

Méthode de Boltzmann sur réseau & Morphologie Mathématique

Romain NOËL¹, Laurent NAVARRO¹, Guy COURBEBAISSE²

¹ Mines Saint-Étienne, Univ. Lyon, Univ. Jean Monnet, INSERM, U 1059 Sainbiose, Centre CIS,
F - 42023 Saint-Étienne France

²Univ. Lyon, INSA-Lyon, Université Claude Bernard Lyon 1, UJM Saint-Étienne, CNRS, INSERM, CREATIS UMR 5220,
U1206, F69621, Lyon, France

romain.noel@emse.fr, navarro@emse.fr, guy.courbebaisse@creatis.insa-lyon.fr

Résumé – Cet article propose d’établir un lien direct entre la morphologie mathématique et la méthode de Boltzmann sur réseau (LBM), donnant lieu à la LB3M (Lattice Boltzmann Method & Mathematical Morphology). Pour ce faire, une démonstration de l’équivalence entre les équations composant la méthode proposée et les définitions de dilatation et d’érosion morphologiques en niveaux de gris est apportée. La LB3M permet d’embarquer dans un même formalisme le traitement des images et la simulation numérique. Afin d’illustrer l’efficacité de la LB3M, ces opérations élémentaires sont appliquées à l’image de Lena, puis un exemple de croissance osseuse est étudié.

Abstract – This paper suggests to build a direct link between the mathematical morphology and the Lattice Boltzmann Method (LBM) which leads to the LB3M (Lattice Boltzmann Method & Mathematical Morphology). To do so, a proof of the equivalence between the equations in the method and the definitions of morphological dilation and erosion in grey level is established. Thanks to the LB3M, the image processing and the physical simulation are embedded in the same formalism. In order to illustrate the efficiency of the suggested method, the elementary operations are applied to the Lena’s image, then an example of bone growth is studied.

1 Introduction

La méthode Lattice Boltzmann est une méthode numérique issue de la mécanique des fluides [Wol00]. Cette méthode peut être adaptée aux problématiques de traitement des images, et certains auteurs ont prouvé son efficacité dans ce domaine. L’un des travaux fondateurs de la LBM pour le traitement des images consiste en l’adaptation de la diffusion anisotrope de Perona-Malik pour des applications de débruitage [JLS99]. Ces travaux ont ensuite été étendus par Chen [CYQ08] avec l’introduction d’une probabilité de rebondissement au cours du processus, permettant le débruitage ainsi que l’incorporation d’un objet dans une image (inpainting). Par la suite, les travaux de Chang [CY09] ont rendu possible la détection par contours actifs et par filtrage [Che+14; NCR15; Ge+17].

Par ailleurs, la morphologie mathématique introduite par Mathéron en 1967 est une théorie mathématique incontournable en traitement d’images, encore à ce jour. Cette théorie est basée sur deux opérations élémentaires nommées érosion et dilatation. À partir de ces deux opérateurs de base, de nombreux autres opérateurs plus complexes peuvent être construits, permettant à leurs tours des applications comme la segmentation, le débruitage, la squelettisation, le calcul de gradients, etc [NT10].

Un aspect intéressant du traitement des images lié aux applications en biologie et en médecine, est son lien intime avec la modélisation. En effet, les applications de modélisation biologique utilisent très souvent les images comme supports pour ef-

fectuer des simulations numériques. Dans un tel cadre, il est nécessaire d’avoir un ensemble de méthodes numériques les plus compatibles possibles. À ce titre la Lattice Boltzmann Method (LBM) ou méthode de Boltzmann sur réseau est particulièrement intéressante, car elle offre la possibilité d’intégrer sur un même réseau le traitement des images et la simulation numérique [Noë+17].

Afin d’étendre les cas de compatibilités de la LBM, cet article propose une adaptation de la méthode à la morphologie mathématique. Ainsi, l’article est décomposé de la manière suivante : un bref retour sur les fondements de la morphologie mathématique et de la LBM est abordé, puis l’équivalence entre les deux est montrée. Ensuite, une illustration des opérations d’érosion et de dilatation sur l’image de Lena est proposée, puis un phénomène de croissance biologique est simulé via un opérateur basé sur la morphologie mathématique. Enfin, ces exemples sont suivis des discussions conclusives.

2 Fondements

Une image ρ en niveaux de gris en dimension n , est une fonction de \mathbb{R}^n dans $\overline{\mathbb{R}}$. D’autre part, un élément structurant g en niveaux de gris est une fonction de \mathbb{R}^n dans $\overline{\mathbb{R}}$ et telle que l’ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \neq \{\infty\} \cup \{-\infty\}\}$ est borné.

Alors la dilatation morphologique d’une image en niveaux de gris ρ par un élément structurant fonctionnel g , est notée

$(\rho \oplus g)$ et définie par

$$(\rho \oplus g)(x) = \sup_y (\rho(y) + g(x - y)). \quad (1)$$

D'autre part, l'érosion morphologique d'une image en niveaux de gris ρ par un élément structurant fonctionnel ρ est notée $(\rho \ominus g)$ et définie comme

$$(\rho \ominus g)(x) = \inf_y (\rho(y) - g(y - x)). \quad (2)$$

La linéarisation de l'opérateur de collision [BGK54] dans l'équation de Boltzmann sous sa forme discrétisée avec un pas d'espace Δx et un pas de temps Δt , permet d'exprimer celle-ci sous la forme

$$f_i(x + \xi_i \Delta t, t + \Delta t) - f_i(x, t) + F_i = -\omega (f_i - f_i^{(0)}) \quad (3)$$

avec f_i la distribution discrétisée sur l'espace des phases, ξ_i la vitesse discrétisée, F_i la force extérieure subie par la distribution, ω un paramètre de relaxation vers la distribution d'équilibre $f_i^{(0)}$. Les f_i peuvent être interprétées comme les informations (niveaux de gris) véhiculées par les voisins du point courant x .

La résolution de cette équation différentielle passe de manière usuelle par un schéma explicite en temps. En sus, à partir de ce schéma, une séparation en une étape de collision et une étape de propagation est opérée, donnant lieu aux équations

$$f_i^c(x, t) = f_i(x, t) - \omega (f_i - f_i^{(0)}) \quad (4)$$

$$f_i^s(x + \xi_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i^c(x, t). \quad (5)$$

Afin de retrouver les équations macroscopiques et surtout les variables qu'elles décrivent, il est nécessaire de recourir à la l'intégrale discrète. Ici les variables macroscopiques sont les niveaux de gris ρ obtenus à partir des distributions f_i grâce à l'équation suivante

$$\rho = \sum_i f_i. \quad (6)$$

Ainsi pour le cas de la diffusion (éventuellement anisotrope), l'utilisation de la LBM permet la résolution de l'équation de diffusion suivante

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\Delta x^2}{3\Delta t} \left(\frac{1}{\omega} - 0.5 \right) \nabla_x^2 (\rho). \quad (7)$$

Il est également possible d'ajouter une condition aux limites, par l'intermédiaire de l'opération appelée "bounce back", s'écrivant

$$\text{Bounce-Back}(f_i) = f_{\bar{i}} = f(-\xi_i). \quad (8)$$

3 Opérateurs de base de la morphologie mathématique en LB3M

Proposition 1. *Un incrément de temps de la LBM à l'équilibre utilisant les définitions de moments et d'équilibre suivantes :*

$$\rho(x, t) = \max_i \{f_i(x, t)\} \quad (9)$$

$$f_i^{(0)} = \rho(x, t) + g(\xi_i); \quad (10)$$

est équivalent à une dilatation morphologique en niveaux de gris de l'image ρ par l'élément structurant g .

Démonstration. Dans le but de construire un équivalent à l'opération de dilatation morphologique en niveaux de gris avec la LBM, il est nécessaire d'adapter certaines opérations. Ainsi, en considérant que la densité n'est plus la somme sur la distribution de densité mais le maximum sur cette distribution, cela permet une écriture discrète proche de la notion continue de sup. Cela conduit à l'écriture de l'équation eq. (9). Il est également nécessaire d'intégrer l'évaluation de l'image par l'élément structurant, ce qui est introduit par l'équation eq. (10).

Ces simples modifications, sans changer les étapes de collision et de propagation, permettent d'obtenir une nouvelle densité après un pas de temps; celle-ci peut s'exprimer en fonction des différentes étapes constitutives de la LBM à l'équilibre (c'est-à-dire pour $\omega = 1$). Ainsi, en remontant successivement les équations, on obtient

$$\begin{aligned} \rho(x, t + \Delta t) &= \max_i \{f_i^s(x, t + \Delta t)\} \\ &= \max_i \{f_i^c(x - \xi_i \Delta t, t)\} \\ &= \max_i \left\{ \left[f_i - \omega (f_i - f_i^{(0)}) \right] (x - \xi_i \Delta t, t) \right\} \\ &= \max_i \{f_i^{(0)}(x - \xi_i \Delta t, t)\} \\ &= \max_i \{\rho(x - \xi_i \Delta t, t) + g(\xi_i)\}. \end{aligned} \quad (11)$$

De plus, en reprenant la définition de la dilatation morphologique et en lui appliquant le changement de variable $z = x - y$, il est possible d'écrire cette définition sous la forme discrétisée

$$(\rho \oplus g)(x) = \max_z (\rho(x - z) + g(z)). \quad (12)$$

Cette dernière montre l'équivalence entre la méthode proposée et la dilatation morphologique en niveaux de gris. \square

De la même façon, il est possible de définir l'érosion morphologique en niveaux de gris à travers la LBM.

Proposition 2. *Un incrément de temps de la LBM à l'équilibre utilisant les définitions de moments et d'équilibre suivantes :*

$$\rho(x, t) = \min_i \{f_i(x, t)\} \quad (13)$$

$$f_i^{(0)} = \rho(x, t) - g(-\xi_i) \quad (14)$$

est équivalent à une érosion morphologique en niveaux de gris de l'image ρ par l'élément structurant g .

Démonstration. En procédant comme dans la démonstration précédente, on remonte les équations constitutives de la LBM. Ainsi, dans les mêmes hypothèses que précédemment ($\omega = 1$), l'expression de la densité après un pas de temps est obtenue

$$\rho(x, t + \Delta t) = \min_i \{\rho(x - \xi_i \Delta t, t) - g(-\xi_i)\}. \quad (15)$$

Cette dernière expression coïncide également avec l'expression discrète de l'érosion morphologique en niveaux de gris après le changement de variable $z = x - y$. \square

Il est donc possible de définir rigoureusement les deux opérations de base de la morphologie mathématique à travers le formalisme de la LBM. Il est à noter que l'élément $g(-\xi_i)$ correspond à l'opération de "bounce back" appliquée à $g(\xi_i)$.

4 Intérêts applicatifs

Afin d'étudier l'efficacité de la méthode proposée dans cet article, une comparaison entre l'approche LB3M et celle de la librairie *SciPy* a été réalisée. Cette comparaison confirme la correspondance parfaite entre les méthodes, pour la dilatation comme pour l'érosion.

Pour illustrer ces résultats, 30 dilatations ont été réalisées sur l'image de Lena et représentées sur la fig. 1a. Pour réaliser ces dilatations, un élément structurant gaussien a été utilisé, ainsi de manière discrète on peut écrire

$$g(\xi_i) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Conformément au résultat énoncé par l'équivalence, il n'y a aucune différence entre la dilatation classique obtenue avec la librairie *SciPy* et celle obtenue avec la LB3M. Ceci est confirmé par un écart quadratique nul.

Afin d'illustrer les résultats de la comparaison autour de l'érosion, 30 érosions morphologiques ont également été réalisées sur l'image de Lena (fig. 1b).



(a) Dilatation.

(b) Érosion.

FIGURE 1 – Dilatation et érosion morphologique en niveaux de gris utilisant la LBM appliquée à l'image de Lena.

À nouveau, l'érosion obtenue avec la LB3M et celle obtenue avec la librairie *SciPy* sont identiques, ce qui se caractérise par un écart quadratique nul.

Après cet exemple introductif sur l'image de Lena et dans le but de montrer une utilisation de la morphologie mathématique liée à la modélisation avec la LBM, un exemple de modélisation de la croissance osseuse est proposé.

En effet, un avantage majeur de la LB3M est de pouvoir coupler aisément la morphologie mathématique et la simulation numérique telle que la dynamique des fluides.

Pour cela, une étude de la croissance osseuse est effectuée. Celle-ci se produit lorsque des cellules, transportées par un fluide biologique, parviennent à se fixer sur un support. Cette fixation s'opère en fonction de certains paramètres physiques comme le taux de cisaillement à la frontière solide-fluide, non pris en compte dans cette illustration. Une fois la densité de cellule maximum atteinte, une nouvelle couche de matrice extracellulaire se crée sur la précédente, créant une croissance de région [BWD13].

Ainsi cela se caractérise par une augmentation du nombre de

cellules ostéoblastiques et de la matrice minérale sur la surface de l'os, jusqu'à la création d'une nouvelle portion d'os. En effet, ces cellules synthétisent différents éléments et participent à la minéralisation de la matrice, jusqu'à s'emmurer. Alors une fois totalement emmurées, elles deviennent des ostéocytes et ont une activité bien plus faible. Cela a pour conséquence une stabilisation de la densité osseuse autour d'un maximum. Une fois ce maximum atteint, de nouvelles cellules ostéoblastiques peuvent se greffer sur la matrice nouvellement créée, ce qui donne lieu à une nouvelle croissance de la zone osseuse.

Cela se traduit pour la densité osseuse caractérisée par le niveau de gris de l'image ρ par une croissance de région. Cette croissance est réalisée par une évolution temporelle à la périphérie de l'os (l'adhérence de ρ obtenue par morphologie mathématique). Cette adhérence est ajoutée à la densité initiale à un facteur multiplicatif prêt, α dépendant de la vitesse de croissance de l'os. Cette croissance est, alors, simulée grâce à l'équation morphologique suivante

$$\rho(x, t + \Delta t) = \rho(x, t) + \alpha ((\rho \oplus g)(x) - \rho), \quad (17)$$

où α est choisi égal à 0,5. Afin de s'assurer que la croissance ne s'opère pas tant que la densité maximale n'est pas atteinte, il est possible d'utiliser le paramètre ω , jusqu'ici supposé égal à 1. En effet, ce paramètre permet une pondération de l'opération morphologique. Il est donc suggéré d'utiliser la fonction suivante comme choix (illustratif, car il existe d'autres solutions) pour le paramètre

$$\omega(\rho) = \begin{cases} 1 & \text{si } \rho = 1.0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \quad (18)$$

Ainsi la fig. 2 représente la croissance des cellules sur le substrat osseux à trois instants donnés.

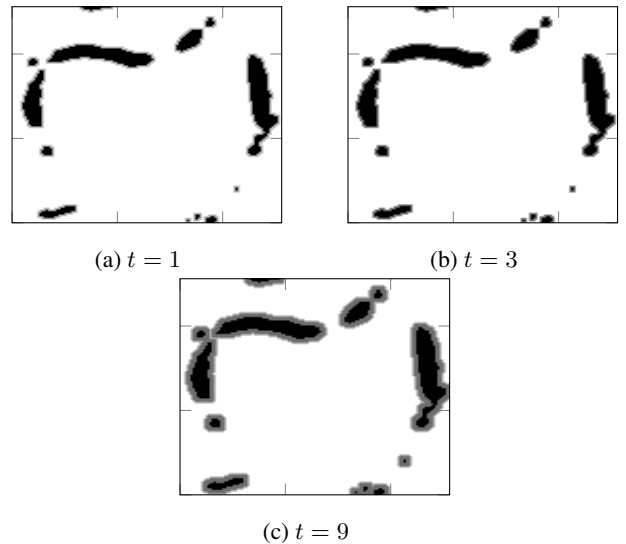


FIGURE 2 – Utilisation de la morphologie mathématique en LBM pour simuler la croissance osseuse, à partir d'image.

La fig. 2a montre une légère densification en gris clair sur la frontière du substrat en noir. A contrario, la fig. 2b montre

une densification plus marquée avec un gris foncé à la frontière. Tandis que la fig. 2c page précédente illustre bien la croissance avec une zone avec une grande densité de matrice extracellulaire (gris foncé) plus large que pour la fig. 2b page précédente, et une légère croissance cellulaire sur la bordure de cette dernière (gris clair). Cette application reste illustrative car elle n'est pas dimensionnée, cependant il est tout à fait possible de relier les paramètres biologiques aux paramètres LBM pour simuler la densification progressive.

5 Conclusions

Le présent article propose une adaptation des fonctions constitutives de la LBM pour retrouver rigoureusement les opérations élémentaires de la morphologie mathématique. D'autres formulations plaçant l'élément structurant comme une force extérieure, sont envisageables sans altérer les résultats énoncés.

Une illustration de la méthode obtenue sur l'image de Lena, montre des résultats d'une grande précision. Puis un exemple d'utilisation de la morphologie mathématique en utilisant la LBM est réalisé en simulant une croissance biologique; cette dernière montre également un des intérêts de la méthode, à savoir, disposer d'un paramètre supplémentaire réglant la vitesse de l'opération morphologique. Un autre intérêt de la méthode est de pouvoir lier les opérations morphologiques avec d'autres paramètres issus de la simulation de phénomènes physiques grâce à la LBM, associé au fait que la LBM est intrinsèquement parallélisable permettant une réduction importante des temps de calcul. À ce titre, une comparaison des temps de calculs entre l'approche traditionnelle et l'approche LBM est un axe d'étude à mener.

6 Remerciements

Les auteurs remercient Dr. David Marchat et Mikhaël Hadida pour leurs discussions au sujet de la croissance osseuse.

Références

- [BGK54] P. L. BHATNAGAR, E. P. GROSS et M. KROOK. « A Model for Collision Processes in Gases. I. Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component Systems ». In : *Physical Review* 94.3 (1^{er} mai 1954), p. 511-525. ISSN : 0031-899X. DOI : 10.1103/PhysRev.94.511.
- [BWD13] Cécile M. BIDAN, Frances M. WANG et John W.C. DUNLOP. « A Three-Dimensional Model for Tissue Deposition on Complex Surfaces ». In : *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering* 16.10 (oct. 2013), p. 1056-1070. ISSN : 1025-5842, 1476-8259. DOI : 10.1080/10255842.2013.774384.
- [Che+14] Junhui CHEN, Zhenhua CHAI, Baochang SHI et Wenhuan ZHANG. « Lattice Boltzmann Method for Filtering and Contour Detection of the Natural Images ». In : *Computers & Mathematics with Applications* 68.3 (août 2014), p. 257-268. ISSN : 08981221. DOI : 10.1016/j.camwa.2014.05.023.
- [CY09] Qianshun CHANG et Tong YANG. « A Lattice Boltzmann Method for Image Denoising ». In : *IEEE Transactions on Image Processing* 18.12 (déc. 2009), p. 2797-2802. ISSN : 1057-7149, 1941-0042. DOI : 10.1109/TIP.2009.2028369.
- [CYQ08] Yu CHEN, Zhuangzhi YAN et YueHong QIAN. « An Anisotropic Diffusion Model for Medical Image Smoothing by Using the Lattice Boltzmann Method ». In : *7th Asian-Pacific Conference on Medical and Biological Engineering*. Sous la dir. d'Yi PENG et Xiaohong WENG. T. 19. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2008, p. 255-259. ISBN : 978-3-540-79038-9 978-3-540-79039-6. DOI : 10.1007/978-3-540-79039-6_65.
- [Ge+17] Fei GE, Romain NOËL, Laurent NAVARRO et Guy COURBEBASSE. « Volume Rendering and Lattice-Boltzmann Method ». In : GRETSI 2017. Juan-Les-Pins, France : GRETSI, sept. 2017.
- [JLS99] Björn JAWERTH, Peng LIN et Eric SINZINGER. « Lattice Boltzmann Models for Anisotropic Diffusion of Images ». In : *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 11.3 (1999), p. 231-237.
- [NCR15] Laurent NAVARRO, Guy COURBEBASSE et Christian ROUX. « Une redéfinition des conditions aux limites de la méthode lattice Boltzmann pour le débruitage d'images ». In : GRETSI 2015. T. 237. Lyon, France : GRETSI, sept. 2015.
- [Noë+17] Romain NOËL, Fei GE, Yue ZHANG, Laurent NAVARRO et Guy COURBEBASSE. « Lattice Boltzmann Method for Modelling of Biological Phenomena ». In : *2017 25th European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*. 2017 25th European Signal Processing Conference (EUSIPCO). Kos : IEEE, août 2017, p. 2654-2658. ISBN : 978-0-9928626-7-1. DOI : 10.23919/EUSIPCO.2017.8081692.
- [NT10] Laurent NAJMAN et Hugues TALBOT, éd. *Mathematical Morphology : From Theory to Applications*. 1st Edition. London : ISTE-Wiley, juin 2010. 507 p. ISBN : 978-1-84821-215-2.
- [Wol00] Dieter A. WOLF-GLADROW. *Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models : An Introduction*. Lecture Notes in Mathematics 1725. New York : Springer, 2000. 308 p. ISBN : 978-3-540-66973-9.