

# Une approche convexe de la super-résolution et de la régularisation de lignes dans les images

Kévin POLISANO<sup>1</sup>, Laurent CONDAT<sup>2</sup>, Marianne CLAUSEL<sup>1</sup>, Valérie PERRIER<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Univ. Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble INP, Laboratoire Jean Kuntzmann, 38000 Grenoble, France

<sup>2</sup>Univ. Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble INP, Gipsa-lab, 38000 Grenoble, France

{Kevin.Polisano, Valerie.Perrier, Marianne.Clausel}@univ-grenoble-alpes.fr,  
Laurent.Condat@gipsa-lab.grenoble-inp.fr

**Résumé** – Nous présentons dans ce papier une approche convexe du problème de la reconstruction de lignes dans les images. Suivant le paradigme récent de la super-résolution, nous considérons une pénalisation basée sur une norme atomique et nous résolvons ce problème d’optimisation au moyen d’un algorithme primal-dual. Ce modèle parcimonieux permet la reconstruction de lignes à partir de mesures basse résolution, même en présence d’un niveau élevé de bruit ou de flou de diffraction. En outre, une méthode de Prony appliquée sur les lignes et les colonnes de l’image restaurée fournit une estimation spectrale des paramètres des lignes à détecter, avec une précision sous-pixelique.

**Abstract** – We present a convex formulation for the problem of recovering lines in degraded images. Following the recent paradigm of super-resolution, we formulate a dedicated atomic norm penalty and we solve this optimization problem by means of a primal-dual algorithm. This parsimonious model enables the reconstruction of lines from lowpass measurements, even in presence of a large amount of noise or blur. Furthermore, a Prony method applied to the rows and columns of the restored image, provides a spectral estimation of the line parameters, with subpixel accuracy.

## 1 Introduction

Les problèmes inverses pour la reconstruction d’images sont généralement mal posés et doivent être régularisés. Ils peuvent être formulés sous forme d’un problème d’optimisation convexe combinant un terme d’attache aux données et un terme de régularisation. Typiquement, étant donné  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}^\sharp + \epsilon$ , pour une image inconnue  $\mathbf{x}^\sharp$  à caractériser, l’opérateur d’observation  $\mathbf{A}$  connu et du bruit  $\epsilon$ , on cherche à résoudre le problème :

$$\text{Trouver } \tilde{\mathbf{x}} \in \arg \min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 + \lambda R(\mathbf{x}), \quad (1)$$

où  $\lambda$  négocie le compromis entre l’attache aux données et la régularisation par la fonctionnelle convexe  $R$  favorisant une forme de parcimonie. Ainsi,  $R$  est choisie comme étant une *norme atomique*  $\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}}$  de l’image à reconstruire  $\mathbf{x}$  [1], qui correspond à la norme  $\ell_1$  des coefficients lorsque l’image se décompose simplement en une combinaison positive d’*atomes* dans un dictionnaire  $\mathcal{A}$ , et est définie comme une *jauge* de  $\mathcal{A}$  :

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}} = \inf \{t \geq 0 : \mathbf{x} \in t \operatorname{conv}(\mathcal{A} \cup -\mathcal{A})\}, \quad (2)$$

où  $\operatorname{conv}(\mathcal{A})$  est l’enveloppe convexe de ces atomes. En effet, en choisissant les atomes comme type d’éléments que nous souhaitons promouvoir dans les images, nous pouvons les estimer de manière robuste à partir de mesures dégradées, et ceci avec une précision infinie en l’absence de bruit. Les méthodes qui atteignent cet objectif sont qualifiées de méthodes de *super-résolution*, car elles révèlent des niveaux de détails perdus dans

l’image, au-delà de la limite de résolution de Rayleigh du système d’acquisition. Dans cet article, nous considérons comme atomes des *lignes*, caractérisées en Fourier par des contraintes 1D dans les directions horizontale et verticale de l’image, et formulées à partir d’un dictionnaire d’exponentielles. Cette approche permettra la restauration puis l’estimation des lignes avec une très grande précision par une méthode de Prony.

## 2 Formulation du problème

### 2.1 Définition des lignes dans le domaine continu

Soit  $W$  un entier impair et  $\mathbb{P} = \mathbb{R}/(W\mathbb{Z}) \times \mathbb{R}$  le plan 2D étant  $W$ -périodisé horizontalement. Une ligne parfaite, d’angle  $\theta \in (-\pi/2, \pi/2]$  par rapport à l’axe vertical, d’amplitude  $\alpha > 0$  et coupant l’axe des abscisses en  $\eta \in \mathbb{R}$  par rapport à l’origine, peut être définie comme une distribution tempérée, qui à une fonction  $\psi$  dans la classe de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$  associe son intégrale le long de la ligne géométrique  $\mathcal{L} = \{(t_1, t_2) \in \mathbb{P} : (t_1 - \eta) \cos \theta + t_2 \sin \theta = 0\}$ , c.-à-d.  $\alpha \int_{\mathcal{L}} \psi(t_1, t_2) dt_1 dt_2$ . Ainsi, par abus de notation, nous pouvons définir la ligne par :

$$(t_1, t_2) \in \mathbb{P} \mapsto \alpha \delta((t_1 - \eta) \cos \theta + t_2 \sin \theta), \quad (3)$$

où  $\delta$  est la distribution de Dirac. On définit la distribution  $x^\sharp$ , somme de  $K$  lignes parfaites distinctes, pour un entier  $K \geq 1$  donné, comme la distribution tempérée suivante :

$$x^\sharp : (t_1, t_2) \in \mathbb{P} \mapsto \sum_{k=1}^K \alpha_k \delta((t_1 - \eta_k) \cos \theta_k + t_2 \sin \theta_k). \quad (4)$$

**Hypothèse 1** On suppose dans un premier temps que les lignes sont plutôt verticales, c.-à-d.,  $\forall k = 1, \dots, K, \theta_k \in (-\pi/4, \pi/4]$ .

L'image observée  $\mathbf{b}^\sharp$  de taille  $W \times H$  est obtenue par la convolution de la distribution  $x^\sharp$  avec un noyau de flou  $\phi$ , suivie d'un échantillonnage régulier :

$$\begin{aligned} \mathbf{b}^\sharp[n_1, n_2] &= (x^\sharp * \phi)(n_1, n_2), \\ \forall n_1 &= 0, \dots, W-1, \quad n_2 = 0, \dots, H-1. \end{aligned} \quad (5)$$

La fonction d'étalement du point (PSF)  $\phi$  est supposée séparable, c.-à-d. que  $\phi(t_1, t_2) = \varphi_1(t_1)\varphi_2(t_2)$ . Ainsi, la fonction  $x^\sharp * \phi$  s'obtient par une première convolution horizontale avec  $\varphi_1$ , suivie d'une seconde convolution verticale avec  $\varphi_2$ .

**Hypothèses.** Supposons que  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  possèdent les propriétés :

- (i)  $\varphi_1 \in L^1(0, W)$  est  $W$ -périodique, bornée,  $\frac{1}{W} \int_0^W \varphi_1 = 1$  et à bande limitée, c.-à-d. ses coefficients de Fourier  $c_m(\varphi_1) = \frac{1}{W} \int_0^W \varphi_1(t_1) e^{-j2\pi m t_1 / W} dt_1$  sont nuls pour tout  $m \in \mathbb{Z}$  où  $|m| \geq (W+1)/2 = M+1$ . Le filtre discret  $\mathbf{g}[n] = \varphi_1(n)$  a pour coefficients de Fourier discrets  $\widehat{\mathbf{g}}[m] = \frac{1}{W} \sum_{n=0}^{W-1} \mathbf{g}[n] e^{-j\frac{2\pi m n}{W}} = c_m(\varphi_1)$ .
- (ii)  $\varphi_2 \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $\int_{\mathbb{R}} \varphi_2 = 1$  et à bande limitée telle que le filtre discret  $\mathbf{h}[n] = \varphi_2(n)$  ait un support compact de taille  $2S+1$ , avec  $S \in \mathbb{N}$ , c.-à-d.,  $\mathbf{h}[n] = 0$  si  $|n| \geq S+1$ .

Nous insistons sur le fait qu'aucune approximation discrète n'a été faite au cours du procédé d'acquisition passant d'une formulation continue à une formule discrète, conséquence des hypothèses (i), (ii) et 1. Nous apportons cette garantie dans [2] et montrons comment la restriction imposée par l'hypothèse 1 peut être levée et les hypothèses (i) et (ii) affaiblies.

## 2.2 Vers un problème inverse en Fourier

Caractérisons l'image  $\widehat{\mathbf{b}}^\sharp$  correspondant à la transformée de Fourier discrète (TFD) de  $\mathbf{b}^\sharp$  selon sa première composante. Pour cela notons  $H_S = H + 2S$  et  $\widehat{\mathbf{x}}^\sharp$  l'image de taille  $W \times H_S$  obtenue par échantillonnage de la transformée de Fourier horizontale  $\widehat{x}^\sharp = \mathcal{F}_1 x^\sharp$ , composée de sommes d'exponentielles :

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{x}}^\sharp[m, n_2] &= \sum_{k=1}^K \frac{\alpha_k}{\cos \theta_k} e^{j2\pi(n_2 \tan \theta_k - \eta_k) \frac{m}{W}}, \\ m &= -M, \dots, M, \quad n_2 = -S, \dots, H-1+S. \end{aligned} \quad (6)$$

**Proposition 1** Soit  $\mathbf{A}$  l'opérateur qui pour tout  $m = 0, \dots, M$  multiplie chaque vecteur ligne  $\widehat{\mathbf{x}}^\sharp[m, :]$  de  $\widehat{\mathbf{x}}^\sharp$  par le coefficient de Fourier correspondant  $\widehat{\mathbf{g}}[m]$  et le convolue avec le filtre réel  $\mathbf{h} = (h_{-S}, \dots, h_0, \dots, h_S)$ . Alors, on a la relation [2] :

$$\mathbf{A} \widehat{\mathbf{x}}^\sharp = \widehat{\mathbf{b}}^\sharp \Leftrightarrow \widehat{\mathbf{g}}[m](\widehat{\mathbf{x}}^\sharp[m, :] * \mathbf{h}) = \widehat{\mathbf{b}}^\sharp[m, :], \forall m. \quad (7)$$

Enfin, l'image  $\mathbf{b}^\sharp$  des lignes floues est affectée par du bruit, de sorte que nous observons l'image dégradée

$$\mathbf{y} = \mathbf{b}^\sharp + \boldsymbol{\epsilon}, \quad \boldsymbol{\epsilon} \sim \mathcal{N}(0, \zeta), \quad (8)$$

où  $\zeta$  est le niveau de bruit. Ainsi, le problème consiste à reconstruire  $\widehat{\mathbf{x}}^\sharp$  à partir de  $\widehat{\mathbf{y}}$ , ce qui prend la forme, au travers de l'opérateur linéaire  $\mathbf{A}$ , d'un problème inverse mal posé. Ainsi, nous

résolvons un problème de minimisation convexe  $\|\widehat{\mathbf{y}} - \mathbf{A} \widehat{\mathbf{x}}^\sharp\|$ , sous contraintes exploitant la structure parcimonieuse du signal, à savoir qu'il s'agit d'une combinaison de lignes. Le principe de super-résolution consiste à récupérer le contenu haute fréquence (perdu du fait de l'opérateur de flou) de l'image dégradée  $\mathbf{y}$ , ce qui peut être vu comme un procédé d'extrapolation spectrale. Enfin dans un deuxième temps, après reconstruction, nous effectuons une estimation des  $K$  paramètres  $(\theta_k, \eta_k, \alpha_k)$  de ces lignes à partir de  $\widehat{\mathbf{x}}^\sharp$  par des méthodes de type Prony.

## 3 Super-résolution de lignes

### 3.1 Normes atomiques et caractérisation SDP

La solution recherchée  $\widehat{\mathbf{x}}^\sharp$  (6) s'exprime comme une combinaison  $\widehat{\mathbf{x}}^\sharp = \sum_{k=1}^K \alpha_k \mathbf{a}_{2D}(\theta_k, \eta_k)$  dans un dictionnaire  $\mathcal{A}_{2D}$  d'atomes  $\mathbf{a}_{2D}(\theta_k, \eta_k)$ , qui sont des matrices de taille  $W \times H_S$ . L'inconvénient est qu'il n'y a pas, à notre connaissance, de procédure permettant de calculer la norme atomique (2) dans ce dictionnaire 2D. En revanche, dans le cas 1D d'un dictionnaire d'exponentielles complexes, on dispose d'une telle procédure via le recours à un programme semi-défini positif [1]. Ainsi, on se ramène à un problème 1D en reformulant le problème sur les lignes et les colonnes de l'image, à partir du dictionnaire des exponentielles complexes suivant :

$$\mathcal{A} = \left\{ \mathbf{a}(f, \phi) \in \mathbb{C}^{|I|}, \quad f \in [0, 1], \quad \phi \in [0, 2\pi) \right\}, \quad (9)$$

dans lequel les atomes  $\mathbf{a}(f, \phi)$  sont des vecteurs de composantes  $[\mathbf{a}(f, \phi)]_i = e^{j(2\pi f i + \phi)}$ ,  $i \in I$ , et notés  $[\mathbf{a}(f)]_i = e^{j2\pi f i}$ ,  $i \in I$ , dans le cas où  $\phi = 0$ . La norme atomique s'écrit

$$\|\mathbf{z}\|_{\mathcal{A}} = \inf_{\substack{c'_k \geq 0 \\ f'_k \in [0, 1] \\ \phi'_k \in [0, 2\pi)}} \left\{ \sum_k c'_k : \mathbf{z} = \sum_k c'_k \mathbf{a}(f'_k, \phi'_k) \right\}. \quad (10)$$

Nous rappelons ci-après le théorème de Carathéodory :

**Théorème 1** Un vecteur  $\mathbf{z} = (z_{N-1}^*, \dots, z_1^*, z_0, z_1, \dots, z_{N-1})$  de longueur  $2N-1$ , avec  $z_0 \in \mathbb{R}$ , est une combinaison positive de  $K \leq N$  atomes  $\mathbf{a}(f_k)$  si et seulement si  $\mathbf{T}_N(\mathbf{z}_+) \succeq 0$  et est de rang  $K$ , où  $\mathbf{z}_+ = (z_0, \dots, z_{N-1})$  est de longueur  $N$ ,  $\mathbf{T}_N : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathcal{T}_N \subset \mathbb{C}^{N \times N}$  est l'opérateur de Toeplitz

$$\mathbf{T}_N : \mathbf{z}_+ = (z_0, \dots, z_{N-1}) \mapsto \begin{pmatrix} z_0 & z_1^* & \cdots & z_{N-1}^* \\ z_1 & z_0 & \cdots & z_{N-2}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{N-1} & z_{N-2} & \cdots & z_0 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

avec  $\mathcal{T}_N$  l'espace de Hilbert des matrices Toeplitz hermitiennes et  $\succeq 0$  désignant la positivité de la matrice. De plus, cette décomposition est unique si  $K < N$ .

**Proposition 2** La norme atomique  $\|\mathbf{z}\|_{\mathcal{A}}$  est caractérisée par le programme semi-défini positif (SDP) [2] :

$$\|\mathbf{z}\|_{\mathcal{A}} = \min_{\mathbf{q} \in \mathbb{C}^N, q_0 \in \mathbb{R}} \left\{ q_0 : \mathbf{T}'_N(\mathbf{z}, \mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_N(\mathbf{q}) & \mathbf{z} \\ \mathbf{z}^* & q_0 \end{pmatrix} \succeq 0 \right\}, \quad (12)$$

avec  $\mathbf{T}'_N : \mathbb{C}^{2N} \rightarrow \mathcal{T}_{N+1} \subset \mathbb{C}^{(N+1) \times (N+1)}$  et  $q_0$  le premier élément de  $\mathbf{q} = (q_0, \dots, q_{N-1}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^{N-1}$ .

Exprimées dans ce paradigme, les colonnes  $\mathbf{l}_{n_2}^\sharp$  et les lignes  $\mathbf{t}_m^\sharp$  de la matrice  $\widehat{\mathbf{x}}^\sharp$  s'écrivent  $\mathbf{l}_{n_2}^\sharp = \sum_{k=1}^K c_k \mathbf{a}(f_{n_2,k})$  ainsi que  $\mathbf{t}_m^\sharp = \sum_{k=1}^K c_k \mathbf{a}(f_{m,k}, \phi_{m,k})^\top$  avec

$$\begin{aligned} f_{n_2,k} &= \frac{n_2 \tan \theta_k - \eta_k}{W}, & f_{m,k} &= \frac{m \tan \theta_k}{W}, \\ c_k &= \frac{\alpha_k}{\cos \theta_k}, & \phi_{m,k} &= -\frac{2\pi m \eta_k}{W}, & d_{m,k} &= c_k e^{j\phi_{m,k}}. \end{aligned} \quad (13)$$

On peut alors calculer leur norme atomique :

- $\|\mathbf{l}_{n_2}^\sharp\|_{\mathcal{A}} = \sum_{k=1}^K c_k = \widehat{\mathbf{x}}^\sharp[0, n_2]$  (Carathéodory)
- $\|\mathbf{t}_m^\sharp\|_{\mathcal{A}} \leq \sum_{k=1}^K c_k \stackrel{\text{def}}{=} c^\sharp$  (Proposition 2)

Soit  $\mathbf{z} = (z_0, \dots, z_{N-1})$  un vecteur complexe dont les éléments  $z_i$  sont réarrangés dans une matrice Toeplitz  $\mathbf{P}_K(\mathbf{z})$  de taille  $(N-K) \times (K+1)$  et de rang  $K$  :

$$\mathbf{P}_K(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} z_K & \cdots & z_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{N-1} & \cdots & z_{N-K-1} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Analysons le cas d'une ligne ( $K=1$ ) de paramètres  $(\theta, \eta, \alpha)$ . On démontre une caractérisation de la ligne en Fourier [2] :

**Proposition 3**  $\widehat{\mathbf{x}}$  est telle que  $\widehat{\mathbf{x}}[m, n] = c_1 e^{j2\pi((f_1 - f_0)n + f_0)m}$  si et seulement si les colonnes  $\mathbf{l}_n$  et les lignes  $\mathbf{t}_m$  de  $\widehat{\mathbf{x}}$  sont telles que  $\mathbf{T}_M(\mathbf{l}_n)$  est positive et de rang 1,  $\mathbf{P}_1(\mathbf{t}_m)$  est de rang 1 et  $\widehat{\mathbf{x}}[0, n] = \widehat{\mathbf{x}}[0, 0]$  pour tout  $m$  et  $n$ . ( $f_0 = -\frac{\eta}{W}$ ,  $f_1 = \frac{\tan \theta - \eta}{W}$ ).

Par ailleurs, puisque les matrices  $\mathbf{T}_M(\mathbf{a}(f_{n_2,k}))$  ne contiennent que des 1 sur la diagonale, on a  $\frac{1}{M} \text{tr}(\mathbf{T}_M(\mathbf{l}_{n_2}^\sharp)) = \sum_{k=1}^K c_k$ . De plus, la trace d'une matrice positive étant égale à sa norme nucléaire, on a donc  $\|\mathbf{T}_M(\mathbf{l}_{n_2}^\sharp)\|_* = M \sum_{k=1}^K c_k = M \|\mathbf{l}_{n_2}^\sharp\|_{\mathcal{A}}$ . La norme nucléaire est souvent utilisée comme approximation convexe du rang d'une matrice. Par conséquent, on considère dans la suite une relaxation convexe de la caractérisation de ligne fournie par la Proposition 3, dans laquelle la contrainte de faible rang de  $\mathbf{T}_M(\mathbf{l}_{n_2}^\sharp)$  est remplacée par la minimisation de la norme atomique  $\|\mathbf{l}_{n_2}^\sharp\|_{\mathcal{A}}$ . Puisque le minimum est atteint en  $c^\sharp$  et que la norme atomique se lit sur la première ligne de  $\widehat{\mathbf{x}}^\sharp$ , on impose comme contrainte  $\widehat{\mathbf{x}}^\sharp[0, n_2] = \widehat{\mathbf{x}}^\sharp[0, 0] \leq c^\sharp$ . On fait de même pour les lignes  $\mathbf{t}_m^\sharp$ . Moralement, la Proposition 3 supporte notre stratégie de reformulation du problème 2D se ramenant à des problèmes 1D opérant simultanément sur les lignes et les colonnes de l'image. Nous n'avons pas démontré de pareilles caractérisations dans le cas général  $K \geq 2$ , qui est un problème difficile, mais la philosophie reste la même : minimiser simultanément les normes atomiques des lignes et colonnes, de sorte à promouvoir une solution qui soit composée de sommes finies d'exponentielles dans les deux directions.

### 3.2 Minimisation convexe avec régularisation par la norme atomique

Étant donné l'opérateur  $\mathbf{A} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  défini à la Proposition 1, on cherche une solution  $\widehat{\mathbf{x}} \in \mathcal{X}$  minimisant  $\|\mathbf{A}\widehat{\mathbf{x}} - \widehat{\mathbf{y}}\|_{\mathcal{Y}}$

et les normes atomiques de ses lignes et colonnes. On fixe une constante  $c \leq c^\sharp$ . La solution du problème d'optimisation convexe suivant fournit un estimateur de  $\widehat{\mathbf{x}}^\sharp$  définie en (6) :

$$\widehat{\mathbf{x}} \in \arg \min_{(\widehat{\mathbf{x}}, \mathbf{q}) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Q}} \frac{1}{2} \|\mathbf{A}\widehat{\mathbf{x}} - \widehat{\mathbf{y}}\|_{\mathcal{Y}}^2, \quad (15)$$

$$\text{tel que } \begin{cases} \widehat{\mathbf{x}}[0, n_2] = \widehat{\mathbf{x}}[0, 0] \leq c, & (16a) \\ \mathbf{q}[m, 0] \leq c, & (16b) \\ \mathbf{T}_{M+1}(\widehat{\mathbf{x}}[:, n_2]) \succcurlyeq 0, & (16c) \\ \mathbf{T}'_{H_S}(\widehat{\mathbf{x}}[m, :], \mathbf{q}[m, :]) \succcurlyeq 0, & (16d) \\ \forall n_2 = 0, \dots, H_S - 1, \forall m = 1, \dots, M, \end{cases}$$

**Remarque 1** On dispose d'une estimation de  $c^\sharp$  par (7) puisque  $\widehat{\mathbf{b}}^\sharp[0, n_2] = c^\sharp, \forall n_2$ . Ainsi,  $\widehat{\mathbf{y}}[0, n_2] = \widehat{\mathbf{b}}^\sharp[0, n_2] + \widehat{\mathbf{e}}$  avec  $\mathbb{E}(\widehat{\mathbf{e}}) = 0$ , donc l'estimation s'obtient simplement en faisant la moyenne de la première ligne  $c \equiv \frac{1}{H} \sum_{n_2=0}^{H-1} \widehat{\mathbf{y}}[0, n_2] \approx c^\sharp$ .

Ce problème d'optimisation peut se réécrire à partir de la forme générique suivante [3] :

$$\widehat{\mathbf{X}} = \arg \min_{\mathbf{X} \in \mathcal{H}} \left\{ F(\mathbf{X}) + G(\mathbf{X}) + \sum_{i=0}^{Q-1} H_i(\mathbf{L}_i(\mathbf{X})) \right\}, \quad (17)$$

avec  $F(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{A}\widehat{\mathbf{x}} - \widehat{\mathbf{y}}\|_{\mathcal{Y}}^2$  différentiable représentant l'attache aux données,  $\mathbf{X} = (\widehat{\mathbf{x}}, \mathbf{q})$ ,  $G$  proximable représentant les contraintes aux bords (16a)-(16b),  $Q = M + H_S$  termes composites où les  $\mathbf{L}_i$  représentent les opérateurs linéaires de Toeplitz et  $H_i = \iota_{\mathcal{C}}$  les projections sur le cône convexe des matrices positives traduisant les contraintes (16c)-(16d). Nous renvoyons vers [2] pour les développements techniques et les algorithmes proximaux convergeant vers la solution.

**Inpainting.** Le modèle supporte l'ajout de zones d'occultations : l'opérateur  $\mathbf{M}$  applique un masque binaire à l'image en spatial, c.-à-d. après symétrisation horizontale par l'opérateur  $\mathbf{S}_1$  et transformée de Fourier horizontale inverse  $\mathcal{F}_1^{-1}$ , masque dont les pixels à zéro correspondent aux observations occultées. Le terme d'attache aux données considéré devient alors :

$$F(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{M}\mathcal{F}_1^{-1}\mathbf{S}_1\mathbf{A}\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\|_{\mathbb{F}}^2. \quad (18)$$

### 3.3 Estimation des paramètres des lignes

La seconde étape consiste, à partir de la solution  $\widehat{\mathbf{x}}$  du problème de minimisation (15), à estimer les triplets  $(\theta_k, \alpha_k, \eta_k)$  caractérisant les  $K$  lignes. Cette étape requiert l'utilisation d'une méthode dite d'estimation spectrale, qui d'un vecteur complexe  $\mathbf{z} = (z_0, \dots, z_{N-1})$  composé de sommes d'exponentielles

$$z_i = \sum_{k=1}^K d_k (e^{j2\pi f_k})^i, \quad \forall i \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket, \quad N \geq 2K + 1, \quad (19)$$

extraît les  $2K$  paramètres  $d_k \in \mathbb{C}$  et  $f_k \in [-1/2, 1/2)$ . Typiquement, ESTIMSPEC( $\mathbf{z}, K$ ) implémente la méthode de Prony-TLS [4] qui renvoie les fréquences estimées  $\tilde{f}_k$ . Les amplitudes  $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_K)$  sont estimées par les moindres carrés :

$$\tilde{\mathbf{d}} = (\tilde{\mathbf{U}}^* \tilde{\mathbf{U}})^{-1} \tilde{\mathbf{U}}^* \mathbf{z}, \quad \text{avec } \tilde{\mathbf{U}} = (\mathbf{a}(\tilde{f}_1) \cdots \mathbf{a}(\tilde{f}_K)). \quad (20)$$

En appliquant cette méthode de Prony (*cf.* Algorithme 1) sur les lignes  $\tilde{\mathbf{x}}[m, :]$  de la solution  $\tilde{\mathbf{x}}$ , on peut obtenir une estimation des paramètres  $\theta_k$  des lignes, puisque d'après (13)

$$\tilde{\mathbf{x}}^\sharp[m, :] = \sum_{k=1}^K d_{m,k} \mathbf{a}(f_{m,k})^\top, \quad (21)$$

et les fréquences sont reliées aux angles par  $f_{m,k} = \frac{\tan \theta_k}{W} m$ . Une régression linéaire sur les lignes d'indice  $m \geq m_0$  permet d'espacer suffisamment les fréquences et d'estimer les  $\tan \theta_k$ . Les estimations jointes des  $d_{m,k}$  permettent à leur tour d'accéder aux  $\eta_k$ , en appliquant la méthode de Prony aux normalisées

$$e_{m,k} = d_{m,k} / |d_{m,k}| = \left( e^{-j2\pi\eta_k/W} \right)^m. \quad (22)$$

Enfin, en posant  $\tilde{\mathbf{A}}_k = \mathbf{A} \mathbf{a}_{2D}(\tilde{\theta}_k, \tilde{\eta}_k)$ , on estime les intensités  $\alpha_k$  en résolvant de nouveau un problème des moindres carrés :

$$(\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_K) = \arg \min_{\alpha_1, \dots, \alpha_K} \left\| \sum_{k=1}^K \alpha_k \tilde{\mathbf{A}}_k - \tilde{\mathbf{y}} \right\|^2. \quad (23)$$

---

#### Algorithm 1 Extraction des paramètres de lignes

---

**Input:**  $\tilde{\mathbf{x}}$  solution du problème d'optimisation (15)

**Output:**  $\{\tilde{\theta}_k\}_{k=1}^K, \{\tilde{\eta}_k\}_{k=1}^K, \{\tilde{\alpha}_k\}_{k=1}^K$  paramètres estimés.

- 1: Estimer  $K$  par le rang des matrices  $\mathbf{T}_{M+1}(\tilde{\mathbf{x}}[:, n_2])$ .
  - 2: **for**  $m = 1$  **to**  $M$  **do**
  - 3: Estimer et trier  $\{\tilde{f}_{m,k}\}_{k=1}^K \leftarrow \text{ESTIMSPEC}(\tilde{\mathbf{x}}[m, :], K)$ .
  - 4: **end for**
  - 5: **for**  $k = 1$  **to**  $K$  **do**
  - 6: Estimer  $\tan \tilde{\theta}_k$  par régression linéaire sur  $\{\tilde{f}_{m,k}\}_{m \geq m_0}$ .
  - 7: **end for**
  - 8: **for**  $m = 1$  **to**  $M$  **do**
  - 9:  $\tilde{\mathbf{U}}_m \leftarrow (\mathbf{a}(\tan \tilde{\theta}_1 m/W) \cdots \mathbf{a}(\tan \tilde{\theta}_K m/W))$ .
  - 10:  $\tilde{\mathbf{d}}_m \leftarrow (\tilde{d}_{m,1}, \dots, \tilde{d}_{m,K})^\top = (\tilde{\mathbf{U}}_m^* \tilde{\mathbf{U}}_m)^{-1} \tilde{\mathbf{U}}_m^* \tilde{\mathbf{x}}[m, :]$ .
  - 11:  $\tilde{e}_{m,k} \leftarrow \tilde{d}_{m,k} / |\tilde{d}_{m,k}|$ .
  - 12: **end for**
  - 13: **for**  $k = 1$  **to**  $K$  **do**
  - 14:  $\tilde{\eta}_k \leftarrow W * \text{ESTIMSPEC}(\{\tilde{e}_{m,k}\}_{m \geq m_0}, 1)$ .
  - 15: **end for**
  - 16: Estimer les amplitudes  $\{\tilde{\alpha}_k\}_{k=1}^K$  par moindre carrés (23).
- 

## 4 Expériences numériques

On considère une image  $\mathbf{b}^\sharp$  de taille  $W = H = 65$  contenant des lignes  $x^\sharp$  convoluées par un noyau gaussien  $\phi$  séparable, soit en discret par les filtres  $\mathbf{g}$  et  $\mathbf{h}$  approchant une gaussienne  $\varphi : t \mapsto (2\pi\kappa^2)^{-1/2} \exp(-t^2/(2\kappa^2))$  sur  $[-S, S]$  avec  $S = \lceil 4\kappa \rceil - 1$ . L'image observée  $\mathbf{y} = \mathbf{b}^\sharp + \epsilon$  est affectée par du bruit  $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, 20)$  et du flou  $\kappa = 1$ . Trois expériences numériques sont illustrées Figure 1 : 1) sept lignes bien séparées et d'intensités différentes (a), reconstruites selon les deux étapes de débruitage par minimisation (b) et d'estimation des paramètres par Prony (c) ; 2) deux lignes très proches reconstruites de même (d)-(e)-(f) ; et 3) trois lignes occultées par un masque rectangulaire (g) ou aux entrées binaires préservant aléatoirement 5% des pixels (h) et étant reconstruites par *inpainting* (i).

## 5 Conclusion

Nous avons proposé une formulation variationnelle pour le problème de la reconstruction de lignes dans des images dégradées, en utilisant le cadre de la minimisation de la norme atomique. L'estimation des paramètres de lignes, vivant dans un continuum, est effectuée par une méthode de type Prony, avec une précision infinie en l'absence de bruit. Contrairement aux transformées de Hough et Radon, notre méthode n'est pas limitée par la nature discrète de l'image ni par sa taille finie et atteint des précisions sous-pixelliques. Dans le futur, nous envisageons d'appliquer l'approche proposée aux images biomédicales contenant des structures incurvées, comme des tubulines, en opérant localement sur des patches.

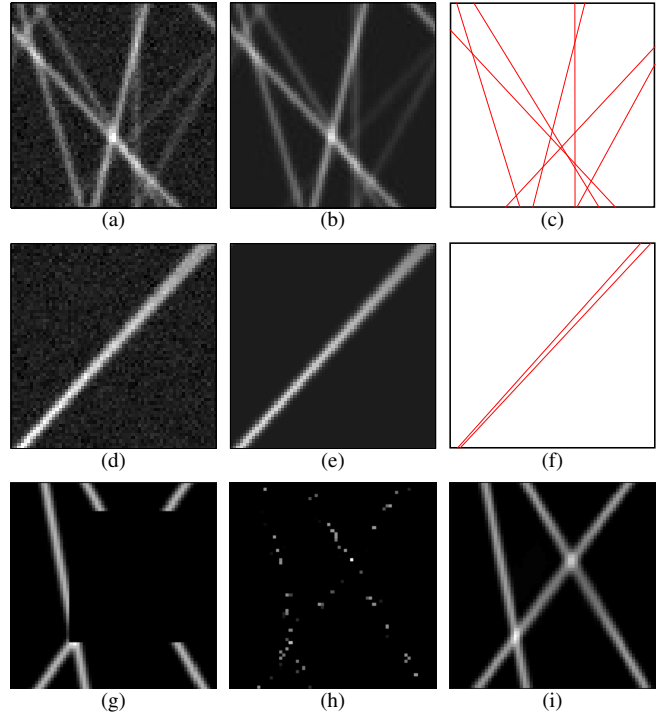


FIGURE 1 – Trois expériences de reconstruction de lignes.

## Références

- [1] B. N. Bhaskar, G. Tang, and B. Recht. Atomic norm denoising with applications to line spectral estimation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 61(23) :5987–5999, 2013.
- [2] K. Polisoano, L. Condat, M. Clausel, and V. Perrier. A convex approach to superresolution and regularization of lines in images. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 12(1) :211–258, 2019.
- [3] L. Condat. A primal-dual splitting method for convex optimization involving lipschitzian, proximable and linear composite terms. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 158(2) :460–479, 2013.
- [4] M. D. Rahman and K. B. Yu. Total least squares approach for frequency estimation using linear prediction. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 35(10) :1440–1454, 1987.