Théorie symplectique de l'Information et de la chaleur : thermodynamique des groupes de Lie et définition de l'Entropie comme fonction de Casimir

FRÉDÉRIC BARBARESCO[1]

[1] THALES Land & Air Systems
6 rue de la Verrerie, 92190 Meudon, France

[1]frederic.barbaresco@thalesgroup.com

Résumé - En 1969, Jean-Marie Souriau a introduit une "Thermodynamique des Groupes de Lie" dans le cadre du modèle Symplectique de la Mécanique Statistique. Sur la base de ce modèle, nous introduirons une caractérisation géométrique de l'entropie en tant que fonction invariante de Casimir en représentation coadjointe, où le cocycle de Souriau est une mesure de l'absence d'équivariance de l'application moment. L'espace dual de l'algèbre de Lie réalise un feuilletage via les orbites coadjointes ; feuilles symplectiques qui sont également les ensembles de niveaux de l'entropie. Dans le cadre de la thermodynamique, le mouvement restant sur ces feuilletages est non dissipatif, alors que le mouvement transversal à ces feuilles symplectiques est dissipatif. Le modèle fonde également le 2ème principe de la thermodynamique, liée à définie positivité du tenseur associé à la généralisation de la métrique de Koszul-Fisher de la Géométrie de l'Information. Nous introduirons une nouvelle équation géométrique de la chaleur de Fourier qui s'écrit de façon intrinsèque comme une équation d'Euler-Poincaré. En conclusion, l'entropie en tant que fonction de Casimir est caractérisée par la cohomologie de Poisson introduite par Jean-Louis Koszul.

Abstract - In 1969, Jean-Marie Souriau introduced a "Lie Groups Thermodynamics" in the framework of Symplectic model of Statistical Mechanics. Based on this model, we will introduce a geometric characterization of Entropy as a Casimir invariant function in coadjoint representation, where Souriau cocycle is a measure of the lack of equivariance of the moment map. The dual space of the Lie algebra foliates into coadjoint orbits that are also the level sets on the entropy. In the framework of Thermodynamics, we interpret that motion remaining on these symplectic leaves is non-dissipative, whereas motion transversal to these leaves is dissipative. We will also explain the 2nd Principle in thermodynamics by definite positiveness of Souriau tensor used to extend the Koszul-Fisher metric from Information Geometry. We introduce a new geometric Fourier heat equation that could be written intrinsically as a Euler-Lagrange equation. In conclusion, Entropy as Casimir function is characterized by Poisson Cohomology introduced by Jean-Louis Koszul.

1 Préambule : géométrie de l'Entropie

On introduira l'Entropie dans le modèle de Souriau de la « thermodynamique des groupes de Lie », modèle symplectique de la physique statique. L'Entropie $S(Q)$ est définie sur l'orbite affine coadjointe du groupe de Lie qui agit (où Q est une chaleur "géométrique", élément de $\mathfrak{g}^*$ l'espace dual de l'algèbre de Lie du groupe). Elle a une propriété d'invariance $S\left(Ad_g^{\#}(Q)\right)=S(Q)$ si on note l'action coadjointe affine $Ad_g^{\#}(Q)=Ad_g^{*}(Q)+\theta(g)$ où $\theta(g)$ est appelé le cocyle de Souriau, et est associé au défaut d'équivariance de l'application moment. Dans le cadre de la Thermodynamique des groupes de Lie de Souriau [1,2], nous caractériserons ensuite l'Entropie comme une fonction invariante de Casimir en représentation coadjointe. Lorsque M est une variété de Poisson, une fonction sur M est une fonction de Casimir si et seulement si cette fonction est constante sur chaque feuille symplectique (les sous-ensembles ouverts non vides des feuilles symplectiques sont les plus petites variétés plongées de M qui sont des sous-variétés de Poisson). Classiquement, l'Entropie est définie axiomatiquement comme l'Entropie de Shannon ou de von Neumann sans considérations géométriques. Dans cet article, l'entropie sera caractérisée comme solution de l'équation de Casimir donnée pour l'équivariance affine :

$$\left(ad^*_{\frac{\partial S}{\partial Q}}Q\right)_j+\Theta\left(\frac{\partial S}{\partial Q}\right)_j=C_{ij}^k ad^*_{\left(\frac{\partial S}{\partial Q}\right)^i}Q_k+\Theta_j=0 \tag{1}$$

$$\Theta(X)=T_e\theta\left(X(e)\right) \text{ avec } \tilde{\Theta}\left(X,Y\right)=\left\langle\Theta(X),Y\right\rangle=J_{[X,Y]}-\left\{J_X,J_Y\right\}$$

en notant J l'application moment, et $\theta(g)$ le cocycle symplectique de Souriau, qui apparait dans le cas à cohomologie non nulle (c'est à dire en cas de non-équivariance de l'opérateur coadjoint sur l'application moment). La 2-forme KKS (Kostant-Kirillov Souriau) qui associe une structure de variété symplectique homogène aux orbites coadjointes, sera liée à l'extension de la métrique de Koszul-Fisher de la Géométrie de l'Information. Les feuilles symplectiques associées à ces orbites coadjointes sont les ensembles de niveaux de l'Entropie. Dans le cadre de la thermodynamique, on interprète que le mouvement restant sur ces feuilles symplectiques est non dissipatif, alors que le mouvement transversal à ces feuilles est dissipatif. La dynamique est donnée par $\frac{dQ}{dt} = ad^*_{\frac{\partial H}{\partial Q}} Q + \Theta\left(\frac{\partial H}{\partial Q}\right)$ avec l'équilibre quand $H = S \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = ad^*_{\frac{\partial S}{\partial Q}} Q + \Theta\left(\frac{\partial S}{\partial Q}\right) = 0$ (le schéma numérique associé à ce flot préserve les orbites coadjointes et les fonctions de Casimirs de l'équation de Lie–Poisson).

Nous observerons également que $dS = \tilde{\Theta}_\beta\left(\frac{\partial H}{\partial Q}, \beta\right)dt$ où $\tilde{\Theta}_\beta\left(\frac{\partial H}{\partial Q}, \beta\right) = \tilde{\Theta}\left(\frac{\partial H}{\partial Q}, \beta\right) + \left\langle Q, \left[\frac{\partial H}{\partial Q}, \beta\right] \right\rangle$, ce qui fonde le 2ème principe de la thermodynamique sur la définie positivité du tenseur de Souriau $\tilde{\Theta}_\beta(.,.)$ lié à l'information de Fisher ou à l'extension de la 2 forme de Koszul de la géométrie de l'Information. Plus de détails sur la thermodynamique des groupes de Lie de Souriau sont disponibles dans les articles de l'auteur [2-3] ou dans les articles de Charles-Michel Marle.

2 Thermodynamique des groupes de Lie et métrique de Souriau-Fisher

Dans le cadre de la géométrie de l'Information, la métrique riemannienne d'une famille exponentielle est donnée par la matrice d'information de Fisher définie par:

$$g_{ij} = -\left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right]_{ij} \quad \text{avec} \quad \Phi(\theta) = -\log \int_R e^{-\langle \theta, y\rangle} dy \tag{2}$$

L'Entropie de Shannon, est donné par la transformée de Legendre :

$$S(\eta) = \langle \theta, \eta \rangle - \Phi(\theta) \quad \text{avec} \quad \eta_i = \frac{\partial \Phi(\theta)}{\partial \theta_i} \quad \text{et} \quad \theta_i = \frac{\partial S(\eta)}{\partial \eta_i} \tag{3}$$

$\Phi(\theta) = -\log \int_R e^{-\langle \theta, y\rangle} dy = -\log \psi(\theta)$ est liée à la fonction génératrice des cumulants en statistique. Dans le modèle de Souriau, la structure de la géométrie de l'information est conservée et étendue sur les variétés Symplectiques associées aux orbites coadjointes :

$$I(\beta) = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} \text{ et } \Phi(\beta) = -\log \int_M e^{-\langle \beta, U(\xi)\rangle} d\lambda \text{ avec } U : M \to \mathfrak{g}^*$$

$$S(Q) = \langle \beta, Q \rangle - \Phi(\beta) \text{ avec } Q = \frac{\partial \Phi(\beta)}{\partial \beta} \in \mathfrak{g}^* \text{ et } \beta = \frac{\partial S(Q)}{\partial Q} \in \mathfrak{g}$$

Dans le modèle thermodynamique des groupes de Lie de Souriau, β est une température (de Planck) « géométrique », élément de $\mathfrak{g}$ l'algèbre die du groupe, et Q est une chaleur « géométrique », élément de $\mathfrak{g}^*$ l'espace dual de l'algèbre de Lie du groupe. Souriau a proposé une métrique riemannienne que nous avons identifiée comme généralisation de la métrique de Fisher:

$$I(\beta) = [g_\beta] \quad \text{avec} \quad g_\beta([\beta, Z_1], [\beta, Z_2]) = \tilde{\Theta}_\beta(Z_1, [\beta, Z_2]) \tag{4}$$

$$\tilde{\Theta}_\beta(Z_1, Z_2) = \tilde{\Theta}(Z_1, Z_2) + \langle Q, ad_{Z_1}(Z_2) \rangle \text{ où } ad_{Z_1}(Z_2) = [Z_1, Z_2]$$

Le théorème fondamental de Souriau est que « *Toute variété symplectique sur laquelle un groupe de Lie agit transitivement par une action hamiltonienne est un espace de recouvrement d'une orbite coadjointe* ». On peut observer que la métrique de Fisher est une extension de cette 2-forme pour le cas non équivariant $g_\beta([\beta, Z_1], [\beta, Z_2]) = \tilde{\Theta}(Z_1, [\beta, Z_2]) + \langle Q, [Z_1, [\beta, Z_2]] \rangle$.

Le terme additionnel de Souriau $\tilde{\Theta}(Z_1, [\beta, Z_2])$ est généré par la non-équivariance de l'opérateur coadjoint via le cocycle symplectique. Le tenseur $\tilde{\Theta}$ utilisé pour définir cette métrique de Fisher étendue est défini par l'application moment $J(x)$, application de M (variété symplectique homogène) vers $\mathfrak{g}^*$ l'espace dual de l'algèbre de Lie , donnée par:

$$\tilde{\Theta}(X, Y) = J_{[X,Y]} - \{J_X, J_Y\} \tag{5}$$

$$\text{avec } J(x) : M \to \mathfrak{g}^* \text{ tel que } J_X(x) = \langle J(x), X \rangle, X \in \mathfrak{g} \tag{6}$$

Ce tenseur $\tilde{\Theta}$ est également défini dans l'espace tangent du cocycle $\theta(g) \in \mathfrak{g}^*$ (ce cocycle apparaît du fait de la non-équivariance de l'opérateur coadjoint Ad^*_g, action du groupe sur l'espace dual de l'algèbre de Lie, qui est modifiée avec un cocycle). On parle d'action affine :

$$Q(Ad_g(\beta)) = Ad^*_g(Q) + \theta(g) \tag{7}$$

Nous utiliserons dans la suite la notation $Ad^*_g = \left(Ad_{g^{-1}}\right)^*$ avec $\langle Ad^*_g F, Y \rangle = \langle F, Ad_{g^{-1}} Y \rangle, \forall g \in G, Y \in \mathfrak{g}, F \in \mathfrak{g}^*$ tel que Koszul et Souriau l'utilisent. $\theta(g) \in \mathfrak{g}^*$ est appelé un cocycle de Souriau, et c'est une mesure du manque d'équivariance.

$$\begin{aligned} &\tilde{\Theta}(X, Y) : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \Re \\ &\qquad \mathrm{X,Y} \mapsto \langle \Theta(X), Y \rangle \end{aligned} \tag{8}$$

avec $\Theta(X) = T_e \theta(X(e))$

On peut alors en déduire que le tenseur pourrait aussi s'écrire (avec relation de cocyle) :

$$\tilde{\Theta}(X, Y) = J_{[X,Y]} - \{J_X, J_Y\} = -\langle d\theta(X), Y \rangle \ , \ X, Y \in \mathfrak{g} \tag{9}$$

$$\tilde{\Theta}([X, Y], Z) + \tilde{\Theta}([Y, Z], X) + \tilde{\Theta}([Z, X], Y) = 0 \ , \ X, Y, Z \in \mathfrak{g}$$

Lorsqu'un élément du groupe g agit sur l'élément $\beta \in \mathfrak{g}$ de l'algèbre de Lie, l'opérateur est donné par l'opérateur adjoint Ad_g. Par rapport à l'action du groupe $Ad_g(\beta)$, l'Entropie $S(Q)$ et la métrique de Fisher $I(\beta)$ sont invariantes :

$$\beta \in \mathfrak{g} \to Ad_g(\beta) \Rightarrow \begin{cases} S[Q(Ad_g(\beta))] = S(Q) \\ I[Ad_g(\beta)] = I(\beta) \end{cases} \tag{10}$$

Souriau a complété sa « théorie géométrique de la chaleur » en introduisant une 2-forme dans l'algèbre de Lie, c'est-à-dire un tenseur métrique de Riemann en les valeurs de l'orbite adjointe de β, $[\beta, Z]$ avec Z un élément de l'algèbre de Lie. Cette métrique est donnée pour (β, Q):

$$g_\beta([\beta, Z_1], [\beta, Z_2]) = \langle \Theta(Z_1), [\beta, Z_2] \rangle + \langle Q, [Z_1, [\beta, Z_2]] \rangle \tag{11}$$

où Θ est un cocycle de l'algèbre de Lie, défini par $\Theta = T_e \theta$ avec θ un cocycle du groupe de Lie défini par $\theta(M) = Q(Ad_M(\beta)) - Ad^*_M Q$. Nous observons que la métrique riemannienne de Souriau, introduite avec le cocycle symplectique, est une généralisation de la métrique de Fisher, que nous appelons métrique de

Souriau-Fisher, qui conserve la propriété d'être définie comme le hessien du logarithme de la fonction de partition $g_\beta=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial\beta^2}=\frac{\partial^2\log\psi_\Omega}{\partial\beta^2}$ comme dans la géométrie classique de l'information. Nous établirons l'égalité de deux termes, entre la définition de Souriau basée sur le cocycle du groupe de Lie Θ et paramétrée par la « chaleur géométrique » Q (élément de l'espace dual de l'algèbre de Lie) et la « température géométrique » β (élément de l'algèbre de Lie) et la hessienne de la fonction caractéristique $\Phi(\beta)=-\log\psi_\Omega(\beta)$ par rapport à la variable β :

$$g_\beta([\beta,Z_1],[\beta,Z_2])=\langle\Theta(Z_1),[\beta,Z_2]\rangle+\langle Q,[Z_1,[\beta,Z_2]]\rangle=\frac{\partial^2\log\psi_\Omega}{\partial\beta^2}$$

Pour considérer l'invariance de l'entropie, nous devons utiliser la propriété que :

$$Q\left(Ad_g\beta\right)=Ad_g^*Q(\beta)+\theta(g)=g.Q(\beta)\ ,\ \beta\in\Omega,g\in G \quad (12)$$

Pour $\beta\in\Omega$, soit g_β la forme Hessienne sur $T_\beta\Omega\equiv\mathfrak{g}$ avec le potentiel $\Phi(\beta)=-\log\psi_\Omega(\beta)$. Pour $X,Y\in\mathfrak{g}$, on définit :

$$g_\beta(X,Y)=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial\beta^2}(X,Y)=\left(\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\right)_{s=t=0}\log\psi_\Omega(\beta+sX+tY)$$

Le caractère définitif positif est donné par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$g_\beta(X,Y)=\frac{1}{\psi_\Omega(\beta)^2}\left\{\begin{array}{l}\int_M e^{-\langle U(\xi),\beta\rangle}d\lambda(\xi).\int_M\langle U(\xi),X\rangle^2e^{-\langle U(\xi),\beta\rangle}d\lambda(\xi)\\-\left(\int_M\langle U(\xi),X\rangle e^{-\langle U(\xi),\beta\rangle}d\lambda(\xi)\right)^2\end{array}\right\}$$

$$=\frac{1}{\psi_\Omega(\beta)^2}\left\{\begin{array}{l}\int_M\left(e^{-\langle U(\xi),\beta\rangle/2}\right)^2d\lambda(\xi).\int_M\left(\langle U(\xi),X\rangle e^{-\langle U(\xi),\beta\rangle/2}\right)^2d\lambda(\xi)\\-\left(\int_M e^{-\langle U(\xi),\beta\rangle/2}.\langle U(\xi),X\rangle e^{-\langle U(\xi),\beta\rangle/2}d\lambda(\xi)\right)^2\end{array}\right\}\geq 0$$

On observe que $g_\beta(X,X)=0$ si et seulement si $\langle U(\xi),X\rangle$ est indépendant de $\xi\in M$, ce qui signifie que l'ensemble $\{U(\xi);\xi\in M\}$ est contenu dans un hyperplan affine dans $\mathfrak{g}^*$ perpendiculaire au vecteur $X\in\mathfrak{g}$. Nous avons vu que $g_\beta=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial\beta^2}$, qui est une **généralisation de la métrique de Fisher classique issue de la géométrie de l'information** , et donnera la relation la métrique riemannienne introduite par Souriau.

$$g_\beta(X,Y)=\left\langle-\frac{\partial Q}{\partial\beta}(X),Y\right\rangle\ \text{ for }\ X,Y\in\mathfrak{g} \quad (13)$$

nous avons pour tout $\beta\in\Omega,g\in G$ and $Y\in\mathfrak{g}$:

$$\left\langle Q\left(Ad_g\beta\right),Y\right\rangle=\left\langle Q(\beta),Ad_{g^{-1}}Y\right\rangle+\left\langle\theta(g),Y\right\rangle \quad (14)$$

Dérivons l'expression ci-dessus par rapport à g. A savoir, nous substituons $g=\exp(tZ_1),t\in R$ et différencions à t = 0. Alors le côté gauche de (22) devient

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0}\left\langle Q\left(\beta+t[Z_1,\beta]+o(t^2)\right),Y\right\rangle=\left\langle\frac{\partial Q}{\partial\beta}([Z_1,\beta]),Y\right\rangle$$

et le membre de droite de (14) est calculé comme suit :

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0}\left\langle Q(\beta),Y-t[Z_1,Y]+o(t^2)\right\rangle+\left\langle\theta\left(I+tZ_1+o(t^2)\right),Y\right\rangle$$
$$=-\left\langle Q(\beta),[Z_1,Y]\right\rangle+\left\langle d\theta(Z_1),Y\right\rangle$$

et donc,

$$\left\langle\frac{\partial Q}{\partial\beta}([Z_1,\beta]),Y\right\rangle=\left\langle d\theta(Z_1),Y\right\rangle-\left\langle Q(\beta),[Z_1,Y]\right\rangle \quad (15)$$

En substituant $Y=-[\beta,Z_2]$ à l'expression ci-dessus :

$$g_\beta([\beta,Z_1],[\beta,Z_2])=\left\langle-\frac{\partial Q}{\partial\beta}([Z_1,\beta]),[\beta,Z_2]\right\rangle$$

$$g_\beta([\beta,Z_1],[\beta,Z_2])=\left\langle d\theta(Z_1),[\beta,Z_2]\right\rangle+\left\langle Q(\beta),[Z_1,[\beta,Z_2]]\right\rangle$$

On définit alors le 2-cocycle symplectique et le tenseur :

$$\Theta(Z_1)=d\theta(Z_1)$$
$$\tilde{\Theta}(Z_1,Z_2)=\left\langle\Theta(Z_1),Z_2\right\rangle=J_{[Z_1,Z_2]}-\left\{J_{Z_1},J_{Z_2}\right\} \quad (16)$$

Considérant $\tilde{\Theta}_\beta(Z_1,Z_2)=\left\langle Q(\beta),[Z_1,Z_2]\right\rangle+\tilde{\Theta}(Z_1,Z_2)$, c'est une extension de la forme KKS (Kirillov-Kostant-Souriau) 2 dans le cas de la cohomologie non nulle. Introduite par Souriau, on peut définir cette extension métrique de Fisher avec la 2-forme de Souriau :

$$g_\beta([\beta,Z_1],[\beta,Z_2])=\tilde{\Theta}_\beta(Z_1,[\beta,Z_2]) \quad (17)$$

Comme l'entropie est définie par la transformée de Legendre de la fonction caractéristique, une métrique duale de la métrique de Fisher est aussi donnée par la hessienne de « l'entropie géométrique » $S(Q)$ par rapport à la variable duale donnée par Q : $\frac{\partial^2S(Q)}{\partial Q^2}$.

La métrique de Fisher a été considérée par Souriau comme une ***généralisation de la « capacité calorifique »***. Souriau l'appelait la « ***capacité géométrique*** » :

$$I(\beta)=-\frac{\partial^2\Phi(\beta)}{\partial\beta^2}=-\frac{\partial Q}{\partial\beta} \quad (18)$$

3 L'entropie comme fonction de Casimir généralisée dans la représentation coadjointe et équation géométrique de la chaleur

Dans son article de 1974, Jean-Marie Souriau écrit $\langle Q,[\beta,Z]\rangle+\tilde{\Theta}(\beta,Z)=0$. Pour prouver cette équation, nous devons considérer la courbe paramétrée $t\mapsto Ad_{\exp(tZ)}\beta$ avec $Z\in\mathfrak{g}$ et $t\in R$. La courbe paramétrée $Ad_{\exp(tZ)}\beta$ passe, pour $t=0$, par le point β, puisque $Ad_{\exp(0)}$ est l'application identique de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Cette courbe est dans l'orbite adjointe de β. Donc en prenant sa dérivée par rapport à t, puis pour $t=0$, on obtient un vecteur tangent en β à l'orbite adjointe de ce point. Lorsque Z prend toutes les valeurs possibles dans $\mathfrak{g}$, les vecteurs ainsi obtenus génèrent tout l'espace vectoriel tangent β à l'orbite de ce point :

$$\left.\frac{d\Phi\left(Ad_{\exp(tZ)}\beta\right)}{dt}\right|_{t=0}=\left\langle\frac{d\Phi}{d\beta},\left(\left.\frac{d\left(Ad_{\exp(tZ)}\beta\right)}{dt}\right|_{t=0}\right)\right\rangle \tag{19}$$
$$=\left\langle Q,ad_Z\beta\right\rangle=\left\langle Q,[Z,\beta]\right\rangle$$

Comme $\Phi\left(Ad_g\beta\right)=\Phi(\beta)-\left\langle\theta\left(g^{-1}\right),\beta\right\rangle$. Si on pose $g=\exp(tZ)$, on a $\Phi\left(Ad_{\exp(tZ)}\beta\right)=\Phi(\beta)-\left\langle\theta\left(\exp(-tZ)\right),\beta\right\rangle$ et par dérivation par rapport à t en $t=0$, on retrouve finalement l'équation donnée par Souriau :

$$\left.\frac{d\Phi\left(Ad_{\exp(tZ)}\beta\right)}{dt}\right|_{t=0}=\left\langle Q,[Z,\beta]\right\rangle=-\left\langle d\theta(-Z),\beta\right\rangle \tag{20}$$

avec $\tilde{\Theta}(X,Y)=-\left\langle d\theta(X),Y\right\rangle$

Nous proposons de caractériser plus explicitement cette invariance, en **caractérisant l'Entropie comme une fonction de Casimir invariante en représentation coadjointe** . De la dernière équation de Souriau, si on utilise les identités $\beta=\frac{\partial S}{\partial Q}$, $ad_\beta Z=[\beta,Z]$ et $\tilde{\Theta}(\beta,Z)=\left\langle\Theta(\beta),Z\right\rangle$, alors nous pouvons en déduire que $\left\langle ad^*_{\frac{\partial S}{\partial Q}}Q+\Theta\left(\frac{\partial S}{\partial Q}\right),Z\right\rangle=0,\ \forall Z$. Donc, l'entropie $S(Q)$ doit vérifier $ad^*_{\frac{\partial S}{\partial Q}}Q+\Theta\left(\frac{\partial S}{\partial Q}\right)=0$, caractérise **une fonction de Casimir invariante en cas de cohomologie non nulle** , que nous proposons d'écrire avec des crochets de Poisson, où :

$$\left\{S,H\right\}_{\tilde{\Theta}}(Q)=\left\langle Q,\left[\frac{\partial S}{\partial Q},\frac{\partial H}{\partial Q}\right]\right\rangle+\tilde{\Theta}\left(\frac{\partial S}{\partial Q},\frac{\partial H}{\partial Q}\right)=0\,,$$
$$\forall H:\mathfrak{g}^*\to R,\ Q\in\mathfrak{g}^* \tag{21}$$

On retrouve l'équation de Casimir étendue en cas de cohomologie non nulle vérifiée par Entropie, $ad^*_{\frac{\partial S}{\partial Q}}Q+\Theta\left(\frac{\partial S}{\partial Q}\right)=0$, puis la condition de Casimir généralisée $\left\{S,H\right\}_{\tilde{\Theta}}(Q)=0$. Cette précédente équation de Lie-Poisson est équivalente au **principe variationnel de Lie-Poisson modifié** :

$$\delta\int_0^\tau\left(\left\langle Q(t),\frac{\partial H}{\partial Q}(t)\right\rangle-H\left(Q(t)\right)\right)dt\ =0$$
$$\underset{\substack{Int.\\by\\parts}}{=}\int_0^\tau\left\langle-\frac{dQ}{dt}+ad^*_{\frac{dH}{dQ}}Q+\Theta\left(\frac{\partial H}{\partial Q}\right),\eta\right\rangle dt+\left.\left\langle Q,\eta\right\rangle\right|_0^\tau=0 \tag{22}$$

A partir de cette équation de Lie-Poisson, nous pouvons introduire une ***Equation Géométrique de Fourier de la Chaleur*** :

$$\frac{\partial Q}{\partial t}=\frac{\partial Q}{\partial\beta}.\frac{\partial\beta}{\partial t}=ad^*_{\frac{\partial H}{\partial Q}}Q+\Theta\left(\frac{\partial H}{\partial Q}\right) \tag{23}$$

Avec $\frac{\partial Q}{\partial\beta}$ donné par $g_\beta(X,Y)=\left\langle-\frac{\partial Q}{\partial\beta}(X),Y\right\rangle\quad\forall X,Y\in\mathfrak{g}$

avec $g_\beta(X,Y)=\tilde{\Theta}_\beta(X,Y)=\left\langle Q(\beta),[X,Y]\right\rangle+\tilde{\Theta}(X,Y)$

Le lien avec le **2ème principe de la Thermodynamique** sera déduit de la positivité de la métrique de Souriau-Fisher :

$$\frac{dS}{dt}=\left\langle Q,\frac{d\beta}{dt}\right\rangle+\left\langle ad^*_{\frac{\partial H}{\partial Q}}Q+\Theta\left(\frac{\partial H}{\partial Q}\right),\beta\right\rangle-\frac{d\Phi}{dt}$$
$$\frac{dS}{dt}=\left\langle Q,\frac{d\beta}{dt}\right\rangle+\left\langle Q,\left[\frac{\partial H}{\partial Q},\beta\right]\right\rangle+\tilde{\Theta}\left(\frac{\partial H}{\partial Q},\beta\right)-\frac{d\Phi}{dt}=\tilde{\Theta}_\beta\left(\frac{\partial H}{\partial Q},\beta\right)\geq 0$$
$$\text{si } H=S\underset{\frac{\partial S}{\partial Q}=\beta}{\Rightarrow}\frac{dS}{dt}=\tilde{\Theta}_\beta(\beta,\beta)=0 \text{ car } \beta\in Ker\tilde{\Theta}_\beta$$

Les 2 équations caractérisant l'Entropie comme fonction de Casimir invariante sont liées par :

$$\left\{S,H\right\}_{\tilde{\Theta}}(Q)=\left\langle Q,\left[\frac{\partial S}{\partial Q},\frac{\partial H}{\partial Q}\right]\right\rangle+\left\langle\Theta\left(\frac{\partial S}{\partial Q}\right),\frac{\partial H}{\partial Q}\right\rangle=0$$
$$\left\{S,H\right\}_{\tilde{\Theta}}(Q)=\left\langle Q,ad_{\frac{\partial S}{\partial Q}}\frac{\partial H}{\partial Q}\right\rangle+\left\langle\Theta\left(\frac{\partial S}{\partial Q}\right),\frac{\partial H}{\partial Q}\right\rangle=0$$
$$\left\{S,H\right\}_{\tilde{\Theta}}(Q)=\left\langle ad^*_{\frac{\partial S}{\partial Q}}Q,\frac{\partial H}{\partial Q}\right\rangle+\left\langle\Theta\left(\frac{\partial S}{\partial Q}\right),\frac{\partial H}{\partial Q}\right\rangle=0$$
$$\forall H,\left\{S,H\right\}_{\tilde{\Theta}}(Q)=\left\langle ad^*_{\frac{\partial S}{\partial Q}}Q+\Theta\left(\frac{\partial S}{\partial Q}\right),\frac{\partial H}{\partial Q}\right\rangle=0\Rightarrow ad^*_{\frac{\partial S}{\partial Q}}Q+\Theta\left(\frac{\partial S}{\partial Q}\right)=0$$

Cette équation a été observée par Souriau dans [1], où il écrit que β est un noyau de $\tilde{\Theta}_\beta$, c'est-à-dire :

$$\beta\in Ker\tilde{\Theta}_\beta\Rightarrow\left\langle Q,[\beta,Z]\right\rangle+\tilde{\Theta}(\beta,Z)=0 \tag{24}$$

que l'on peut développer pour retrouver l'équation de Casimir :

$$\Rightarrow\left\langle Q,ad_\beta Z\right\rangle+\tilde{\Theta}(\beta,Z)=0\Rightarrow\left\langle ad^*_\beta Q,Z\right\rangle+\tilde{\Theta}(\beta,Z)=0$$
$$\beta=\frac{\partial S}{\partial Q}\Rightarrow\left\langle ad^*_{\frac{\partial S}{\partial Q}}Q,Z\right\rangle+\tilde{\Theta}\left(\frac{\partial S}{\partial Q},Z\right)=\left\langle ad^*_{\frac{\partial S}{\partial Q}}Q+\Theta\left(\frac{\partial S}{\partial Q}\right),Z\right\rangle=0,\forall Z$$
$$\Rightarrow ad^*_{\frac{\partial S}{\partial Q}}Q+\Theta\left(\frac{\partial S}{\partial Q}\right)=0$$

$H^0[\Omega]=Casim(M)$ est l'ensemble des fonctions de Casimir sur M, liée à cohomologie de Rham et la cohomologie de Poisson introduite par J.L. Koszul.

4 Références

[1] Souriau J-M., Mécanique statistique, groupes de Lie et cosmologie. Col. Int. CNRS "Géométrie symplectique et physique Mathématique", Aix-en-Provence 1974

[2] Barbaresco F., Jean-Marie Souriau's Symplectic Model of Statistical Physics : Seminal papers on Lie Groups Thermodynamics. SPIGL'20, Springer 2021

[3] Barbaresco, F. Koszul lecture related to geometric and analytic mechanics, Souriau's Lie group thermodynamics and information geometry. Information Geometry Journal SPRINGER, 13th January 2021

[4] Barbaresco, F. ,Symplectic Theory of Heat and Information Geometry, Handbook of statistics n°46 "Geometry and Statistics", Elsevier, July 1, 2022