

Une approche basée incertitude pour transporter un signal d'un graphe à un autre

Bastien PASDELOUP, Hermina PETRIC MARETIC, Mireille EL GHECHE, Pascal FROSSARD *

Laboratoire de Traitement du Signal (LTS4)
École Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL), CH-1015 Lausanne, Suisse
prenom.nom@epfl.ch

Résumé – Dans cet article, nous proposons une nouvelle approche pour transporter un signal d'un graphe source à un graphe cible. Pour ce faire, nous créons sur le graphe cible un signal *proxy* ayant les mêmes propriétés de concentration, dans le graphe et dans le spectre, que le signal sur le graphe source. Le signal *proxy* ainsi créé pourra ensuite être, par exemple, utilisé afin de mesurer une distance entre le signal qu'il représente et un autre signal sur le graphe cible, et ainsi permettre d'identifier un même phénomène observé sur deux graphes différents.

Abstract – In this article, we propose a novel approach to transport a signal from a source graph to a target graph. To do so, we create a signal on the target graph that serves as a proxy for the signal on the source graph, with the same localization properties as the signal it represents, both in the graph and spectral domains. The proxy signal can then be used to represent the source signal, for instance in the computation of a distance, in order to identify a same phenomenon measured over two different graphs.

1 Introduction

Les graphes fournissent un cadre idéal pour l'étude de nombreux domaines, allant par exemple d'un réseau routier, aux liens d'amitié au sein d'un réseau social. Le domaine du traitement du signal sur graphe (TSG) complète ce cadre, en permettant d'étudier des valeurs réelles observées en chaque nœud d'un graphe, *i.e.*, un signal sur le graphe. Un signal sur un graphe de réseau routier peut, par exemple, représenter le nombre moyen de véhicules transitant par chaque carrefour, et donc encoder des informations sur le trafic et la congestion. L'analyse et le traitement de tels signaux permet d'étendre l'approche classique en traitement du signal à de nouveaux domaines, et d'expliquer des phénomènes complexes via des outils analogues à ceux utilisés pour les signaux temporels [8, 5].

Classiquement, les signaux sur des graphes sont étudiés et traités sur une topologie unique. Le problème où l'on souhaite comparer divers signaux (modélisant possiblement un même phénomène) sur des graphes différents, n'a à notre connaissance pas été étudié. La comparaison de signaux vivant sur des graphes distincts pourrait, si l'on reprend l'exemple du graphe routier énoncé ci-dessus, permettre de déterminer qu'une situation de congestion observée dans une ville est équivalente à une autre telle situation dans une autre ville, et donc de développer des modèles d'étude de la densité de trafic. Un autre exemple d'application possible est le transport de signaux définis sur des graphes irréguliers vers des espaces réguliers, afin de les classifier via des outils type réseaux de neurones convolutifs.

Nous introduisons une nouvelle méthodologie qui permet, à partir d'un signal \mathbf{x}_1 sur un graphe \mathcal{G}_1 , de créer un signal *proxy* \mathbf{x}'_1 sur un graphe \mathcal{G}_2 , de telle sorte que \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}'_1 offrent le même compromis en terme de localité au sein des graphes et de leurs spectres. Le signal \mathbf{x}'_1 peut ensuite être comparé à un signal sur \mathcal{G}_2 via une fonction de distance sur un graphe (*e.g.*, [7]).

Cet article est organisé comme suit : la Section 2, introduit les notions nécessaires à la compréhension de l'approche proposée ; ensuite, la Section 3 donne les détails de notre contribution ; enfin, la Section 4 illustre l'intérêt de notre méthode via un exemple de partitionnement de signaux.

2 Travaux connexes

Notre objectif dans cet article est de proposer une méthodologie pour transporter un signal $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^{N_1}$ d'un graphe $\mathcal{G}_1 = (\mathcal{V}_1, \mathcal{E}_1)$ d'ordre $|\mathcal{V}_1| = N_1$, vers un autre graphe $\mathcal{G}_2 = (\mathcal{V}_2, \mathcal{E}_2)$ d'ordre $|\mathcal{V}_2| = N_2$, avec possiblement $N_1 \neq N_2$. Ce problème est mal posé, ainsi on peut imaginer un grand nombre de manières d'atteindre ce but, comme par exemple approximer le spectre de \mathbf{x}_1 par une fonction continue, que l'on discrétise ensuite en chaque valeur propre du spectre de \mathcal{G}_2 . Des auteurs se sont penchés sur la transférabilité de certains signaux d'un graphe à l'autre [4], mais ils ne fournissent qu'une borne sur la déformation d'un signal généré par un même filtre en fonction de la différence entre les graphes respectifs.

Dans l'approche proposée ici, nous choisissons de créer pour \mathbf{x}_1 un signal *proxy* $\mathbf{x}'_1 \in \mathbb{R}^{N_2}$ sur \mathcal{G}_2 qui préserve le compromis de localité de \mathbf{x}_1 dans les domaines du graphe du spectre. On peut ensuite traiter \mathbf{x}_1 comme un signal sur \mathcal{G}_2 via son re-

* Ces travaux ont été financés par la Fondation Hasler, Suisse, dans le cadre du projet GRAM.

présentant \mathbf{x}'_1 pour, par exemple, partitionner des observations d'un phénomène similaire sur deux graphes distincts.

2.1 Le principe d'incertitude sur graphe

En traitement du signal classique, le principe d'incertitude énonce qu'un signal ne peut être à la fois localisé en temps et en fréquence [2]. Des auteurs se sont penchés sur l'identification d'un principe similaire dans le cadre du TSG (e.g., [1, 11, 6]). Nous considérons ici l'approche proposée en [1], qui a l'avantage d'être analogue au principe d'incertitude classique, et offre certaines propriétés que nous exploiterons par la suite.

Considérons un graphe $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ avec $|\mathcal{V}| = N$ nœuds. L'étalement graphique d'un signal $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$, qui mesure à quel point il est concentré sur \mathcal{G} , est défini par :

$$\Delta_{\mathcal{G}, v_c}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|_2} \sum_{v \in \mathcal{V}} d_{\mathcal{G}}(v_c, v)^2 \mathbf{x}[v]^2, \quad (1)$$

où $v_c \in \mathcal{V}$ est un nœud de référence, $d_{\mathcal{G}}$ est la distance géodésique sur le graphe, et $\mathbf{x}[v]$ est la valeur du signal observée en v . Le choix du nœud de référence est ici arbitraire, et a comme conséquence de changer la valeur d'étalement graphique d'un signal. Ainsi, un signal impulsif en v_c aura un étalement graphique nul, alors qu'un tel signal sur un nœud distant aura un étalement graphique positif. Dans cet article, nous choisissons comme nœud de référence celui qui minimise l'étalement graphique du signal pour lequel on cherche à créer un proxy. Ainsi, v_c peut être vu comme le nœud où l'on centre le signal, à la manière de l'opérateur de translation en TSG [8].

Soit $\mathbf{L} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^T$ la matrice Laplacienne (normalisée) associée au graphe \mathcal{G} , avec \mathbf{V} sa matrice de vecteurs propres et $\mathbf{\Lambda}$ sa matrice diagonale de valeurs propres. l'étalement spectral d'un signal \mathbf{x} , qui mesure sa concentration dans le spectre de \mathcal{G} , est défini par :

$$\widehat{\Delta}_{\mathcal{G}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|_2} \sum_{\lambda \in \text{diag}(\mathbf{\Lambda})} \lambda^2 \widehat{\mathbf{x}}[\lambda]^2, \quad (2)$$

où $\widehat{\mathbf{x}} = \mathbf{V}^T \mathbf{x}$ est la transformée de Fourier sur graphe de \mathbf{x} [8], et $\widehat{\mathbf{x}}[\lambda]$ est la valeur du spectre du signal associée à λ .

Il a été montré en [1] que l'ensemble des paires

$$\left\{ \left(\widehat{\Delta}_{\mathcal{G}}(\mathbf{x}), \Delta_{\mathcal{G}, v_c}(\mathbf{x}) \right) \right\}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N}, \quad (3)$$

nommé *région d'incertitude*, est convexe, borné, et délimité par quatre points (ou *paires d'incertitude*) associés à des signaux bien identifiables entre lesquels la frontière de la région d'incertitude est une courbe convexe ou concave :

- $p_{\text{bas}} = (1, 0)$, associé à un signal impulsif en v_c ;
- $p_{\text{gauche}} = (0, \Delta_{\mathcal{G}, v_c}(\mathbf{v}_1))$, associé au vecteur propre \mathbf{v}_1 du Laplacien associé à la plus basse valeur propre;
- $p_{\text{haut}} = (1, \Delta_{\mathcal{G}, v_c}(\mathbf{x}))$, associé à un signal impulsif en un nœud le plus éloigné (au sens de $d_{\mathcal{G}}$) de v_c ;
- $p_{\text{droite}} = \left(\widehat{\Delta}_{\mathcal{G}}(\mathbf{v}_N), \Delta_{\mathcal{G}, v_c}(\mathbf{v}_N) \right)$, associé au vecteur propre \mathbf{v}_N du Laplacien associé à la plus haute valeur propre.

L'algorithme du *sandwich* introduit en [1] permet d'estimer un nombre arbitraire de points localisés sur la frontière convexe de la région d'incertitude entre les paires d'incertitude p_{bas} et p_{gauche} . Il exploite la propriété que le vecteur propre associé à la plus petite valeur propre d'une matrice $\mathbf{M}_{\alpha} = \mathbf{P}_{v_c}^2 - \alpha \mathbf{L}$, avec \mathbf{P}_{v_c} la matrice diagonale des distances géodésiques à v_c et α le coefficient de la pente entre deux points de la courbe, minimise l'étalement graphique pour un étalement spectral fixé.

Ce résultat implique que la frontière de la région d'incertitude entre les paires d'incertitude p_{droite} et p_{bas} peut également être estimée directement par l'algorithme du sandwich. De même, les deux segments restants peuvent être aisément estimés en considérant la négation de \mathbf{L} dans le calcul de \mathbf{M}_{α} .

3 Méthodologie

Considérons comme donnés un graphe $\mathcal{G}_1 = (\mathcal{V}_1, \mathcal{E}_1)$ d'ordre $|\mathcal{V}_1| = N_1$, sur lequel un signal $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^{N_1}$ est défini, ainsi qu'un graphe $\mathcal{G}_2 = (\mathcal{V}_2, \mathcal{E}_2)$ d'ordre $|\mathcal{V}_2| = N_2$. On choisit comme nœud de référence $v_{c_1} \in \mathcal{V}_1$ celui qui minimise l'étalement graphique de \mathbf{x}_1 , et comme autre nœud de référence un sommet arbitraire $v_{c_2} \in \mathcal{V}_2$. L'objectif des étapes détaillées ici est de générer sur \mathcal{G}_2 un signal *proxy* $\mathbf{x}'_1 \in \mathbb{R}^{N_2}$ ayant les mêmes propriétés de localité (i.e., une paire d'incertitude équivalente) que \mathbf{x}_1 , relativement au choix de v_{c_2} .

3.1 Mettre en relation les régions d'incertitude

La région d'incertitude d'un graphe caractérise, pour tout signal sur ce graphe, son compromis en termes de localité sur le graphe et dans son spectre. Une particularité des équations (1) et (2) est leur continuité, au sens qu'une légère modification d'un signal ne change que peu la paire d'incertitude associée. En conséquence, on s'attend à ce qu'un signal plutôt localisé à la fois sur le graphe et dans son spectre soit associé à une paire d'incertitude dans la zone inférieure gauche de la région d'incertitude. De même, un signal très éparpillé sur le graphe et dans son spectre se verra attribuer un point dans la zone supérieure droite. Afin de garantir qu'un signal \mathbf{x}'_1 conserve les propriétés de localité du signal \mathbf{x}_1 , on s'attend donc à ce que sa paire d'incertitude se trouve dans la même zone de la région d'incertitude de \mathcal{G}_2 que celle de \mathbf{x}_1 dans la région de \mathcal{G}_1 .

Une première étape de notre méthodologie est donc de garantir ce lien entre les portions des régions d'incertitude. Pour ce faire, on se propose d'associer chacun des quatre points identifiables (introduits en Section 2.1) de la région d'incertitude de l'un des graphes, à leurs équivalents dans la région d'incertitude de l'autre graphe, puis d'étendre cette association à l'intégralité des frontières des régions d'incertitude.

Comme indiqué en Section 2, une simple extension de l'algorithme du sandwich permet d'identifier un nombre arbitraire de paires d'incertitude à la frontière de la région d'incertitude. Soit $\mathcal{B}_{\mathcal{G}_1}$ la liste ordonnée des B paires d'incertitude estimées à la frontière de la région d'incertitude du graphe \mathcal{G}_1 , données

dans le sens des aiguilles d’une montre, et ayant comme premier élément p_{bas} . De la même manière, on calcule $\mathcal{B}_{\mathcal{G}_2}$, avec $|\mathcal{B}_{\mathcal{G}_1}| = |\mathcal{B}_{\mathcal{G}_2}| = B$, de telle sorte que la bijection $\phi : \mathcal{B}_{\mathcal{G}_1} \rightarrow \mathcal{B}_{\mathcal{G}_2}$ telle que $\forall i \in \{1, \dots, B\} : \phi(\mathcal{B}_{\mathcal{G}_1}[i]) = \mathcal{B}_{\mathcal{G}_2}[i]$ associe bien chaque segment de la frontière de la région d’incertitude du graphe \mathcal{G}_1 au segment correspondant dans la frontière de la région d’incertitude du graphe \mathcal{G}_2 (cf. Figure 1).

On s’intéresse aussi aux paires d’incertitude b_1 et b_2 associées aux barycentres des régions d’incertitude de \mathcal{G}_1 et \mathcal{G}_2 :

$$b_1 = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B \mathcal{B}_{\mathcal{G}_1}[i] \quad \text{et} \quad b_2 = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B \mathcal{B}_{\mathcal{G}_2}[i]. \quad (4)$$

Ces points particuliers seront utilisés par la suite comme les origines respectives de systèmes de coordonnées pour les régions d’incertitude. On suppose donc implicitement que le barycentre d’une région d’incertitude devrait être associé à celui de l’autre, *i.e.*, qu’un signal sur \mathcal{G}_2 de paire d’incertitude b_2 est un proxy pour un signal sur \mathcal{G}_1 de paire d’incertitude b_1 . Si cette hypothèse reste à prouver, nos expériences suggèrent que des signaux issus d’un même processus aléatoire correspondent à des points se distribuant similairement autour du barycentre ¹.

3.2 Trouver la paire d’incertitude équivalente

Une fois la bijection ϕ définie, on cherche à identifier un point $p'_1 = (\widehat{\Delta}_{\mathcal{G}}(\mathbf{x}'_1), \Delta_{\mathcal{G}, v_{c_2}}(\mathbf{x}'_1))$ dans la région d’incertitude de \mathcal{G}_2 qui soit équivalent à $p_1 = (\widehat{\Delta}_{\mathcal{G}}(\mathbf{x}_1), \Delta_{\mathcal{G}, v_{c_1}}(\mathbf{x}_1))$ dans la région d’incertitude de \mathcal{G}_1 . Pour forcer p'_1 à se trouver dans la même zone que p_1 , on procède par triangulation :

1. On identifie l’indice $i \in \{1, \dots, B\}$ définissant le triangle (b_1, p_i, p_{i+1}) incluant p_1 , avec $p_i = \mathcal{B}_{\mathcal{G}_1}[i]$ et $p_{i+1} = \mathcal{B}_{\mathcal{G}_1}[(i+1)\%B+1]$;
2. On calcule le ratio d’angles $\theta = \frac{\widehat{p_i b_1 p_1}}{p_i b_1 p_{i+1}}$;
3. Soit p_x le point à l’intersection des droites (b_1, p_1) et (p_i, p_{i+1}) . On calcule le ratio des normes $\rho = \frac{\|p_1 - b_1\|_2}{\|p_x - b_1\|_2}$;
4. On identifie le triangle équivalent au sein de la région d’incertitude de $\mathcal{G}_2 : (b_2, \phi(p_i), \phi(p_{i+1}))$;
5. On identifie un point p_θ tel que $\frac{\widehat{\phi(p_i) b_2 p_\theta}}{\phi(p_i) b_2 \phi(p_{i+1})} = \theta$;
6. Soit p'_x le point à l’intersection des droites (b_2, p_θ) et $(\phi(p_i), \phi(p_{i+1}))$. On identifie le point p'_1 sur la droite (b_2, p_θ) tel que $\frac{\|p'_1 - b_2\|_2}{\|p'_x - b_2\|_2} = \rho$.

3.3 Générer le signal proxy \mathbf{x}'_1 associé à p'_1

Une fois le point p'_1 déterminé, on cherche à identifier le signal $\mathbf{x}'_1 \in \mathbb{R}^{N_2}$ qui le réalise. Pour ce faire, on résout le pro-

1. Le code permettant de reproduire ces expériences est disponible sur <https://github.com/BastienPasdeloup/gretsi2019>.

TABLE 1 – Résultats du partitionnement des signaux \mathcal{X} .

	$K = 5$	$K = 20$
Rappel	0.848	0.908
Précision	0.902	0.857

blème suivant, par optimisation quadratique successive [3] :

$$\mathbf{x}'_1 \in \underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{N_2}}{\text{Argmin}} H(\mathbf{x}) \quad t.q. \quad \begin{cases} \|\mathbf{x}\|_2 = 1, \\ (\widehat{\Delta}_{\mathcal{G}}(\mathbf{x}), \Delta_{\mathcal{G}, v_{c_2}}(\mathbf{x})) = p'_1, \end{cases} \quad (5)$$

où $H(\mathbf{x})$ est une fonction encourageant des propriétés désirées sur le signal \mathbf{x}'_1 à créer. Un choix relativement générique pour H est la somme des différences absolues des premiers moments statistiques entre \mathbf{x} et \mathbf{x}_1 . D’autres propriétés, comme la bande passante du signal, peuvent aussi être encouragées ici.

S’il paraît évident que la solution n’est pas unique, une manière simple de le montrer est de considérer un graphe unique $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_2$, et un signal aléatoire \mathbf{x}_1 sur \mathcal{G}_1 ¹. Dans la majorité des cas, le signal \mathbf{x}'_1 obtenu par résolution de (5) n’est pas \mathbf{x}_1 .

4 Expériences

Afin d’illustrer notre approche, nous considérons le cas particulier de signaux localisés dans le domaine du graphe, obtenus par filtrage d’un signal impulsionnel par un polynôme de Chebyshev [9]. De tels signaux trouvent un cadre d’application dans l’apprentissage automatique sur graphe [10].

Nous considérons ici un graphe géométrique aléatoire $\mathcal{G}_1 = (\mathcal{V}_1, \mathcal{E}_1)$ d’ordre $N_1 = 100$, sur lequel on choisit aléatoirement un nœud de référence $v_{c_1} \in \mathcal{V}_1$. On considère $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^{N_1}$ comme le signal obtenu par convolution d’un filtre de Chebyshev d’ordre 5 et d’un signal impulsionnel en v_{c_1} . Le graphe $\mathcal{G}_2 = (\mathcal{V}_2, \mathcal{E}_2)$ est d’ordre $N_2 = 150$, et suit le même modèle aléatoire. On y choisit aléatoirement un nœud $v_{c_2} \in \mathcal{V}_2$ comme référence pour le calcul de la région d’incertitude de \mathcal{G}_2 . Enfin, on choisit la somme des différences absolues des 10 premiers moments statistiques comme fonction H à minimiser en (5).

Afin d’illustrer la qualité de la solution, on génère sur \mathcal{G}_2 un signal $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^{N_2}$ obtenu par convolution d’un filtre de Chebyshev d’ordre 5 avec un signal impulsionnel en v_{c_2} . Intuitivement, on s’attend à obtenir un signal proxy \mathbf{x}'_1 proche de \mathbf{x}_2 .

La Figure 1 illustre les résultats obtenus pour une instance aléatoire du problème avec ces paramètres. Comme attendu, le signal \mathbf{x}'_1 obtenu est proche du signal \mathbf{x}_2 généré directement via un filtre de Chebyshev en v_{c_2} , et possède un spectre plus similaire que ce dernier à celui du signal d’origine sur \mathcal{G}_1 .

Considérons à présent un problème de partitionnement de signaux définis sur les graphes \mathcal{G}_1 et \mathcal{G}_2 donnés en Figure 1. Notons $\mathcal{X}_{\mathcal{G}, K}$ l’ensemble des signaux obtenus par filtrage d’un polynôme de Chebyshev d’ordre K de signaux impulsionnels en chacun des sommets d’un graphe \mathcal{G} , et $\mathcal{X}'_{\mathcal{G}, K}$ l’ensemble des signaux de $\mathcal{X}_{\mathcal{G}, K}$ transportés sur \mathcal{G}_2 par notre méthode. Considérons l’ensemble $\mathcal{X} = \mathcal{X}'_{\mathcal{G}_1, 5} \cup \mathcal{X}'_{\mathcal{G}_1, 20} \cup \mathcal{X}_{\mathcal{G}_2, 5} \cup \mathcal{X}_{\mathcal{G}_2, 20}$. On se propose de partitionner les signaux de \mathcal{X} en deux ensembles, de

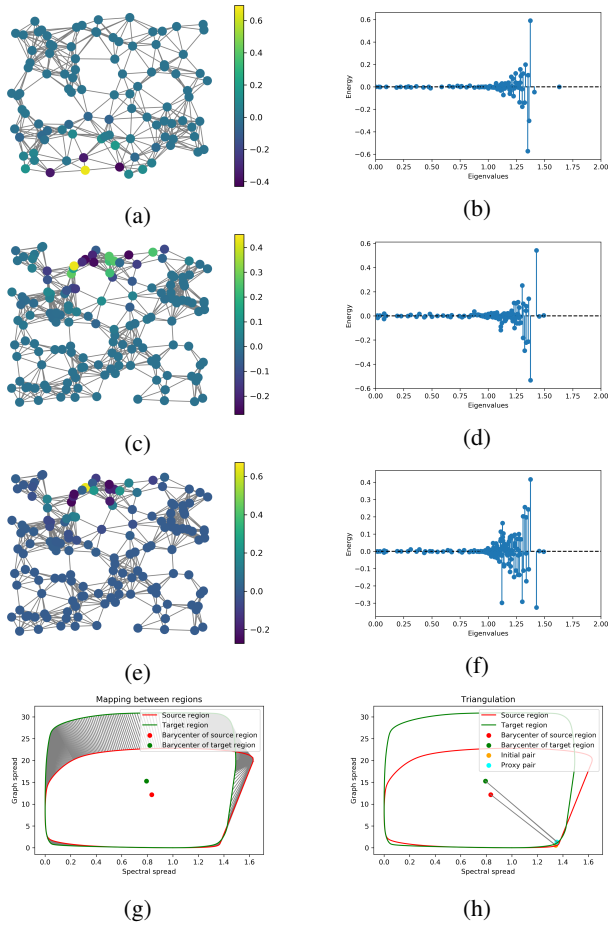


FIGURE 1 – Exemple du transfert d’un signal x_1 d’un graphe \mathcal{G}_1 en (a) à un autre graphe \mathcal{G}_2 en (c). Les spectres associés à x_1 et au signal proxy x'_1 sont donnés en (b) et (d) respectivement. Enfin, (e) et (f) donnent un signal sur \mathcal{G}_2 et son spectre, obtenu par filtrage d’un signal impulsionnel en v_{c_2} par un polynôme de Chebyshev de même ordre que celui utilisé pour créer x_1 . La bijection ϕ utilisée, ainsi que la détermination du point p'_1 , sont respectivement données en (g) et (h).

manière non supervisée. Pour ce faire, on utilise un algorithme de partitionnement hiérarchique [12], en utilisant comme distance entre deux signaux de \mathcal{X} la norme ℓ_2 de la différence entre leurs spectres, donnés en valeur absolue et normalisés. Les résultats obtenus sont donnés en Table 1, et montrent une bonne capacité de l’algorithme de partitionnement à séparer les signaux selon l’ordre du polynôme utilisé.

5 Conclusions

Nous avons proposé une première méthode permettant de comparer deux signaux définis sur des graphes différents, via une approche visant à créer un signal *proxy* de l’un des signaux sur l’autre graphe, tout en préservant ses propriétés de localité. Nos expériences illustrent l’applicabilité de notre approche pour détecter un même phénomène sur deux graphes distincts.

Ces travaux en étant encore à leur phase préliminaire, de nombreuses extensions sont prévues. Entre autres, il sera essentiel d’étudier la distribution des points dans la région d’incertitude, et de compléter nos expériences avec une plus grande variété de signaux. Une autre direction majeure est l’extension de l’approche proposée afin de s’abstraire du choix d’un nœud de référence pour le calcul de l’étalement graphique.

Références

- [1] Ameya Agaskar and Yue M Lu. A spectral graph uncertainty principle. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2013.
- [2] Werner Heisenberg. Über den anschaulichen inhalt der quantentheoretischen kinematik und mechanik. In *Original Scientific Papers Wissenschaftliche Originalarbeiten*. 1985.
- [3] Dieter Kraft. A software package for sequential quadratic programming. *Forschungsbericht- Deutsche Forschungs- und Versuchsanstalt für Luft- und Raumfahrt*, 1988.
- [4] Ron Levie, Elvin Isufi, and Gitta Kutyniok. On the transferability of spectral graph filters. *arXiv preprint 1901.10524*, 2019.
- [5] Antonio Ortega, Pascal Frossard, Jelena Kovačević, Jose MF Moura, and Pierre Vandergheynst. Graph signal processing : Overview, challenges, and applications. *Proceedings of the IEEE*, 2018.
- [6] Nathanael Perraudin, Benjamin Ricaud, David Shuman, and Pierre Vandergheynst. Global and local uncertainty principles for signals on graphs. *APSIPA Transactions on Signal and Information Processing*, 2018.
- [7] Santiago Segarra, Weiyu Huang, and Alejandro Ribeiro. Diffusion and superposition distances for signals supported on networks. *IEEE Transactions on Signal and Information Processing over Networks*, 2015.
- [8] David I Shuman, Sunil K Narang, Pascal Frossard, Antonio Ortega, and Pierre Vandergheynst. The emerging field of signal processing on graphs : Extending high-dimensional data analysis to networks and other irregular domains. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2013.
- [9] David I Shuman, Pierre Vandergheynst, and Pascal Frossard. Chebyshev polynomial approximation for distributed signal processing. In *IEEE DCOSS*, 2011.
- [10] Dorina Thanou, David I Shuman, and Pascal Frossard. Learning parametric dictionaries for signals on graphs. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2014.
- [11] Mikhail Tsitsvero, Sergio Barbarossa, and Paolo Di Lorenzo. Signals on graphs : Uncertainty principle and sampling. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2016.
- [12] Joe H Ward Jr. Hierarchical grouping to optimize an objective function. *Journal of the American statistical association*, 1963.