

Modèles polarisés pour la simulation rapide de formes d’ondes gravitationnelles*

Cyril CANO¹, Éric CHASSANDE-MOTTIN², Nicolas LE BIHAN¹

¹Univ. Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble INP,
GIPSA-lab, F-38000 Grenoble

²Université Paris Cité, CNRS,
Astroparticule et Cosmologie
F-75013 Paris

cyril.cano@gipsa-lab.fr, ecm@apc.in2p3.fr
nicolas.le-bihan@gipsa-lab.fr

Résumé – L’analyse des données provenant des observatoires terrestres d’ondes gravitationnelles repose sur l’ajustement aux observations de modèles d’ondes obtenus à partir de modèles astrophysiques. La génération de modèles peut demander des ressources importantes de calcul pour des tâches telles que l’estimation des paramètres astrophysiques qui nécessite la capacité de générer rapidement un grand nombre de modèles de formes d’onde. Nous abordons ce problème en utilisant la régression de composantes principales et des caractéristiques soigneusement choisies. Nous étudions tout d’abord le cas simple des fusions binaires compactes avec des orbites "sans précession" qui conduisent à des ondes polarisées circulairement, et le cas plus compliqué "avec précession orbitale" qui conduit à une plus grande variété de polarisation et nécessitent donc une représentation géométrique spécifique.

Abstract – The analysis of the data from ground-based gravitational-wave observatories relies on fitting observations to waveform templates obtained from astrophysical models. Template generation can be computationally demanding for tasks such as astrophysical parameter estimation which requires the ability to generate rapidly a large number of template waveforms. We address this problem by using principal component regression and carefully chosen features. We first investigate the simple case of compact binary mergers with “non-precessing” orbits leading to circularly polarized waves, and the more complicated case of orbital precession leading to a larger variety of polarizations thus requiring a specific geometrical representation.

1 Contexte et motivations

Depuis 2015, les détecteurs LIGO et Virgo observent les ondes gravitationnelles qui proviennent de fusions de systèmes binaires d’étoiles compactes (à savoir des trous noirs ou des étoiles à neutrons) [1]. L’estimation des paramètres physiques de ces sources est effectuée par le biais d’une approche bayésienne [2] qui nécessite la production d’un grand nombre de formes d’ondes théoriques. La génération de ces formes d’ondes est gourmande en calcul car elle requiert la résolution numérique de la dynamique orbitale de la source [4]. Cela domine le temps de calcul nécessaire à l’inférence des paramètres. La sensibilité accrue des détecteurs prévue pour les prochaines prises de données scientifiques devrait multiplier le nombre de sources détectées. Afin d’accélérer l’analyse des futures données et d’en maîtriser le budget computationnel, il est donc utile de disposer de méthodes rapides pour la génération de formes d’ondes.

Il a été démontré récemment que, dans le cas des binaires

de trous noirs [3], l’apprentissage machine autorise une telle génération rapide et fiable en régressant la relation entre les paramètres physiques de la source et un nombre restreint de caractéristiques permettant la reconstruction de l’intégralité de la forme d’onde. Dans cette contribution, nous proposons une variante de [3] avec un algorithme de régression plus simple qui fournit un gain en précision dans le cas de binaires dont le mouvement orbital est *sans précession* (c’est-à-dire quand le moment cinétique ou spin de chacun des deux trous noirs est aligné avec le moment orbital), et produisant ainsi une onde gravitationnelle polarisée circulairement.

Une extension est ensuite introduite pour la situation plus complexe causée par la présence de précession orbitale (spins désalignés), qui conduit à une onde gravitationnelle dont la polarisation varie. Le problème de la représentation des signaux modulés en amplitude, phase et polarisation rend alors plus délicate l’application des mêmes idées. Nous proposons une solution basée sur une paramétrisation des signaux bivariés polarisés et analysons son aptitude à générer des formes d’ondes astrophysiques avec une précision proche de celle requise pour l’utilisation avec les données LIGO/Virgo.

*Ce travail a été en partie soutenu par le projet ANR RICOCHET n° ANR-21-CE48-0013.

2 Modes et formes d'ondes

La forme de l'onde gravitationnelle $h(t)$ émise par une binaire de trous noirs peut se décomposer en modes (l, m) issus du développement multipolaire suivant :

$$h(t) = \frac{M}{D} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l h_{l,m}^I(t) {}_{-2}Y_{l,m}(\iota, \varphi_0) \quad (1)$$

avec (ι, φ_0) les paramètres du système caractérisant la ligne de vue de l'observateur dans le référentiel inertiel de la source, D la distance de la source à l'observateur et M la masse totale du système.

Les ${}_{-2}Y_{l,m}$ sont les harmoniques sphériques pondérées en spin $s = -2$ et les $h_{l,m}^I$ sont les *modes* complexes dans le référentiel inertiel [5].

Le signal gravitationnel émis est paramétré par les masses des deux objets m_1 et m_2 , leurs spins $S_1(t_0)$ et $S_2(t_0)$, ainsi que la distance à l'observateur D et les angles (ι, φ_0) décrivant la ligne de visée dans le référentiel inertiel.

Deux scénarios sont possibles lors de la formation de la binaire. Si le spin des deux objets est aligné avec la normale au plan orbital, la forme d'onde a une polarisation fixée. Les modes $h_{l,m}^I$ sont circulaires : leurs parties réelles et imaginaires sont en quadrature. L'utilisation seule du mode $(2, 2)$ permet d'avoir une bonne approximation de la forme d'onde quelque soit l'inclinaison ι . Dans ce cas, le module et la phase de $h_{2,2}^I$ sont des fonctions lisses qui varient régulièrement (au sens de Lipschitz) en fonction des paramètres physiques de la source. Il est ainsi possible de les utiliser pour la génération rapide de formes d'ondes, comme nous le montrons en Sec. 3.

Si le spin d'au moins un des deux objets n'est pas aligné avec la normale au plan orbital, le système est sujet à un mouvement de précession orbital autour de son moment angulaire total. Pour obtenir une forme d'onde gravitationnelle précise, il est alors nécessaire d'utiliser plus de modes dans le développement (1), et ces modes ne sont plus tous circulaires. Nous proposons de modéliser les modes comme des signaux *AM-FM polarisés* [6], et d'utiliser la représentation à quatre paramètres introduite par Flamant *et al* [6]. En Sec. 4, nous montrons des résultats préliminaires avec cette modélisation pour l'approximation de formes d'ondes polarisées.

3 Simulation rapide de formes d'ondes sans précession

L'onde gravitationnelle $h(t) = h_+(t) - ih_\times(t)$ est un signal complexe constitué de deux modes de polarisation $h_+(t)$ et $h_\times(t)$. Dans le cas sans précession, celles-ci sont en quadrature comme illustré en Fig. 1. Le modèle polaire $h(t) = a(t)e^{-i\varphi(t)}$ est une paramétrisation pertinente car les module et phase sont des fonctions lisses et non-oscillantes qu'il est possible d'approcher avec une bonne précision. Ceci est exploité dans l'algorithme de synthèse de formes d'ondes proposé.

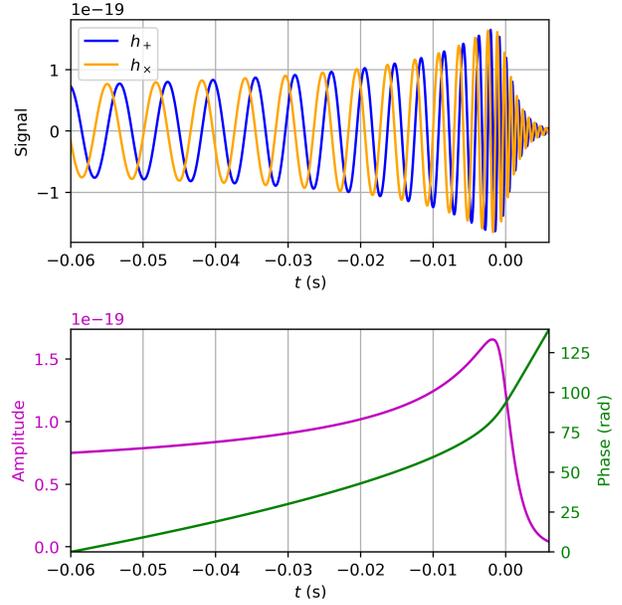


FIGURE 1 – Forme d'onde obtenue dans le cas d'une fusion de binaire sans précession (avec un ratio des masses $q = 3.3$ et des spins sans dimension $|\chi_1| = 0.91$, $|\chi_2| = 0.76$) vue de face (inclinaison $\iota = 0$). Haut : partie réelle (bleu) et imaginaire (orange) de la forme d'onde $h(t)$. Bas : module (violet) et phase (vert) de $h(t)$.

Pour la synthèse de l'amplitude $a(t)$ et de la phase $\varphi(t)$ d'une source donnée, nous proposons de faire la régression polynomiale des coefficients de la décomposition en composantes principales (ACP) tronquée calculée sur un ensemble d'exemples de formes d'onde. Le principe est le suivant : après avoir simulé un nombre assez important de formes d'ondes, une ACP est réalisée sur l'ensemble des modules et des phases. Après troncature de cette ACP aux composantes dominantes, la régression polynomiale permet d'inférer, à partir des paramètres physiques de la source considérée, la valeur des coefficients à appliquer à chacune de ces composantes pour faire la synthèse.

3.1 Paramètres, réduction et régression

Nous considérons un jeu de données de 4000 formes d'ondes¹. Les paramètres de la source $\theta = \{m_1, m_2, S_{1z}, S_{2z}\}$ sont tirés aléatoirement. La masse totale $M = m_1 + m_2$ est fixée à 20 masses solaires². Le ratio des masses $q = m_1/m_2$ est tiré uniformément dans l'intervalle $[1, 20]$ et les spins sans dimension $\chi_{iz} = S_{iz}/m_i$ dans $[-0.8, 0.95]$ pour $i = 1, 2$.

Par convention, l'origine de la grille temporelle marque le

1. Les formes d'ondes sont obtenues avec le modèle SEOBNRv4 [4] et simulées à l'aide de la librairie LALSimulation (DOI : 10.7935/GT1W-FZ16)

2. Le modèle est généralisable à des masses totales différentes par la propriété d'invariance d'échelle $h(t, m_1, m_2) = h(\lambda t, \lambda m_1, \lambda m_2)$ pour $\lambda > 0$ héritée de la relativité générale [3].

moment précis de la fusion des deux astres compacts. Les attributs (amplitude et phase) sont ré-échantillonnés sur une grille temporelle \tilde{t} ad-hoc allant de -20 s à $0,006$ s et telle que $\tilde{t} = \text{sign}(t) |t|^\alpha$ où $\alpha = 0.35$ [3]. Le taux d'échantillonnage croît jusqu'à la fusion des deux objets, recueillant ainsi plus de points quand l'amplitude et la phase évoluent rapidement. Ceci permet de tirer parti de la régularité des attributs et de réduire la taille de la base d'exemples.

Les 6 premières composantes principales de l'amplitude et la phase suffisent à obtenir une approximation suffisamment précise. Au-delà, l'erreur de régression des coefficients réduits domine l'erreur d'approximation due à la troncature de l'ACP.

Une régression polynômiale est utilisée pour le calcul des coefficients réduits de l'amplitude et de la phase à partir des paramètres associés à la source. La régression se fait avec les caractéristiques suivantes $\{q, \chi_{1z}, \chi_{2z}, m_2\}$. Ces caractéristiques sont choisies dans un ensemble motivé par la physique et comprenant la masse de chirp $\mathcal{M} = (m_1 m_2)^{3/5} / M^{1/5}$, le spin effectif $\chi_{\text{eff}} = (q\chi_{1z} + \chi_{2z}) / (1 + q)$, les masses des deux objets m_i et leurs inverses $1/m_i$ pour $i = 1, 2$, et cette combinaison optimise le score r^2 pour la régression des premières composantes principales de la phase (qui pilotent au final la précision de la synthèse). L'ordre de la régression polynômiale est fixé à 7 ce qui minimise l'erreur ε médiane d'approximation (introduite dans la section suivante).

3.2 Génération, précision et temps de calcul

La synthèse emprunte le cheminement inverse : les coefficients des attributs (amplitude et phase) réduits sont déduits des paramètres de la source voulue. Les séries temporelles des attributs sont ensuite obtenues par inversion de l'ACP puis interpolées sur la grille temporelle désirée. Le signal est finalement calculé via (1) en appliquant les facteurs d'échelle associés à la distance de la source, son inclinaison et la phase initiale.

La précision de la forme d'onde ainsi calculée est quantifiée par l'erreur ε définie, pour deux formes d'ondes $h, g \in \mathbb{C}^N$ par :

$$\varepsilon(h, g) = \min_{\tau \in \mathbb{R}} \left[1 - \frac{|\langle h_\tau, g \rangle|}{\|h_\tau\| \|g\|} \right] \quad (2)$$

avec $h_\tau(t) = h(t - \tau)$. Le produit scalaire est défini dans le domaine fréquentiel par $\langle h, g \rangle = \int \hat{h}(f) \hat{g}^*(f) df$ où \hat{h} est la transformée de Fourier de h et respectivement pour \hat{g} . Une comparaison des résultats obtenus avec la méthode proposée ici avec ceux obtenus par la méthode décrite dans [3] a été réalisée. L'erreur médiane obtenue est de 1.8×10^{-5} et les 5% et 95% percentiles sont 2.2×10^{-6} et 1.6×10^{-4} respectivement. La plus grosse erreur étant $\sim 10^{-2}$. Nous trouvons une erreur médiane de 2.3×10^{-3} avec la méthode de [3].

La régression sur composantes principales montre un gain d'au moins un ordre de grandeur en terme d'erreur ε . L'erreur d'approximation du modèle est alors plus petite que l'erreur intrinsèque du modèle physique initial (SEOBNRv4), uniformément sur l'espace de paramètres considéré. Cela rend le modèle applicable aux futurs évènements détectables lors des pro-

chaines campagnes d'observation de la collaboration LIGO-Virgo (en médiane, le modèle est applicable pour des rapports signal sur bruit $\text{SNR} \leq 288$, et dans le pire cas, $\text{SNR} \leq 12$).

Nous avons comparé le temps de génération de la méthode proposée avec celui de SEOBNRv4 sur un échantillon de 500 formes d'ondes pour des masses totales tirées uniformément dans l'intervalle $[40, 100] M_\odot$. L'approche proposée engendre une accélération d'un facteur 100 du temps de calcul. La régression sur composantes principales peut donc grandement accélérer l'estimation de paramètres pour les binaires de trous noirs sans précession.

4 Formes d'ondes avec précession

Un défaut d'alignement du spin d'un ou des deux composants de la binaire avec le moment orbital entraîne la précession du plan orbital et engendre un signal gravitationnel $h(t)$ dont les parties réelles et imaginaires ne sont plus en quadrature.

Cet effet de précession de la binaire induit une *modulation en polarisation* de la forme d'onde. Afin de prendre en compte ce type de variation du signal à valeurs complexes $h(t)$, nous proposons d'utiliser le formalisme introduit dans [6] pour l'analyse de signaux bivariés non-stationnaires.

4.1 Paramétrisation

Les modes $(2, \pm 2)$, $(2, \pm 1)$ peuvent être analysés et interprétés par les concepts utilisés pour la caractérisation des ondes polarisées. En particulier, comme expliqué dans [6], un ensemble de quatre paramètres permettent de décrire l'état du signal à chaque instant (ou chaque fréquence). Dans le cas non-stationnaire, il est possible de décrire un signal bivarié par un quadruplet, analogue du doublet amplitude-phase du signal analytique dans le cas univarié. Cette approche se base sur le modèle général de signal bivarié polarisé

$$h(t) = a(t) e^{i\theta(t)} (\cos \chi(t) \cos \varphi(t) + i \sin \chi(t) \sin \varphi(t)) \quad (3)$$

Le quadruplet en question $[a(t), \theta(t), \chi(t), \varphi(t)]$ est construit à partir du "plongement quaternionique" pour les signaux bivariés [6]. Un signal bivarié polarisé (3) a une trajectoire elliptique dans le plan complexe. À l'instar du cas réel, $a(t)$ et $\varphi(t)$ sont respectivement l'amplitude et la phase instantanée du signal. Les paramètres de polarisation $\theta(t)$ et $\chi(t)$ définissent l'orientation et l'ellipticité instantanée. La Figure 2 présente un exemple de quadruplet associé à une forme d'onde avec précession du plan orbital.

À la différence du doublet amplitude-phase, la paramétrisation (3) admet des cas pathologiques lors de l'analyse : $\theta(t)$ et $\varphi(t)$ sont mal définis pour un signal polarisé circulairement (perte d'un degré de liberté lorsque $\chi(t) = \pm\pi/4$). Cette propriété est connue sous le nom de blocage de cardan. La discrétisation de la transformée de Hilbert utilisée pour le calcul des signaux analytiques exacerbe le phénomène de blocage de

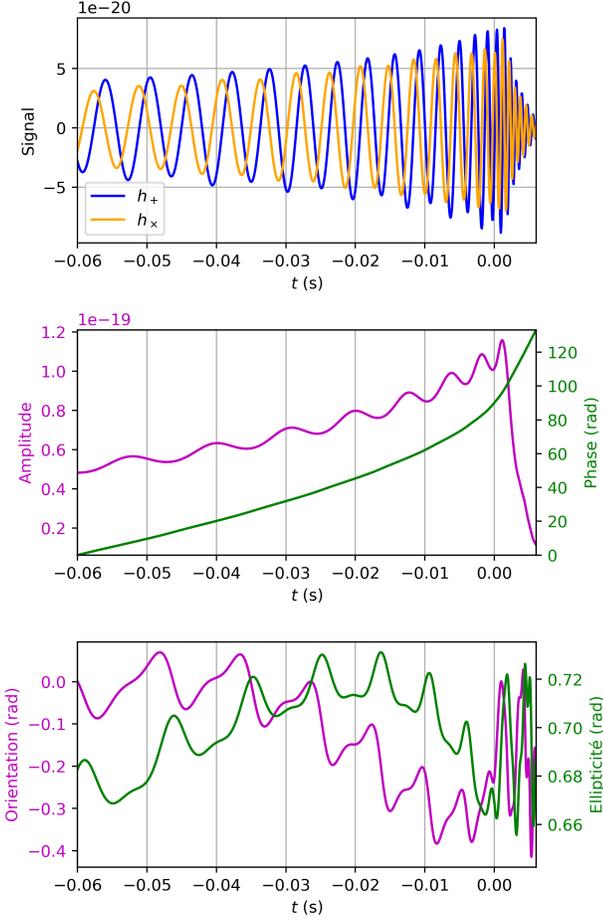


FIGURE 2 – Formes d’ondes et paramètres pour une binaire (telle que $q = 4.6$ et $|\chi_1| = 0.94$, $|\chi_2| = 0.64$) avec une inclinaison $\iota = \pi/3$ et animée d’une faible précession orbitale. Haut : parties réelle (bleu) et imaginaire (orange) de la forme d’onde $h(t)$. Milieu : amplitude (violet) et phase (vert) de $h(t)$. Bas : orientation (violet) et ellipticité (vert) de $h(t)$.

cardan et induit des comportements non interprétables des paramètres $\theta(t)$ et $\varphi(t)$ dans le cas quasi-circulaire.

Le mode $(2, 0)$ ne rentre pas dans le cadre des signaux bivariés polarisés introduit dans [6]. Ses parties réelles et imaginaires sont indépendantes l’une de l’autre. Pour ce mode, nous proposons d’utiliser les amplitudes et phases instantanées de ses parties réelles et imaginaires.

4.2 Simulations

Le comportement non interprétable du quadruplet issu de (3) dans le cas circulaire induit une forte diminution des performances de l’ACP tronquée. Il s’ajoute au fait que la précession provoque des oscillations dans les composantes du quadruplet $[a(t), \theta(t), \chi(t), \varphi(t)]$ qui rendent leurs variations moins régulières que dans le cas sans précession et ainsi participe à la dégradation des performances de l’ACP tronquée. La Figure 3

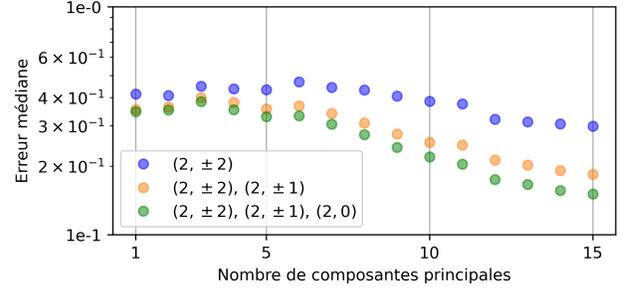


FIGURE 3 – Erreur de reconstruction due à la troncature de l’ACP appliquée à chaque attribut des différents modes. Bleu : seulement le mode $(2, \pm 2)$ est utilisé pour l’approximation de $h(t)$. Orange : les modes $(2, \pm 2)$ et $(2, \pm 1)$ sont utilisés pour l’approximation de $h(t)$. Vert : les modes $(2, \pm 2)$, $(2, \pm 1)$ et $(2, 0)$ sont utilisés pour l’approximation de $h(t)$.

illustre ces remarques en présentant l’erreur due à la troncature de l’ACP appliquée aux attributs des différents modes pour un ensemble de 500 formes d’ondes simulées à l’aide du modèle SEOBNRv4P [7]. L’erreur due à la troncature de l’ACP ne décroît pas aussi rapidement que dans le cas sans précession. Ces résultats illustrent la complexité induite par le phénomène de précession dans la génération et l’approximation de formes d’ondes. Le modèle bivarié non-stationnaire permet d’étendre les algorithmes de génération de formes d’ondes précessantes mais soulève des problèmes de stabilité et de précision de simulation à étudier dans les perspectives de ces travaux.

Références

- [1] R. Abbott et al. *GWTC-3 : Compact Binary Coalescences Observed by LIGO and Virgo During the Second Part of the Third Observing Run*. arXiv :2111.03606, 2022.
- [2] E. Thrane and C. Talbot. *An introduction to bayesian inference in gravitational-wave astronomy : Parameter estimation, model selection, and hierarchical models*. PASA, vol. 36, pp. e010, 2019.
- [3] S. Schmidt et al. *Machine learning gravitational waves from binary black hole mergers*. Phys. Rev. D, vol. 103, pp. 043020, 2021.
- [4] A. Bohé et al. *Improved effective-one-body model of spinning, nonprecessing binary black holes for the era of gravitational-wave astrophysics with advanced detectors*. Phys. Rev. D, vol. 95, pp. 044028, 2017.
- [5] J.D.E. Creighton et W.G. Anderson. *Gravitational-wave physics and astronomy* Wiley, 2011.
- [6] J. Flamant, N. Le Bihan and P. Chainais. *Time-frequency analysis of bivariate signals*. Applied and Computational Harmonic Analysis, 46, 2, 2019.
- [7] O. Serguei et al. *Multipolar effective-one-body waveforms for precessing binary black holes : Construction and validation*. Phys. Rev. D 102, 044055 (2020)