

# Superposition quantique d'ordre causal pour les signaux et systèmes

François CHAPEAU-BLONDEAU

Laboratoire Angevin de Recherche en Ingénierie des Systèmes (LARIS),  
Université d'Angers, 62 avenue Notre Dame du Lac, 49000 Angers, France.

f.chapeau@univ-angers.fr

**Résumé** – Dans le domaine des signaux-systèmes il est possible d'associer ou commuter deux systèmes de traitement (1) et (2), au moyen d'un signal binaire de contrôle, afin de sélectionner parmi deux architectures de traitement, par exemple deux ordonnancements causaux (1)-(2) ou (2)-(1) s'appliquant au signal à traiter. En quantique, une faculté nouvelle réside dans la possibilité de placer le signal de contrôle dans une superposition quantique. On peut réaliser ainsi une superposition de systèmes à la fois dans l'ordre causal (1)-(2) et (2)-(1) pour l'interaction avec le signal à traiter. Ceci donne accès à des associations de systèmes de traitement spécifiquement quantiques, dotées de propriétés nouvelles, inaccessibles aux systèmes isolés ou associés classiquement. Nous présentons ici cette possibilité nouvelle pour le traitement du signal quantique et l'illustrons sur une tâche d'estimation paramétrique à partir d'un signal bruité, en montrant notamment des bénéfices spécifiques comme la capacité d'extraire de l'information avec un signal sonde d'entrée complètement dépolarisé.

**Abstract** – For signals and systems it is possible to associate or switch two processing systems (1) and (2), by means of a binary control signal, so as to select between two processing structures, for example two causal orderings (1)-(2) or (2)-(1) applied to process the signal. In the quantum domain, a novel faculty rests in the possibility of placing the control signal in a quantum superposition. One can realize in this way a superposition of systems simultaneously in the causal order (1)-(2) and (2)-(1) for interacting with the signal to process. This provides access to associations of processing systems specifically quantum, endowed with new properties, inaccessible with isolated or classically associated systems. Here we present this novel possibility for quantum signal processing and illustrate it on a task of parameter estimation from a noisy signal, with specific benefits such as the ability to extract information from a completely depolarized input probe signal.

## 1 Introduction

Classiquement, dans le domaine des signaux-systèmes, il est commun, afin de réaliser sur le signal des traitements élaborés, d'associer différents systèmes, chacun en charge d'une opération spécifique. On peut ainsi associer en série (en cascade) ou en parallèle différents systèmes. De plus, il est possible d'utiliser un signal de contrôle, par exemple un signal binaire, afin de commuter entre deux systèmes ou associations de systèmes établissant le canal de traitement opérant. Les Figs. 1 et 2 montrent de telles associations contrôlées envisageables. Sur la Fig. 1, selon l'état du signal binaire de contrôle  $\rho_c$ , le signal d'entrée  $\rho$  est aiguillé à travers le système (1) ou le système (2). Sur la Fig. 2, selon l'état du signal binaire de contrôle  $\rho_c$ , le signal d'entrée  $\rho$  est aiguillé à travers la cascade des deux systèmes dans l'ordre causal (1)-(2) ou bien (2)-(1).

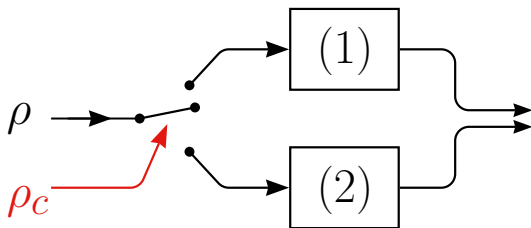


FIGURE 1 – Selon l'état du signal de contrôle  $\rho_c$ , le signal d'entrée  $\rho$  est aiguillé à travers le système (1) ou le système (2).

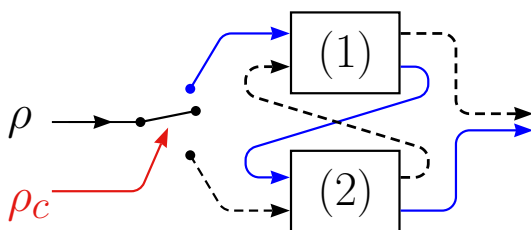


FIGURE 2 – Selon l'état du signal de contrôle  $\rho_c$ , le signal d'entrée  $\rho$  est aiguillé à travers la cascade des deux systèmes dans l'ordre causal (1)-(2) ou bien (2)-(1).

Ce type de formulation “signaux-systèmes” peut être étendue au domaine quantique. En quantique, un signal utile constitué par un vecteur d'état ou plus généralement par un opérateur densité va interagir avec un processus quantique tenant le rôle de système de traitement du signal. Différents systèmes de traitement peuvent être associés, notamment selon l'état d'un signal binaire de contrôle comme sur les Figs. 1 et 2. En quantique, le signal binaire de contrôle peut se réaliser très naturellement au moyen de l'état d'un qubit. Lorsque le qubit de contrôle est dans l'état de base  $|\psi_c\rangle = |0\rangle$ , le signal quantique d'entrée est aiguillé à travers l'une des deux voies de traitement; et lorsque le qubit de contrôle est dans l'autre état de base  $|\psi_c\rangle = |1\rangle$ , le signal d'entrée est aiguillé à travers l'autre voie. Une faculté nouvelle disponible en quantique, et sans équivalent classique, réside dans la possibilité de placer le qubit de contrôle dans l'état superposé  $|\psi_c\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ . On réalise ainsi une superposition quantique des deux voies de traitement. Par exemple sur la Fig. 2, le signal quantique d'entrée  $\rho$  interagit avec les deux systèmes de traitement, à la fois dans l'ordre causal (1)-(2) et dans l'ordre causal (2)-(1). On accède ainsi à des associations de systèmes de traitement spécifiquement quantiques, conduisant à des propriétés nouvelles, inaccessibles aux systèmes isolés ou associés classiquement.

De telles associations quantiques sont d'introduction récente. Elles ont été étudiées notamment dans [1, 2, 3, 4] pour la structure de la Fig. 1, et dans [5, 6, 7, 8, 9] pour celle de la Fig. 2, à la fois dans leurs propriétés de principe et aussi dans leurs mises en œuvre expérimentales [10, 6, 11, 12, 13, 1, 14]. Ici nous présentons cette possibilité nouvelle pour le traitement du signal quantique et analysons certains aspects, puis nous l'illustrons sur une tâche d'estimation paramétrique à partir d'un signal quantique bruité.

## 2 Signaux et systèmes quantiques

Les signaux considérés seront des états quantiques de qubits référés à un espace de Hilbert complexe  $\mathcal{H}_2$  de dimension 2. L'état quantique d'un qubit, d'une façon générale, est dé-

crit par un opérateur densité  $\rho \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$ , qu'il est possible de paramétrer en représentation de Bloch [15] par

$$\rho = \frac{1}{2}(\mathbb{I}_2 + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}), \quad (1)$$

où  $\mathbb{I}_2$  est l'opérateur identité sur  $\mathcal{H}_2$ , et  $\vec{\sigma}$  un vecteur formel assemblant les trois opérateurs de Pauli usuels  $[\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z] = \vec{\sigma}$  de  $\mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$ . Le vecteur de Bloch  $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$  caractérisant l'opérateur densité possède une norme  $\|\vec{r}\| = 1$  pour un état pur, et  $\|\vec{r}\| < 1$  pour un état mélangé.

Un qubit d'entrée interagit avec un processus quantique, comme le système (1) ou (2) sur les Figs. 1–2, qui ici sera constitué par un opérateur unitaire  $U_\xi$  affecté par un bruit quantique  $\mathcal{N}(\cdot)$ , comme représenté sur la Fig. 3.

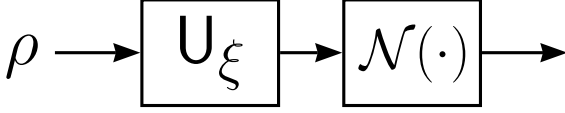


FIGURE 3 – Le signal quantique d'entrée constitué par un opérateur densité  $\rho$  de qubit, interagit avec l'opérateur unitaire  $U_\xi$  affecté par un bruit quantique  $\mathcal{N}(\cdot)$ .

Un opérateur unitaire  $U_\xi$  agissant sur le qubit peut en général être paramétré [15] par

$$U_\xi = \exp\left(-i\frac{\xi}{2}\vec{u} \cdot \vec{\sigma}\right), \quad (2)$$

avec  $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]^T$  un vecteur unitaire de  $\mathbb{R}^3$ , et  $\xi$  un angle de phase dans  $[0, 2\pi[$ . Une telle transformation  $U_\xi$  réalise, sur le vecteur de Bloch  $\vec{r}$  caractérisant l'état du qubit, une rotation dans  $\mathbb{R}^3$  d'axe  $\vec{u}$  et d'angle  $\xi$ . En notant  $U_\xi$  (en italique) la matrice de cette rotation dans  $\mathbb{R}^3$ , l'opérateur unitaire  $U_\xi$  implémente la transformation

$$\rho \mapsto U_\xi \rho U_\xi^\dagger = \frac{1}{2}(\mathbb{I}_2 + U_\xi \vec{r} \cdot \vec{\sigma}). \quad (3)$$

L'opérateur  $U_\xi$  est par exemple réalisable en pratique par un interféromètre agissant sur un photon selon son état de polarisation [16]. La direction  $\vec{u}$  est fixée par l'orientation des polariseurs par rapport au faisceau des photons incidents, l'angle  $\xi$  est le déphasage entre les deux bras de l'interféromètre et constitue souvent une grandeur d'intérêt métrologique à estimer.

Le bruit quantique  $\mathcal{N}(\cdot)$  de la Fig. 3 est un processus non unitaire, qui représente la décohérence ou dégradation des états quantiques causée par leur couplage avec un environnement incontrôlé. Nous considérons ici une famille de bruits quantiques, fréquemment rencontrés avec le qubit, constituée par les bruits de Pauli. Leur action sur l'état d'un qubit, d'opérateur densité  $\rho$ , peut se décrire [15, 17] au moyen de l'opération quantique non unitaire en représentation de Kraus

$$\rho \mapsto \mathcal{N}(\rho) = (1-p)\rho + p\sigma_\ell \rho \sigma_\ell^\dagger. \quad (4)$$

L'indice  $\ell = x, y, z$  identifie l'un des trois opérateurs de Pauli. Ainsi, l'action du bruit quantique de l'Éq. (4) est d'appliquer avec une probabilité  $p$  l'opérateur de Pauli  $\sigma_\ell$  pour altérer l'état du qubit. Quand  $\ell = x$ , le bruit applique l'opérateur  $\sigma_x$  et constitue un bruit de bit-flip ; quand  $\ell = z$ , le bruit applique l'opérateur  $\sigma_z$  et constitue un bruit de phase-flip ; quand  $\ell = y$ , le bruit applique l'opérateur  $\sigma_y$  et constitue un bruit de bit-phase-flip. L'opération linéaire accomplie par l'Éq. (4) est équivalente à une transformation linéaire  $\vec{r} \mapsto N\vec{r}$  du vecteur de Bloch du qubit dans  $\mathbb{R}^3$ , avec  $N$  une matrice réelle  $3 \times 3$  caractérisant le bruit quantique  $\mathcal{N}(\cdot)$ , par exemple

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2p & 0 \\ 0 & 0 & 1-2p \end{bmatrix} \quad (5)$$

pour le bruit de bit-flip.

L'association de la Fig. 3 transforme donc l'état  $\rho$  du qubit d'entrée selon

$$\rho \mapsto (1-p)U_\xi \rho U_\xi^\dagger + p\sigma_\ell U_\xi \rho U_\xi^\dagger \sigma_\ell^\dagger, \quad (6)$$

ou bien

$$\rho \mapsto K_1 \rho K_1^\dagger + K_2 \rho K_2^\dagger \quad (7)$$

qui permet de faire apparaître les deux opérateurs de Kraus  $K_1 = \sqrt{1-p}U_\xi$  et  $K_2 = \sqrt{p}\sigma_\ell U_\xi$  caractérisant le processus bruité de la Fig. 3. Ce processus de la Fig. 3 va constituer une instance des systèmes (1) ou (2) superposés sur la Fig. 2.

### 3 Superposition des processus

Deux processus bruités comme sur la Fig. 3 sont donc mis en superposition quantique selon l'association de la Fig. 2. D'une façon générale, deux processus quantiques (1) et (2), décrits respectivement par les opérateurs de Kraus  $\{K_k^{(1)}\}$  et  $\{K_j^{(2)}\}$ , peuvent être associés selon la structure de la Fig. 2 sous le contrôle d'un qubit de vecteur d'état  $|\psi_c\rangle$  qui, quand  $|\psi_c\rangle = |0_c\rangle$  établit l'ordre causal (1)-(2) et quand  $|\psi_c\rangle = |1_c\rangle$  établit l'ordre (2)-(1). Le processus superposé ainsi constitué est alors décrit [6, 7] par les opérateurs de Kraus

$$K_{jk} = K_j^{(2)} K_k^{(1)} \otimes |0_c\rangle\langle 0_c| + K_k^{(1)} K_j^{(2)} \otimes |1_c\rangle\langle 1_c|. \quad (8)$$

Ce processus superposé, quand il agit sur un signal quantique d'entrée représenté par l'opérateur densité  $\rho$ , en présence d'un qubit de contrôle d'opérateur densité  $\rho_c$ , réalise l'opération quantique bipartite  $\mathcal{S}(\cdot)$  définie [6, 7] par le superopérateur

$$\mathcal{S}(\rho \otimes \rho_c) = \sum_{j,k} K_{jk}(\rho \otimes \rho_c) K_{jk}^\dagger. \quad (9)$$

Nous appliquons maintenant la description générale des Éqs. (8)–(9) lorsque chacun des deux processus (1) et (2) superposés à la Fig. 2 est constitué selon la Fig. 3 avec la paire d'opérateurs de Kraus des Éqs. (6)–(7). Nous nous appuyons sur l'approche de [8] qui traite le cas du bruit quantique dépolarisant, et nous la transposons ici au cas des bruits de Pauli de l'Éq. (4), non traités dans [8]. Le qubit de contrôle est préparé dans l'état superposé général  $|\psi_c\rangle = \sqrt{p_c}|0_c\rangle + \sqrt{1-p_c}|1_c\rangle$ , avec  $p_c \in [0, 1]$ . On obtient alors sur la Fig. 2 en sortie du processus superposé l'état bipartite à deux qubits d'opérateur densité

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\rho \otimes \rho_c) &= \mathcal{S}_{00}(\rho) \otimes [p_c |0_c\rangle\langle 0_c| + (1-p_c) |1_c\rangle\langle 1_c|] \\ &+ \mathcal{S}_{01}(\rho) \otimes \sqrt{(1-p_c)p_c} (|0_c\rangle\langle 1_c| + |1_c\rangle\langle 0_c|). \end{aligned} \quad (10)$$

Dans l'Éq. (10), le superopérateur  $\mathcal{S}_{00}(\cdot)$  de  $\mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$  dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$  est obtenu comme

$$\mathcal{S}_{00}(\rho) = \frac{1}{2}(\mathbb{I}_2 + NU_\xi NU_\xi^\dagger \vec{\sigma}), \quad (11)$$

et représente l'action sur le qubit de la cascade standard (1)-(2) ou (2)-(1), à quoi se réduit l'Éq. (10) à  $p_c = 0$  ou  $p_c = 1$  quand il n'y a pas de superposition quantique sur la Fig. 2. Le superopérateur  $\mathcal{S}_{01}(\cdot)$  traduit l'effet spécifique dû à la superposition quantique sur la Fig. 2 ; il s'exprime par

$$\mathcal{S}_{01}(\rho) = (1-p)^2 \mathcal{W}_0 + (1-p)p(\mathcal{W}_\ell + \mathcal{W}_\ell^\dagger) + p^2 \mathcal{W}_{\ell\ell}, \quad (12)$$

avec les superopérateurs

$$\mathcal{W}_0(\rho) = U_\xi \rho U_\xi^\dagger, \quad (13)$$

$$\mathcal{W}_\ell(\rho) = \sigma_\ell U_\xi \rho U_\xi^\dagger \sigma_\ell^\dagger, \quad (14)$$

$$\mathcal{W}_{\ell\ell}(\rho) = \sigma_\ell U_\xi \sigma_\ell U_\xi \rho U_\xi^\dagger \sigma_\ell^\dagger U_\xi^\dagger \sigma_\ell. \quad (15)$$

On peut déduire pour  $\mathcal{S}_{01}(\cdot)$  une caractérisation en représentation de Bloch avec

$$\mathcal{W}_0(\mathbb{I}_2) = \mathbb{I}_2, \quad (16)$$

$$(\mathcal{W}_\ell + \mathcal{W}_\ell^\dagger)(\mathbb{I}_2) = 2[u_\ell^2 + (1-u_\ell^2)\cos(\xi)]\mathbb{I}_2, \quad (17)$$

$$\mathcal{W}_{\ell\ell}(\mathbb{I}_2) = \mathbb{I}_2, \quad (18)$$

et avec

$$\mathcal{W}_0(\vec{r} \cdot \vec{\sigma}) = U_\xi^2 \vec{r} \cdot \vec{\sigma}, \quad (19)$$

$$(\mathcal{W}_\ell + \mathcal{W}_\ell^\dagger)(\vec{r} \cdot \vec{\sigma}) = 2[M_\ell U_\xi + (S_\ell U_\xi)^2] \vec{r} \cdot \vec{\sigma}, \quad (20)$$

$$\mathcal{W}_{\ell\ell}(\vec{r} \cdot \vec{\sigma}) = (L_\ell U_\xi)^2 \vec{r} \cdot \vec{\sigma}. \quad (21)$$

Comme dans [8], la matrice  $M_\ell$  est une matrice  $3 \times 3$  avec des zéros partout sauf un 1 à la position  $\ell\ell$ ; la matrice  $L_\ell$  est une matrice  $3 \times 3$  diagonale avec +1 à la position  $\ell$  et -1 aux deux autres positions diagonales; et la matrice  $S_\ell$  est une matrice  $3 \times 3$  définie dans [8].

Les Éqs. (11)–(21) fournissent ainsi une caractérisation complète de l'état bipartite  $\mathcal{S}(\rho \otimes \rho_c)$  à deux qubits de l'Éq. (10) comme établi par l'action du processus superposé de la Fig. 2. Les effets de la superposition quantique de processus dans l'Éq. (10) interviennent quand  $p_c$  diffère de 0 et 1, et ils sont traduits par le superopérateur  $\mathcal{S}_{01}(\cdot)$  de l'Éq. (12). On peut choisir d'exploiter (d'observer via une mesure quantique) les deux qubits, de signal et de contrôle, dans l'état conjoint de sortie  $\mathcal{S}(\rho \otimes \rho_c)$ . Si l'on choisit d'exploiter uniquement le qubit de signal, sans accéder au qubit de contrôle, les résultats de mesure sont complètement décrits par l'état réduit du qubit de signal, obtenu par une trace partielle de l'état conjoint  $\mathcal{S}(\rho \otimes \rho_c)$  selon le qubit de contrôle. D'après l'Éq. (10) on obtient  $\text{tr}_{\text{control}}[\mathcal{S}(\rho \otimes \rho_c)] = \mathcal{S}_{00}(\rho) = \rho^{\text{sig}}$  pour l'état réduit du qubit de signal en sortie, c'est-à-dire à nouveau rien de plus que l'état d'un qubit transformé par la cascade standard (1)-(2) ou (2)-(1).

Au contraire, on peut choisir en sortie d'exploiter uniquement le qubit de contrôle, sans observer le qubit de signal. Les résultats de mesure sont alors complètement décrits par l'état réduit du qubit de contrôle, obtenu par une trace partielle de l'état conjoint  $\mathcal{S}(\rho \otimes \rho_c)$  selon le qubit de signal. D'après l'Éq. (10) on obtient  $\text{tr}_{\text{signal}}[\mathcal{S}(\rho \otimes \rho_c)] = \rho^{\text{con}}$  pour l'état réduit du qubit de contrôle en sortie, soit

$$\begin{aligned} \rho^{\text{con}} &= p_c |0_c\rangle\langle 0_c| + (1 - p_c) |1_c\rangle\langle 1_c| \\ &+ Q(\xi) \sqrt{(1 - p_c)p_c} (|0_c\rangle\langle 1_c| + |1_c\rangle\langle 0_c|), \end{aligned} \quad (22)$$

avec  $Q(\xi) = \text{tr}[\mathcal{S}_{01}(\rho)] = \text{tr}[\mathcal{S}_{01}(\mathbb{I}_2)/2]$ , soit

$$Q(\xi) = 1 - 2(1 - u_\ell^2)(1 - p)p[1 - \cos(\xi)]. \quad (23)$$

On obtient ainsi pour le qubit de contrôle un état de sortie  $\rho^{\text{con}}$  qui dépend du processus unitaire  $U_\xi$ , notamment sa phase  $\xi$ , via  $Q(\xi)$ . C'est une propriété remarquable, car le qubit de contrôle n'interagit pas avec le processus  $U_\xi$ , seul le qubit de signal le fait. Néanmoins, la mesure du seul qubit de contrôle en sortie apporte des informations sur le processus  $U_\xi$ . Ce type de corrélation quantique créée dans les processus superposés a notamment été exploitée pour améliorer la communication d'information sur des canaux quantiques bruités [7, 18, 19, 20]. Nous allons l'exploiter ici pour de l'estimation paramétrique [21, 22, 16] sur le processus quantique unitaire  $U_\xi$ . Remarquablement aussi,  $\rho^{\text{con}}$  n'est pas affecté par le signal d'entrée  $\rho$ .

On cherche à estimer la phase  $\xi$  en mesurant le qubit de contrôle dans l'état  $\rho^{\text{con}}$  de l'Éq. (22). Quelle que soit la mesure quantique effectuée sur le qubit de contrôle, la performance d'estimation [21, 22] est toujours limitée par l'information de Fisher quantique  $F_q^{\text{con}}(\xi)$ , qui offre une borne supérieure à l'information de Fisher classique  $F_c^{\text{con}}(\xi)$  gouvernant l'erreur quadratique moyenne d'estimation. Dans le cas du qubit de l'Éq. (22), l'information  $F_q^{\text{con}}(\xi)$  est maximisée à l'optimum de superposition  $p_c = 1/2$  et s'établit [8] comme

$$F_q^{\text{con}}(\xi) = \frac{[\partial_\xi Q(\xi)]^2}{1 - Q^2(\xi)} \quad (24)$$

$$= \frac{[2(1 - u_\ell^2)(1 - p)p \sin(\xi)]^2}{1 - [1 - 2(1 - u_\ell^2)(1 - p)p[1 - \cos(\xi)]]^2}. \quad (25)$$

En pratique, on dispose d'une mesure quantique optimale qui consiste à mesurer le qubit de contrôle dans la base orthonormée  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$  de  $\mathcal{H}_2$ . Les deux résultats de mesure ont alors les probabilités

$$P_\pm^{\text{con}} = \langle \pm | \rho^{\text{con}} | \pm \rangle = \frac{1}{2} \pm \sqrt{(1 - p_c)p_c} Q(\xi), \quad (26)$$

conduisant à l'information de Fisher classique

$$F_c^{\text{con}}(\xi) = \frac{(\partial_\xi P_+^{\text{con}})^2}{(1 - P_+^{\text{con}})P_+^{\text{con}}}, \quad (27)$$

qui à l'optimum  $p_c = 1/2$  se trouve maximisée au niveau de  $F_q^{\text{con}}(\xi)$  de l'Éq. (24), établissant ainsi l'optimalité de la mesure.

Pour illustration de propriétés du processus superposé et ses apports à l'estimation de phase, nous considérons un opérateur unitaire  $U_\xi$  d'axe  $\vec{u} = [0, 1, 0]^T = \vec{e}_y$  et de phase  $\xi = \pi/4$ . Le signal d'entrée  $\rho$  qui va sonder l'opérateur  $U_\xi$  en vue d'estimer sa phase  $\xi$  est choisi avec un vecteur de Bloch  $\vec{r}$  dans le plan  $(Ox, Oz)$  orthogonal à l'axe  $\vec{u}$  dans  $\mathbb{R}^3$ , ce qui constitue une condition nécessaire d'optimalité pour l'estimation [23]. On prendra (de façon illustrative)  $\vec{r} = [r, 0, 0]^T = r\vec{e}_x$ . Le bruit quantique  $\mathcal{N}(\cdot)$  dans l'Éq. (4) est un bruit de phase-flip avec  $\ell = z$ . Un bruit de bit-flip avec  $\ell = x$  conduirait dans l'Éq. (25) à une performance  $F_q^{\text{con}}(\xi)$  identique pour l'estimation de la phase  $\xi$ , avec un même  $u_\ell = 0$ . La Fig. 4 montre l'information de Fisher quantique  $F_q^{\text{con}}(\xi)$  de l'Éq. (25) accessible en mesurant le qubit de contrôle du processus superposé de la Fig. 2, en la comparant à l'information de Fisher quantique  $F_q^{\text{cas}}(\xi; r)$  pour la cascade standard (1)-(2) ou (2)-(1), déductible de [22].

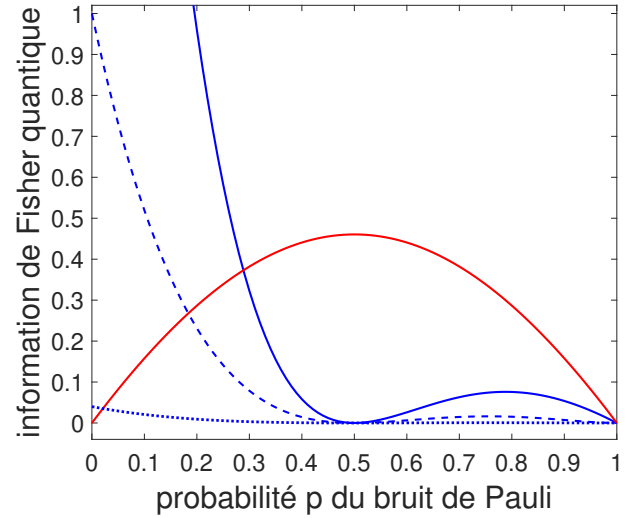


FIGURE 4 – En fonction de la probabilité  $p$  quantifiant le niveau du bruit quantique de l'Éq. (4), l'information de Fisher quantique  $F_q^{\text{con}}(\xi)$  de l'Éq. (25) (en rouge) accessible en mesurant le qubit de contrôle du processus superposé de la Fig. 2. Les trois courbes en bleu représentent l'information de Fisher quantique  $F_q^{\text{cas}}(\xi; r)$  pour la cascade standard (1)-(2) ou (2)-(1) avec un signal sonde d'entrée de  $r = 1$  (trait plein),  $r = 0.5$  (tirets) et  $r = 0.1$  (pointillés).

Sur la Fig. 4, aux faibles niveaux de bruit  $p$ , l'information de Fisher quantique  $F_q^{\text{cas}}(\xi; r)$  surpasse  $F_q^{\text{con}}(\xi)$ , indiquant que la cascade standard est plus performante pour l'estimation de phase. Toutefois, à plus fort niveau de bruit  $p$ , la performance  $F_q^{\text{con}}(\xi)$  l'emporte révélant une plus grande efficacité du processus superposé. Sans bruit, à  $p = 0$  sur la Fig. 4, la cascade standard avec un état pur du signal d'entrée à  $r = 1$ , atteint  $F_q^{\text{cas}}(\xi; r = 1) = 4$ , qui est le maximum maximum accessible en mesurant un qubit [23], établissant ici l'optimalité du signal d'entrée. À mesure que le bruit augmente, à  $p$  croissant,

la performance de la cascade standard tend à diminuer, alors que celle du processus superposé augmente et la surpasse. On note aussi sur la Fig. 4 que le bruit est bénéfique à la performance du processus superposé pour l'estimation. À bruit nul, les deux processus (1) et (2) superposés sur la Fig. 2 sont indistinguables, et leur superposition ne diffère pas d'une cascade standard ; c'est en présence de bruit qu'ils deviennent distinguables, et que leur superposition diffère d'une cascade standard, avec un apport spécifique pour l'estimation. Une autre propriété illustrée par la Fig. 4 est que la performance  $F_q^{\text{con}}(\xi)$  du processus superposé est insensible à la dégradation du signal sonde d'entrée, alors que la performance  $F_q^{\text{cas}}(\xi; r)$  de la cascade standard se dégrade, quand  $r$  diminue. À la limite d'un signal d'entrée complètement dépolarisé, à  $r = 0$ , l'estimation standard devient impossible, alors que le qubit de contrôle du processus superposé garde toute sa capacité pour l'estimation dans l'Éq. (25). Également, un signal d'entrée  $\vec{r}$  qui tendrait à s'aligner avec l'axe de rotation  $\vec{u}$ , jusqu'à  $\vec{r} \parallel \vec{u}$ , préserve dans l'Éq. (25) toute la capacité du qubit de contrôle pour l'estimation, alors que l'estimation standard deviendrait inopérante. Il s'agit là de propriétés sans équivalent, accessibles avec le processus superposé : permettre de l'estimation paramétrique avec un signal sonde complètement dépolarisé à  $\|\vec{r}\| = 0$ , ou aligné avec le processus  $U_\xi$  à estimer à  $\vec{r} \parallel \vec{u}$ .

## 4 Conclusion

Le processus quantique superposé possède d'autres propriétés spécifiques intéressantes, qui peuvent se déduire de l'analyse de l'état bipartite  $\mathcal{S}(\rho \otimes \rho_c)$  de l'Éq. (10) caractérisé ici avec les bruits de Pauli, étendant ainsi la caractérisation de [8] avec le bruit dépolarisant. Plus largement, cette possibilité de mettre en superposition quantique différents processus de traitement constitue une ressource nouvelle pour les signaux-systèmes, spécifiquement quantique et sans équivalent classique. Elle recèle encore beaucoup de potentialités à explorer, pour diverses applications en estimation, communication sur des canaux bruités, détection, ou pour le calcul. De façon fondamentale, elle interroge aussi sur la nature de la causalité physique au niveau quantique.

## Références

- [1] A. A. Abbott, J. Wechs, D. Horsman, M. Mhalla, C. Branciard, "Communication through coherent control of quantum channels," *Quantum*, vol. 4, pp. 333,1–14, 2020.
- [2] G. Chiribella, H. Kristjánsson, "Quantum Shannon theory with superpositions of trajectories," *Proceedings of the Royal Society A*, vol. 475, pp. 20180903,1–25, 2019.
- [3] H. Kristjánsson, G. Chiribella, S. Salek, D. Ebler, M. Wilson, "Resource theories of communication," *New Journal of Physics*, vol. 22, pp. 073014,1–30, 2020.
- [4] F. Chapeau-Blondeau, "Quantum parameter estimation on coherently superposed noisy channels," *Physical Review A*, vol. 104, pp. 032214,1–16, 2021.
- [5] O. Oreshkov, F. Costa, Č. Brukner, "Quantum correlations with no causal order," *Nature Communications*, vol. 3, pp. 1092,1–8, 2012.
- [6] G. Chiribella, G. M. D'Ariano, P. Perinotti, B. Valiron, "Quantum computations without definite causal structure," *Physical Review A*, vol. 88, pp. 022318,1–15, 2013.
- [7] D. Ebler, S. Salek, G. Chiribella, "Enhanced communication with the assistance of indefinite causal order," *Physical Review Letters*, vol. 120, pp. 120502,1–5, 2018.
- [8] F. Chapeau-Blondeau, "Noisy quantum metrology with the assistance of indefinite causal order," *Physical Review A*, vol. 103, pp. 032615,1–18, 2021.
- [9] J. Wechs, H. Dourdent, A. A. Abbott, C. Branciard, "Quantum circuits with classical versus quantum control of causal order," *PRX Quantum*, vol. 2, pp. 030335,1–53, 2021.
- [10] X.-Q. Zhou, T. C. Ralph, P. Kalasuwan, M. Zhang, A. Peruzzo, B. P. Lanyon, J. L. O'Brien, "Adding control to arbitrary unknown quantum operations," *Nature Communications*, vol. 2, pp. 413,1–8, 2011.
- [11] M. Friis, V. Dunjko, W. Dür, H. J. Briegel, "Implementing quantum control for unknown subroutines," *Physical Review A*, vol. 89, pp. 030303(R),1–5, 2014.
- [12] L. M. Procopio, A. Moqanaki, M. Araújo, F. Costa, I. A. Calafell, E. G. Dowd, D. R. Hamel, L. A. Rozema, Č. Brukner, P. Walther, "Experimental superposition of orders of quantum gates," *Nature Communications*, vol. 6, pp. 7913,1–6, 2015.
- [13] K. Goswami, C. Giarmatzi, M. Kewming, F. Costa, C. Branciard, J. Romero, A. G. White, "Indefinite causal order in a quantum switch," *Physical Review Letters*, vol. 121, pp. 090503,1–5, 2018.
- [14] Y. Guo, X.-M. Hu, Z.-B. Hou, H. Cao, J.-M. Cui, B.-H. Liu, Y.-F. Huang, C.-F. Li, G.-C. Guo, G. Chiribella, "Experimental transmission of quantum information using a superposition of causal orders," *Physical Review Letters*, vol. 124, pp. 030502,1–6, 2020.
- [15] M. A. Nielsen, I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge : Cambridge University Press, 2000.
- [16] N. Gillard, É. Belin, F. Chapeau-Blondeau, "Estimation quantique en présence de bruit améliorée par l'intrication," *Actes du 26è Colloque GRETSI sur le Traitement du Signal et des Images*, Juan-les-Pins, 5–8 sep. 2017.
- [17] F. Chapeau-Blondeau, "Optimization of quantum states for signaling across an arbitrary qubit noise channel with minimum-error detection," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 61, pp. 4500–4510, 2015.
- [18] L. M. Procopio, F. Delgado, M. Enríquez, N. Belabas, J. A. Levenson, "Communication enhancement through quantum coherent control of  $N$  channels in an indefinite causal-order scenario," *Entropy*, vol. 21, pp. 1012,1–19, 2019.
- [19] L. M. Procopio, F. Delgado, M. Enríquez, N. Belabas, J. A. Levenson, "Sending classical information via three noisy channels in superposition of causal orders," *Physical Review A*, vol. 101, pp. 012346,1–8, 2020.
- [20] N. Loizeau, A. Grinbaum, "Channel capacity enhancement with indefinite causal order," *Physical Review A*, vol. 101, pp. 012340,1–6, 2020.
- [21] Z. Ji, G. Wang, R. Duan, Y. Feng, M. Ying, "Parameter estimation of quantum channels," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 54, pp. 5172–5185, 2008.
- [22] F. Chapeau-Blondeau, "Optimizing qubit phase estimation," *Physical Review A*, vol. 94, pp. 022334,1–14, 2016.
- [23] F. Chapeau-Blondeau, "Optimized probing states for qubit phase estimation with general quantum noise," *Physical Review A*, vol. 91, pp. 052310,1–13, 2015. ■