbf{L}, \mathbf{D})$ -TFG produisent alors le même résultat si le signal est prémultiplié par  $\mathbf{D}^{1/2}$  dans le premier cas, opération que l'on retrouvera dans les *zeroDC GraphBiOr Filterbanks* [6].

### 4.2 Filtres Bilatéraux

En traitement d'images, les filtres bilatéraux sont des filtres de débruitage classiques dont la sortie est :

$$y_{i,j} = \frac{1}{1 + d_{i,j}} \left( x_{i,j} + \sum_{k,l} w_{(i,j),(k,l)} x_{k,l} \right),$$

où  $w_{(i,j),(k,l)}$  est un produit de la similarité des positions  $(i, j)$  et  $(k, l)$  des deux pixels, et de la similarité des intensités des deux pixels, et  $d_{i,j}$  la somme sur  $k, l$  de ces poids. Cette équation



(a)  $(\mathbf{L}, \mathbf{I})$ -TFG

(b)  $(\mathcal{L}, \mathbf{I})$ -TFG

(c)  $(\mathbf{L}, \mathbf{D})$ -TFG

FIGURE 1 – Deux clusters de points en 2D. Un noyau Gaussien de la distance entre tout couple de points est utilisé comme pondération des arêtes. Les trois approches utilisent k-means sur le deuxième mode de Fourier (ou les deux premiers dans le cas de  $(\mathcal{L}, \mathbf{I})$ ). La partition obtenue est représentée par la couleur des nœuds.

peut être réécrite sous forme matricielle :  $\mathbf{y} = (\mathbf{I} + \mathbf{D})^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = [\mathbf{I} - (\mathbf{I} + \mathbf{D})^{-1}\mathbf{L}]\mathbf{x}$ , avec  $\mathbf{A}$  la matrice d'adjacence collectant les poids. Il s'agit d'un filtre sur graphe basé sur la  $(\mathbf{L}, \mathbf{I} + \mathbf{D})$ -TFG :  $\mathbf{y} = (\mathbf{I} - \mathbf{Z})\mathbf{x}$ . L'interprétation spectrale est donnée par  $\hat{y}(l) = (1 - \lambda_l)\hat{x}(l)$  : la composante continue ( $\lambda_0 = 0$ ) n'est pas modifiée, et plus  $\lambda_l$  est proche de 1, plus la fréquence correspondante est atténuée. On observe en pratique que la fréquence maximale est supérieure à 1, mais d'autant plus proche de 1 que la taille de l'image est grande, permettant de conclure à un filtre passe-bas au sens de la  $(\mathbf{L}, \mathbf{I} + \mathbf{D})$ -TFG.

### 4.3 Clustering Spectral

L'objectif est de partitionner les nœuds d'un graphe en fonction de leur connectivité : les nœuds d'une même classe devront être fortement connectés, mais peu connectés avec les nœuds d'une classe différente. Il s'agit alors de minimiser la pondération des coupes dans le graphe définies par les arêtes inter-classes :

$$(\Delta, \mathbf{Q})\text{-Ncut}(\{\mathcal{V}_c\}_c) = \sum_c \Delta(\mathbf{h}_c^{(\mathbf{Q})}) \quad \mathbf{h}_c^{(\mathbf{Q})} = \frac{\mathbf{1}_{\mathcal{V}_c}}{\|\mathbf{1}_{\mathcal{V}_c}\|}$$

Minimiser cette coupe normalisée revient alors à minimiser les variations des indicatrices normalisées de la partition. Le cas classique des coupes non normalisées est alors obtenu avec l'approche par Laplacien combinatoire ( $\mathbf{M} = \mathbf{L}$  et  $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ ). Cependant, ce cas est sensible aux nœuds quasi isolés puisque les isoler dans une partition donnera une coupe avec un poids faible. Intuitivement, une coupe doit être un bon candidat si son poids est sensiblement plus faible que la somme des poids (degrés) des nœuds la composant, ce que les indicatrices normalisées concrétisent.

Cette propriété s'observe expérimentalement, avec l'approche par Laplacien de marche aléatoire donnant de meilleurs résultats dans le cas de 2 groupes de densité différente (voir figure 1).

### 4.4 Réseaux de Capteurs

Dans le cadre d'un réseau de capteurs irrégulièrement, voire non-uniformément, distribués, considérer que les capteurs sont tous d'égale importance induit des biais liés à la réalisation de

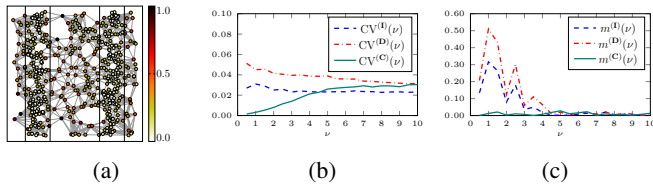


FIGURE 2 – Approximation de l'énergie de modes de Fourier de fréquence  $\nu$  horizontalement, et  $0$  verticalement. (a) aire des cellules de Voronoï, (b) coefficient de variation  $c^{(Q)}$  de l'énergie approchée, et (c) déviation maximale  $m^{(Q)}$  de l'énergie normalisée (cf [2] pour les détails).

cette distribution [4] : Les capteurs dans une région de faible densité représentent de plus larges portions de l'espace. Cette remarque est importante dès lors qu'on voudra s'appuyer sur une bonne approximation de l'énergie du signal mesuré.

En particulier, une manière d'approximer cette énergie pour un espace 2D, est de calculer l'aire de la cellule de Voronoï de chaque capteur. Pondérer l'énergie du signal en chaque nœud par cette aire revient alors à calculer l'énergie du signal 2D constant par morceau (sur le diagramme de Voronoï du réseau). On appellera *norme de Voronoï* cette norme, et on obtiendra  $Q = C$ . Expérimentalement, nous pouvons alors observer une bonne approximation de l'énergie de modes de Fourier 2D, particulièrement aux basses fréquences (voir figure 2). La question de l'opérateur de variation reste cependant ouverte.

#### 4.5 Échantillonnage de Signaux

L'état de l'art de l'échantillonnage d'un graphe propose de sélectionner les nœuds permettant de reconstruire des signaux passe-bas de bande la plus large possible. Cependant, cet état de l'art ne considère que nœuds d'égale importance ( $Q = I$ ). Dans [3], nous proposons d'adapter [1] à un produit scalaire quelconque. Cette généralisation permet alors une plus grande flexibilité dans le choix de l'importance des nœuds.

À des fins d'illustration, prenons le contexte de la section précédente d'un réseau de capteur (uniformément distribués). Notre objectif est alors de sélectionner un sous-ensemble des nœuds permettant de reconstruire le plus fidèlement possible un mode de Fourier 2D. Notre objectif est donc de minimiser l'erreur obtenue après sous-échantillonnage et reconstruction, au sens de la norme de Voronoï. Pour cette expérience, nous prenons la pondération classique utilisant un noyau Gaussien de la distance euclidienne entre les nœuds, et la variation  $M = L$ . La figure 3 montre qu'excepté pour la fréquence la plus basse, choisir  $Q = C$  permet d'obtenir une meilleure erreur de reconstruction.

Cette expérience montre qu'il est possible d'adapter finement le traitement du signal sur graphe à l'application.

## 5 Conclusion

La transformée de Fourier paramétrique que nous proposons permet d'adapter la décomposition spectrale de nos signaux sur

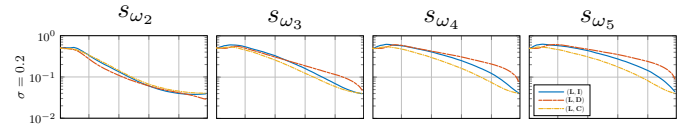


FIGURE 3 – Énergie au sens de  $C$  de l'erreur de reconstruction d'un signal continu  $s_{\omega_k}$  ayant  $k$  oscillations sinusoïdales sur l'espace mesuré, avec un bruit gaussien additif de variance  $\sigma$ .

graphe à l'application. En particulier, l'importance des nœuds d'un graphe pour l'analyse des signaux qu'il supporte est rarement uniforme en pratique, et les applications présentées ici montrent que de meilleures analyses sont possibles en adaptant le produit scalaire de l'espace des signaux à l'application. Ce cadre méthodologique ouvre de nombreuses perspectives, certaines ayant été proposées récemment. On citera les banques de filtres pour les graphes arbitraires [7], ou la compression d'image dirigée par la perception [5]. Nos futurs travaux inclurons l'étude de l'influence des éléments diagonaux et non diagonaux de la matrice de produit scalaire  $Q$ , ou la relation entre  $\Delta$  et  $\Delta_M$  lorsque  $\Delta$  n'est pas une forme quadratique.

## Références

- [1] A. Anis, A. Gadde, and A. Ortega. Efficient Sampling Set Selection for Bandlimited Graph Signals Using Graph Spectral Proxies. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 64(14) :3775–3789, July 2016.
- [2] B. Girault, A. Ortega, and S. S. Narayanan. Irregularity-Aware Graph Fourier Transforms. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 66(21) :5746–5761, Nov. 2018.
- [3] B. Girault, A. Ortega, and S. S. Narayanan. Graph Vertex Sampling with Arbitrary Graph Signal Hilbert Spaces. In *ICASSP 2020 - 2020 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, pages 5670–5674. IEEE, May 2020.
- [4] S. Kurras, U. Luxburg, and G. Blanchard. The f-Adjusted Graph Laplacian : a Diagonal Modification with a Geometric Interpretation. In E. P. Xing and T. Jebara, editors, *Proceedings of the 31st International Conference on Machine Learning*, volume 32 of *Proceedings of Machine Learning Research*, pages 1530–1538, Beijing, China, 22–24 Jun 2014. PMLR.
- [5] K.-S. Lu, A. Ortega, D. Mukherjee, and Y. Chen. Perceptually inspired weighted mse optimization using irregularity-aware graph fourier transform. In *2020 IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)*, pages 3384–3388, 2020.
- [6] S. K. Narang and A. Ortega. Compact Support Biorthogonal Wavelet Filterbanks for Arbitrary Undirected Graphs. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 61(19) :4673–4685, Oct. 2013.
- [7] E. Pavez, B. Girault, A. Ortega, and P. A. Chou. Two channel filter banks on arbitrary graphs with positive semi definite variation operators. *arXiv :2203.02858*, 2022.
- [8] A. Sandryhaila and J. M. F. Moura. Discrete Signal Processing on Graphs : Frequency Analysis. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 62(12) :3042–3054, June 2014.
- [9] S. Sardellitti, S. Barbarossa, and P. D. Lorenzo. On the Graph Fourier Transform for Directed Graphs. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 11(6) :796–811, 2017.
- [10] D. I. Shuman, S. K. Narang, P. Frossard, A. Ortega, and P. Vandergheynst. The Emerging Field of Signal Processing on Graphs : Extending High-Dimensional Data Analysis to Networks and Other Irregular Domains. *IEEE Signal Processing Magazine*, 30(3) :83–98, 2013.