

Résolubilité du positionnement GNSS multi-agents

Colin CROS^{1,2}, Christophe PRIEUR¹, Pierre-Olivier AMBLARD¹, Jean-François DA ROCHA²

¹Univ. Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble-INP, GIPSA-Lab, F-38000 Grenoble

²Telespazio FRANCE, F-31100 Toulouse

colin.cros@telespazio.com, christophe.prieur@gipsa-lab.fr
pierre-olivier.amblard@cnrs.fr, jeanfrancois.darocha@telespazio.com

Résumé – Les conditions pour qu’un problème de positionnement par satellites puisse être résolu restent encore mal comprises dès lors qu’il y a plus d’un récepteur coopérant. Cet article présente un critère pour qu’un tel problème soit résoluble dans le cas où les récepteurs peuvent mesurer leurs distances, leurs écarts de biais et leurs pseudo-distances. Nous introduisons pour cela les structures *mixtes* dont nous étudions la rigidité. Notre critère se base sur une décomposition de ces structures et rend la résolubilité de ces problèmes bien plus intelligible.

Abstract – The conditions for a satellite positioning problem with more than one cooperating receiver to be solvable are still poorly understood. In this paper, we provide a criterion to assess this solvability assuming that the receivers can measure their distances, bias differences and pseudo-ranges. To do so, we introduce the notion of *combined* frameworks and focus on their rigidity. Our criterion relies on a decomposition of these frameworks and makes the solvability problem far more intelligible.

1 Introduction

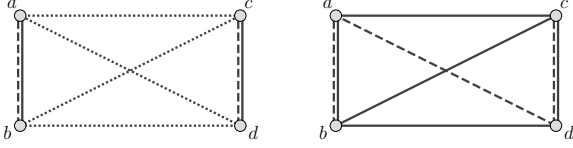
Les systèmes de navigation par satellites, ou GNSS, permettent de se localiser dans l’espace et le temps à partir de mesures de pseudo-distances. Chaque GNSS possède sa propre constellation de satellites synchronisés. Dans ces systèmes, les satellites et les récepteurs, que l’on nommera *agents*, sont représentés par leur position $x \in \mathbb{R}^d$ et leur biais d’horloge $\beta \in \mathbb{R}$ par rapport à une référence. On s’intéresse à la résolubilité d’un problème de positionnement d’un groupe d’agents à partir de trois types de mesures que l’on supposera parfaites : des distances $d_{uw} = \|x_u - x_w\|$, des écarts de biais $\Delta_{uw} = \beta_u - \beta_w$ (correspondant à des synchronisations d’horloge) et des pseudo-distances $\rho_{uw} = d_{uw} - \Delta_{uw}$. S’il n’y a qu’un seul récepteur ce problème est bien connu : il faut au moins $3+k$ satellites si l’on utilise k constellations [6, 3]. En revanche pour un réseau de récepteurs coopérant, à notre connaissance, la question reste ouverte et fait l’objet de cet article. Pour cela, on associe à ces problèmes une *structure mixte* décrivant la géométrie des agents et les mesures qui les lient. Si en contraignant les mesures, les positions des agents sont fixées, alors la structure est dite *rigide*, dans ce cas les positions admissibles sont identifiables à partir des mesures. Évidemment, l’identification n’est possible qu’à une classe d’équivalence prêt, appelée *congruence* : appliquer une isométrie aux positions ou une translation aux biais ne change pas les mesures. Dans le cas des GNSS, la levée de l’ambiguïté se fait à l’aide d’agents de positions et biais connus : les satellites.

Une structure d -dimensionnelle mixte est un quadruplet composé de trois graphes $G_d = (V, E_d)$, $G_b = (V, E_b)$ et $G_p = (V, E_p)$ où V dénote l’ensemble des sommets et les E_X les en-

sembles d’arêtes ou arcs, et d’une application p , appelée configuration, associant à chaque agent $u \in V$ sa représentation $p(u) = (x_u^\top \ \beta_u)^\top \in \mathbb{R}^{d+1}$. Une arête $uw \in E_d$ contraint la distance d_{uw} entre les agents u et w , une arête $uw \in E_b$ contraint leur écart de biais Δ_{uw} et un arc $uw \in E_p$ contraint la pseudo-distance ρ_{uw} de u vers w . G_d et G_b sont des graphes non orientés mais G_p est orienté car la pseudo-distance est une contrainte asymétrique contrairement à la distance ou à l’écart de biais. Afin d’alléger les notations, les trois graphes sont rassemblés en un seul $\Gamma = (V, E_d, E_b, E_p)$, de plus, comme contraindre la pseudo-distance de u vers w et celle de w vers u revient à contraindre leur distance et leur biais, on supposera sans perte de généralité que G_p ne contient aucune paire d’arcs opposés.

Une structure mixte (Γ, p) est rigide s’il n’est pas possible d’obtenir une configuration non congruente, par un déplacement continu des agents qui satisfasse les contraintes à chaque instant. Si une structure n’est pas rigide, alors il existe une infinité de classes de configurations vérifiant les contraintes, le problème de positionnement sous-jacent est donc insoluble. *A priori*, le concept de rigidité dépend de la configuration donc de la position des points (que l’on cherche justement à identifier), cependant pour les configurations génériques, c.-à-d. les configurations dont les coordonnées des points ne sont racines d’aucun polynôme à coefficients entiers, nous verrons que la rigidité ne dépend que de leur graphe. Notons que l’ensemble des structures non génériques est négligeable. En conséquence, si une structure est rigide, le problème de positionnement sous-jacent peut admettre plusieurs solutions mais elles seront *espacées*, dans ce cas on dira que le problème est résoluble.

Le résultat principal de ce papier énonce que la rigidité d’une



(a) Graphe mixte Γ . Les lignes en pointillés, pleines et discontinues représentent respectivement E_p , E_d et E_b .

(b) Répartition de Γ en un graphe G_r rigide au sens euclidien (traits pleins) et un graphe G_c connecté (traits discontinus).

FIGURE 1 – Application du théorème 1 à une structure mixte rigide dans le plan. La répartition de E_p utilisée est $E_r = \{ac, bc, bd\}$ et $E_c = \{ad\}$.

structure générique mixte dépend uniquement de son graphe. Plus précisément, il faut que l'ensemble E_p des arcs associés à des pseudo-distances soit répartitionnable entre le graphe des distances et celui des biais pour former un graphe rigide au sens euclidien, notion définie dans la partie 2, et un graphe connecté. Par répartition de E_p , on désigne un couple d'ensembles (E_1, E_2) tel que $E_1 \cup E_2 = E_p$ et $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ (à la différence d'une partition un des deux ensembles peut être vide).

Théorème 1. Soit (Γ, p) une structure mixte générique.

(Γ, p) est rigide si et seulement si, il existe une répartition (E_r, E_c) des arcs de E_p telle que le graphe $G_r = (V, E_d \cup E_r)$ soit rigide au sens euclidien et le graphe $G_c = (V, E_b \cup E_c)$ soit connecté.

La figure 1 illustre ce théorème avec un exemple simple. Intuitivement, le graphe G_r gèle les positions des points figeant leur déplacement et le graphe G_c conserve les écarts entre les biais. Le résultat repose sur l'étude du rang de la matrice de rigidité des structures mixtes définie dans la partie 2. La preuve du théorème est ébauchée dans la partie 3 puis, des applications inspirées des GNSS sont présentées dans la partie 4.

2 Préliminaires

Historiquement la rigidité est un concept mécanique développé pour étudier la stabilité des structures en treillis. Ces structures, que nous appellerons euclidiennes, sont constituées de nœuds reliés par des barres qui contraignent leurs distances (distances euclidiennes, d'où le nom). Elles sont dites rigides s'il n'est pas possible de les déformer continument en préservant la longueur des barres. Ainsi, un triangle est rigide au sens euclidien alors qu'un carré ne l'est pas car il peut être aplati continument en un losange. Les structures euclidiennes ont été largement étudiées et l'on sait notamment que leur rigidité ne dépend génériquement, c.-à-d. pour les structures génériques, que de leur graphe [2].

Pour les structures génériques, mixtes comme euclidiennes, la rigidité est liée à un concept plus fort appelé rigidité infinitésimale qui correspond à une étude des contraintes au premier

ordre, voir par exemple [4]. On définit une vitesse instantanée q comme une application de V dans \mathbb{R}^{d+1} qui à un agent u associe un vecteur vitesse $q(u) = (v_u^\top \ \alpha_u)^\top$. Une vitesse est admissible pour une contrainte si elle la préserve à l'ordre 1, c.-à-d. si elle vérifie l'équation :

$$\begin{aligned} (x_u - x_w) \cdot (v_u - v_w) &= 0 & \text{si } uw \in E_d \\ \alpha_u - \alpha_w &= 0 & \text{si } uw \in E_b \\ \frac{x_u - x_w}{\|x_u - x_w\|} \cdot (v_u - v_w) + \alpha_w - \alpha_u &= 0 & \text{si } uw \in E_p \end{aligned} \quad (1)$$

Elle est admissible pour la structure si elle est admissible pour toutes les contraintes. Ces contraintes linéaires sont rassemblées dans une matrice appelée matrice de rigidité de la structure mixte $M(\Gamma, p)$, dont les vitesses admissibles forment le noyau. Cette matrice a $m = |E_d| + |E_b| + |E_p|$ lignes et $n(d+1)$ colonnes où $n = |V|$ est le nombre d'agents. Afin qu'elle reste définie pour les structures non génériques et par soucis d'homogénéité, on multiplie les lignes associées à E_b et E_p par la distance entre les points. Les vitesses correspondant à des rotations et des translations de la structure sont toujours admissibles et sont dites triviales, elles forment un espace de dimension $\binom{d+1}{2} + 1$. En conséquence, le rang de la matrice de rigidité est borné par $S(n, d)$:

$$S(n, d) = \begin{cases} n(d+1) - \binom{d+1}{2} - 1 & \text{si } n \geq d+1 \\ \frac{(n-1)(n+2)}{2} & \text{si } n \leq d \end{cases} \quad (2)$$

Une structure est dite infinitésimalement rigide si ce rang maximal est atteint, c.-à-d. $\text{rg } M(\Gamma, p) = S(n, d)$. Pour les structures euclidiennes, les mineurs de la matrice de rigidité sont des polynômes à coefficients entiers appliqués aux coordonnées des points [2]. Par définition de la généricité, leur nullité est une propriété générique du graphe tout comme la rigidité infinitésimale des structures euclidiennes. Ce résultat s'étend aux structures mixtes à l'aide du lemme de théorie des corps suivant qui se montre par récurrence.

Lemme 2. Soit $K = \mathbb{Q}[X_1^{(1)}, \dots, X_n^{(d)}]$ le corps des fractions rationnelles à nd variables. Pour chaque paire de points (i, j) , on définit la fonction $D_{i,j} : \mathbb{R}^{nd} \rightarrow \mathbb{R}$ qui associe à une configuration la distance entre les points i et j .

L'extension algébrique $L = K[D_{1,2}, D_{1,3}, \dots, D_{n-1,n}]$ est une extension de corps d'ordre 2^m où $m = n(n-1)/2$ est le nombre de paires. De plus, les 2^m produits des $D_{i,j}$ forment une base de L vu comme un K -espace vectoriel.

Comme les mineurs de la matrice de rigidité mixte appartiennent à L , ce lemme implique que leur nullité est aussi une propriété générique du graphe. Par conséquent, la rigidité infinitésimale des structures mixtes est une propriété générique du graphe et de plus, l'inversion d'un arc dans G_p , c.-à-d. remplacer uw par wu , ne change pas le rang de la matrice. On peut donc voir G_p génériquement comme un graphe non orienté.

Pour les structures euclidiennes, la rigidité infinitésimale implique la rigidité et ces deux concepts sont génériquement équivalents [2]. Pour ces structures le rang maximal est $S_e(n, d) = S(n, d) - n + 1$. Ces deux résultats s'étendent aux structures

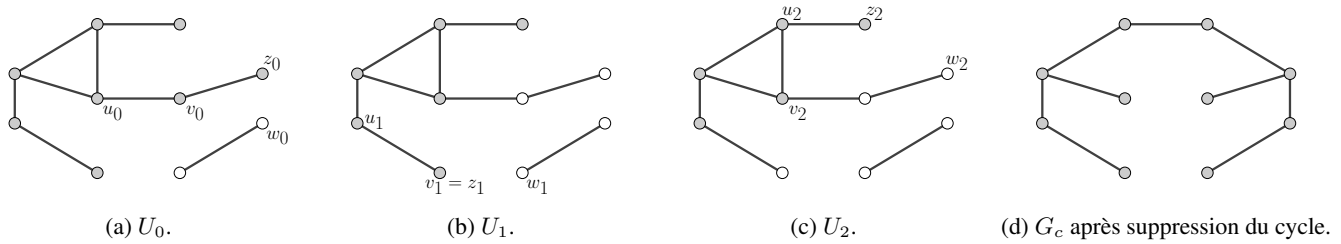


FIGURE 2 – Exemple de suppression d’un cycle dans G_c . Les 3 premières figures présentent les composantes U_i et la dernière le graphe G_c obtenu en fin de processus. Les sommets dans U_i sont gris et ceux de U_i^c blancs. Dans la phase de remontée, deux échanges sont réalisés d’abord u_2v_2 et w_2z_2 puis u_0v_0 et w_0z_0 .

mixtes avec les mêmes arguments. En conséquence, pour étudier la rigidité générique des structures mixtes, on s’intéresse au rang de leur matrice de rigidité. Plus particulièrement, on s’intéressera au rang d’une famille de contraintes, c.-à-d. celui des lignes associées dans la matrice de rigidité de n’importe quelle structure générique ayant ce graphe. On parlera ainsi d’*indépendance de contraintes* si leurs lignes sont libres et d’*indépendance de graphe* si toutes les contraintes sont libres. Pour les structures euclidiennes, on utilisera les mêmes dénominations en leur faisant simplement suivre la mention “*au sens euclidien*” signifiant que l’on considère les lignes dans la matrice de rigidité euclidienne.

3 Démonstration du résultat principal

On commence par montrer le sens retour du théorème 1. Pour cela, on utilise le lemme ci-dessous.

Lemme 3. *Soient (Γ, p) une structure mixte et (G_r, G_c) obtenus à partir d’une répartition de E_p . Si G_r est indépendant au sens euclidien et G_c est une forêt couvrante, alors Γ est indépendant.*

Éléments de démonstration. On considère un vecteur ω engendrant une combinaison nulle des lignes, c.-à-d. $M(\Gamma, p)^T \omega = 0$. On le décompose en sa composante issue de G_r , ω_r et celle de G_c , ω_c . Si l’une est nulle, l’autre aussi car G_r et G_c sont indépendants. On montre ensuite que ω_c est nul en exploitant la structure de forêt de G_c . On ordonne les arêtes de G_c de manière à ce que l’arête i associée à $\omega_c(i)$ ne soit reliée au plus qu’à une arête d’indice supérieur. On montre ensuite par récurrence que $\omega_c(i)$ s’exprime comme combinaison linéaire des $\omega_c(j)$ avec $i < j$. On en déduit que la dernière valeur est nulle puis par une récurrence immédiate que $\omega_c = 0$. \square

En extrayant un sous-graphe minimalement rigide au sens euclidien de G_r et un arbre couvrant de G_c , on déduit qu’il existe un sous-graphe indépendant de Γ . Ce graphe indépendant a $S_e(n, d) + n - 1 = S(n, d)$ arêtes : il est infinitésimalement rigide donc rigide, et *a fortiori*, Γ aussi, ce qui montre le sens retour du théorème 1.

Le sens direct est plus délicat car toutes les répartitions de E_p ne conviennent pas forcément. Il repose sur les deux lemmes suivants, le premier étant analogue au lemme précédent.

Lemme 4. *Soient (Γ, p) une structure mixte et (G_r, G_c) obtenus à partir d’une répartition de E_p . Si G_c est connecté avec un cycle et si les lignes de la matrice de rigidité euclidienne de G_r engendrent celles de G_c , alors Γ est dépendant.*

Éléments de démonstration. On considère sans perte de généralité que G_r est indépendant et $G_c = G'_c + \{uw\}$ avec G'_c un arbre couvrant. C’est ensuite un corollaire du lemme 3 appliqué à G_r et G'_c . \square

On en déduit le lemme suivant qui nous permettra de montrer le sens retour du résultat principal.

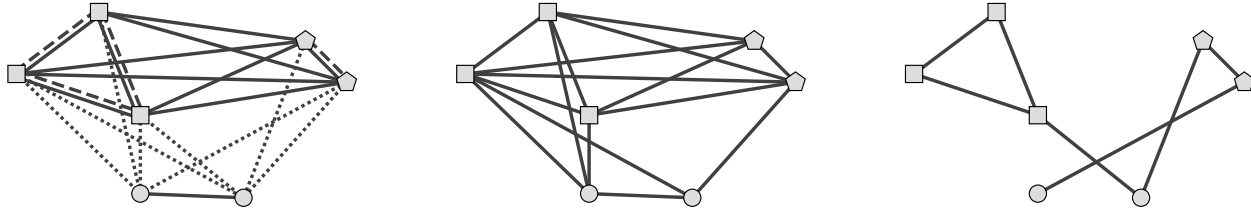
Lemme 5. *Soient (Γ, p) une structure mixte et (G_r, G_c) obtenus à partir d’une répartition de E_p . On suppose de plus Γ indépendant et G_r minimalement rigide au sens euclidien. S’il existe une composante $U \subset V$ connectée dans G_c contenant un cycle, alors il existe $w \in E_c$ et $wz \in E_r$ avec $u, v, z \in U$ et $w \in U^c$ telles qu’en échangeant ces deux arêtes, c.-à-d. en retirant wv de E_c et en l’ajoutant à E_r et inversement pour wz , G_r soit toujours rigide.*

Nous pouvons à présent montrer le résultat principal.

Démonstration du Théorème 1. Le sens retour a déjà été évoqué comme corollaire du lemme 3. Pour le sens direct on considère sans perte de généralité que Γ est minimalement rigide. On démarre avec un graphe G_r minimalement rigide au sens euclidien, c’est possible sinon Γ ne serait pas rigide. Le graphe G_c résultant a $n - 1$ arêtes. S’il n’a pas de cycle, il est nécessairement connecté. S’il en a, on les supprime en répétant la procédure suivante composée d’une phase de descente (P.D.) puis de remontée (P.R.) qui en supprime un :

P.D. On considère U_0 la composante connectée d’un cycle \mathcal{C} . D’après le lemme précédent, on peut échanger une arête u_0v_0 de G_c restreint à U par une arête w_0z_0 de G_r reliant U_0 à U_0^c . Si u_0v_0 appartient à un cycle (pas forcément \mathcal{C}), on s’arrête, sinon, on réitère le processus avec U_{i+1} la composante de \mathcal{C} dans $G_c \setminus \{u_i v_i\}$ restreint à U_i jusqu’à aboutir à une arête $u_i v_i$ appartenant à un cycle.

P.R. On échange les dernières arêtes $u_i v_i$ et $w_i z_i$. Puis, tant que l’échange crée un nouveau cycle dans G_c restreint à U_0 , on considère le plus grand j tel que ce nouveau cycle soit dans la restriction de G_c à U_j mais pas celle



(a) Graphe mixte Γ . Les lignes en pointillés, pleines et discontinues représentent respectivement E_p , E_d et E_b .

(b) Graphe des contraintes de distance G_r . Ce graphe est rigide au sens euclidien.

(c) Graphe des contraintes de synchronisation G_c . Ce graphe est connecté.

FIGURE 3 – Décomposition d’une structure mixte rigide issue d’une situation GNSS bi-constellation avec deux récepteurs coopérant : leur distance est connue. Les récepteurs sont représentés par les cercles, une constellation par les carrés et l’autre par les pentagones.

à U_{j+1} et on inverse $u_j v_j$ et $w_j z_j$. On vérifie que cette procédure assure qu’il n’y ait aucun nouveau cycle dans U_i pour $i \geq j$. À la fin, on a bien supprimé un cycle de G_c .

Ces deux phases sont illustrées sur la figure 2. □

4 Applications

Le premier exemple est naturellement le positionnement d’un récepteur GNSS. Les positions des satellites étant connues, on connaît, *a fortiori*, les distances entre eux, donc le sous-graphe de G_d associé aux satellites est complet. De même, les satellites d’une même constellation étant synchronisés, les sous-graphes de G_b associés à chaque constellation sont également complets. Pour que le graphe mixte soit rigide, il faut une contrainte de pseudo-distance par constellation pour que G_c soit connecté et $d = 3$ contraintes de pseudo-distances pour que G_r soit rigide. On retrouve bien la condition de $3 + k$ satellites.

Considérons à présent un second récepteur à distance connue du premier, en pratique elle pourrait être mesurée ou contrainte. La figure 3 présente un exemple de structure mixte issue d’une telle configuration en bi-constellation. Chaque récepteur utilise les 2 constellations mais ne mesure que 4 pseudo-distances, aucun n’est capable de se positionner sans coopération. La distance imposée permet de rigidifier la structure : le graphe de la structure mixte est bien décomposable en un graphe G_r rigide au sens euclidien (fig. 3b) et un graphe connecté G_c (fig. 3c).

Cet exemple simpliste peut bien sûr être complexifié avec davantage de récepteurs et les deux autres types de contraintes. Par exemple, on vérifie que remplacer la contrainte de distance entre les deux récepteurs par un biais préserve la rigidité.

5 Conclusion

Dans cet article, nous avons relié la résolubilité des problèmes de positionnement coopératifs à la recherche de sous-structures euclidiennes rigides. La preuve du théorème 1 fournit un algorithme permettant de vérifier la rigidité, et donc la

résolubilité d’un tel problème, en ne considérant que des tests de rigidité sur des graphes euclidiens. Ces tests font l’objet de nombreux travaux, en particulier, les graphes euclidiens rigides sont parfaitement identifiés jusqu’en dimension 2 [5]. Notre théorème facilite également la compréhension de la rigidité des structures mixtes : une structure mixte rigide est la combinaison d’une sous-structure euclidienne rigide et d’une sous-structure connectée. La rigidité ne suffit en revanche pas à attester de l’unicité du problème de positionnement. Il est possible que des configurations non congruentes satisfassent un même ensemble de contraintes, et ce même avec un seul récepteur, voir [7] pour un exemple avec le système de positionnement LORAN ou [1] pour le GPS. Lorsque ce n’est pas le cas et que la solution est unique, la structure est dite totalement rigide, voir par exemple [4]. Nos prochains travaux porteront naturellement sur la caractérisation de cette rigidité totale.

Références

- [1] Johnathan S. Abel and James W. Chaffee. Existence and uniqueness of GPS solutions. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 27(6) :952–956.
- [2] L. Asimow and B. Roth. The rigidity of graphs. *Transactions of the American Mathematical Society*, 245 :279–289.
- [3] Stephen Bancroft. An algebraic solution of the GPS equations. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, AES-21(1) :56–59.
- [4] Bruce Hendrickson. Conditions for unique graph realizations. *SIAM Journal on Computing*, 21 :65–84.
- [5] Bill Jackson. Notes on the rigidity of graphs. In *Levico Conference Notes*, volume 4. Citeseer, 2007.
- [6] Elliott D Kaplan and Christopher Hegarty. *Understanding GPS/GNSS : principles and applications*. Artech house, 2017.
- [7] Ralph O. Schmidt. A new approach to geometry of range difference location. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, AES-8(6) :821–835.