

Un cadre unifiant le traitement d'images et de nuages de points 3D : applications à la tapisserie de Bayeux

Abderrahim ELMOATAZ, François LOZES

Normandie Univ., UNICAEN, ENSICAEN, GREYC UMR CNRS 6072, Caen
{abderrahim.elmoataz-billah, francois.lozes}@unicaen.fr

Résumé – Avec les récentes avancées technologiques produisant différents types d'images 2D ou de nuages de points 3D, la communauté du patrimoine culturel s'intéresse de plus en plus à la numérisation d'objets du patrimoine et à l'utilisation des méthodes de traitements et d'analyse de ces données issues de la numérisation. L'objectif étant de proposer de nouveaux outils pour les chercheurs : historiens d'art, conservateurs et restaurateurs, ou pour le grand public. Nous proposons dans cet article, d'exploiter un cadre unifié pour le traitement et l'analyse d'images 2D ou de nuages de points 3D. Ce cadre est basé sur l'utilisation des (Équations aux différences Partielles) sur graphes. Dans ce cadre nous considérons un ensemble d'opérateurs sur graphes allant de la construction de panoramas pour la visualisation/navigation, la restauration et la segmentation d'images 2D ou nuages de points 3D. Ces images proviennent de la Tapisserie de Bayeux, une oeuvre d'art unique et un document exceptionnel qui intéresse tout autant les scientifiques que le grand public.

Abstract – With the advance of technology that generates various 2D images or 3D point clouds, the cultural heritage community is increasingly interested in scanning of cultural objects and the usage of processing and analysing methods of these scanned data. The objective is to propose new tools for researchers : art historians, conservators and curators, or the general public. In this article, we propose to exploit a unified framework for the processing and analysis of 2D images and 3D points clouds. This framework is based on usage of PDEs (Partial Differential Equations) on graphs. In this framework, we considered a set of operators on graphs from the construction of panorama to visualize / navigate, restore and to segmentate 2D images and 3D point clouds. These images come from Bayeux Tapestry, a unique work of art and an exceptional document that interests scientists and the general public alike.

1 Introduction

L'imagerie numérique en deux ou trois dimension s'est imposée comme un outil essentiel pour la préservation, la conservation, la restauration, la diffusion des objets ou monuments du patrimoine culturel et historique. Les développements de ces technologies numérique s'accompagne par le développement de nouvelles méthodes pour le traitement et l'analyse de différents données issues de ces numérisations.

Une grande partie de ces données peut être représentée comme des fonctions définies sur des domaines structurés, c'est le cas par exemple des signaux 1D, des images ou des vidéos. Les méthodes de traitement d'images sont alors issues du traitement classique de signaux, des équations aux dérivées Partielles, ondelettes (voir [CdH⁺18] et les références associées). Cependant, une partie de ces données est définie sur des domaines irréguliers ou complexes (au sens de la topologie). On peut par exemple citer les maillages, les données définies sur des variétés, les nuages de point ou encore des images sur nuages de points. Cet aspect constitue un obstacle majeur à leur traitement.

Nous avons proposé récemment un cadre unifié pour le traitement et l'analyse d'images 2D ou de nuages de points 3D [LEL14, LEL15]. Dans ce cadre on représente les images ou les nuages de points 3D par un graphe, local ou nonlocal, pondéré.

On propose ensuite la transcription des équations aux dérivées partielles (EDP) ou des méthodes variationnelles sur graphes. Ce cadre fournit est un ensemble d'opérateurs discrets mimant le comportement des EDPs sur le domaine des graphes, en remplaçant les opérateurs différentiels par des opérateurs de différences, définis dans le cadre de fonctions sur graphes.

Dans cet article, nous présentons un ensemble d'opérateurs sur graphes allant de la construction de panoramas pour la visualisation/navigation, la restauration allant de la segmentation à la colorisation d'images 2D ou nuages de points 3D. Ces images proviennent de la Tapisserie de Bayeux, une oeuvre d'art unique et un document exceptionnel qui intéresse tout autant les scientifiques que le grand public.

1.1 Construction du graphe

Considérons une image ou un nuage de points P comme un ensemble de vecteurs, respectivement de dimension 2 ou 3. Chaque point $p \in P$, est associé à un sommet d'un graphe \mathcal{G} afin de définir un ensemble de sommets $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Ensuite, pour déterminer l'ensemble des arêtes \mathcal{E} du graphe \mathcal{G} , nous définissons le voisinage de chaque sommet v_i selon un graphe des k plus proches voisins (k -NNG). Une arête (v_i, v_j) est ajoutée entre deux sommets v_i et v_j si la distance entre $\mathbf{p}(v_i)$ et $\mathbf{p}(v_j)$ est parmi les k plus proches distances de $\mathbf{p}(v_i)$

aux autres points.

1.2 Pondération du graphe

Une fois que le graphe a été créé, il doit être pondéré. Si nous voulons ignorer la similarité des sommets, la fonction de pondération $w : \mathcal{V} \rightarrow [0, 1]$ est initialisée avec $w(v_i, v_j) = 1$. Pour prendre en compte les similarités des données associées aux sommets du graphe, il est possible d'utiliser une fonction de similarité reposant sur des distances des arêtes. Soit une fonction initiale $\mathbf{f}^0 : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^m$. Calculer les distances entre les sommets correspond à comparer un vecteur caractéristiques $\mathcal{P}(v_i) \in \mathbb{R}^q$ de \mathbf{f}^0 tel que :

$$w(v_i, v_j) = \exp\left(-\frac{\|\mathcal{P}(v_i) - \mathcal{P}(v_j)\|_2^2}{\sigma^2}\right). \quad (1)$$

Traditionnellement, on a simplement $\mathcal{P}(v_i) = \mathbf{f}^0(v_i)$. En traitement d'images, un vecteur caractéristique intéressant repose sur la notion de patches. Dans [LEL14, LEL15], nous avons proposé une nouvelle définition des patches qui peut être utilisée sur n'importe quelle représentation de graphe associé à des maillages ou nuages de points.

2 Équations aux différences partielles sur graphes

Soit un graphe pondéré $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, w)$ constitué d'un ensemble fini $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_N\}$ de N sommets et d'un ensemble fini $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ d'arêtes pondérées. Nous supposons \mathcal{G} non dirigé, sans boucle, et sans arêtes multiples. Soit (u, v) une arête de \mathcal{E} connectant les sommets u et v de \mathcal{V} . Son poids, noté par $w(u, v)$, représente la similarité entre ces sommets. Ces similarités sont calculées en utilisant une fonction symétrique positive $w : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^+$ satisfaisant $w(u, v) = 0$ si $(u, v) \notin \mathcal{E}$. La notation $u \sim v$ est utilisée pour préciser que les sommets u et v sont adjacents. $\mathcal{H}(\mathcal{V})$ représente un espace de Hilbert des fonctions à valeur réelle définies sur des sommets du graphe. Nous définissons la bordure interne d'un ensemble $A \subset \mathcal{V}$ comme $\partial^- A = \{v_i \in A | \exists v_j \sim v_i, v_j \in \partial A\}$.

De manière similaire, nous définissons $\mathcal{H}(\mathcal{E})$ comme l'espace des fonctions définies sur l'ensemble des arêtes \mathcal{E} . Étant donné une fonction $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$, ses normes ℓ_p et ℓ_∞ sont données par

$$\|f\|_p = \left(\sum_{v_i \in \mathcal{V}} |f(v_i)|^p\right)^{1/p}, \quad \text{avec } 1 \leq p < \infty, \quad (2)$$

$$\|f\|_\infty = \max_{v_i \in \mathcal{V}} |f(v_i)|, \quad \text{pour } p = \infty. \quad (3)$$

Soit $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, w)$ un graphe pondéré et $w : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction de poids dépendant de l'interaction entre les sommets. L'opérateur de différence [ELB08], dénoté $d_w : \mathcal{H}(\mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{E})$, est défini pour tout $f \in \mathcal{H}(\mathcal{V})$ et $(v_i, v_j) \in \mathcal{E}$ par $(d_w f)(v_i, v_j) = \sqrt{w(v_i, v_j)}(f(v_j) - f(v_i))$. L'opérateur de

gradient pondéré d'une fonction $f \in \mathcal{H}(\mathcal{V})$, en un sommet $v_i \in \mathcal{V}$, est le vecteur défini par

$$(\nabla_w f)(v_i) = ((d_w f)(v_i, v_j))_{v_j \in \mathcal{V}}^T. \quad (4)$$

La norme ℓ_p en un sommet v_i est définie, pour $p \geq 1$, comme

$$\|(\nabla_w f)(v_i)\|_p = \left(\sum_{v_j \sim v_i} w(v_i, v_j)^{p/2} |f(v_j) - f(v_i)|^p\right)^{1/p}. \quad (5)$$

Les opérateurs de différences morphologiques directionnels externes et internes sont définis par $((d_w f)(v_i, v_j))^\pm$, avec $(x)^+ = \max(x, 0)$ et $(x)^- = (-x)^+$. Leurs gradients pondérés sont :

$$(\nabla_w^\pm f)(v_i) = \left(\left((d_w f)(v_i, v_j)\right)^\pm\right)_{v_j \in \mathcal{V}}^T. \quad (6)$$

Les normes ℓ_p et ℓ_∞ sur ces gradients sont

$$\|(\nabla_w^\pm f)(v_i)\|_p = \left[\sum_{v_j \sim v_i} w(v_i, v_j)^{\frac{p}{2}} \left((f(v_j) - f(v_i))^\pm\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}, \quad (7)$$

$$\|(\nabla_w^\pm f)(v_i)\|_\infty = \max_{v_j \sim v_i} \sqrt{w(v_i, v_j)} (f(v_j) - f(v_i))^\pm. \quad (8)$$

L'opérateur p -Laplacien pondéré anisotrope, avec $p \in [1, +\infty[$, en un sommet $v_i \in \mathcal{V}$ est défini sur $\mathcal{H}(\mathcal{V})$ par [ELB08] comme

$$(\Delta_{w,p}^a f)(v_i) = \sum_{v_j \sim v_i} \psi_{w,p}^a(v_i, v_j) (v_j, v_j) (f(v_j) - f(v_i)), \quad (9)$$

où

$$\psi_{w,p}^a(v_i, v_j) = w(v_i, v_j)^{p/2} |f(v_j) - f(v_i)|^{p-2} \quad (10)$$

L' ∞ -Laplacien est défini par [EDL12] comme

$$(\Delta_{w,\infty} f)(v_i) = \frac{1}{2} [\|(\nabla_w^+ f)(v_i)\|_\infty - \|(\nabla_w^- f)(v_i)\|_\infty]. \quad (11)$$

À partir de ces opérateurs de bases, on peut transcrire différentes EDPs sur graphes comme l'équation eikonale, l'équation de mouvement par courbure moyenne, etc .

3 Applications : Tapisserie de Bayeux

La Broderie de la Reine Mathilde, plus connue sous le nom de Tapisserie de Bayeux, est une broderie de laine sur toile de lin presque millénaire, puisque datée entre la fin du XIe siècle et le début du XIIe siècle. Sur une frise de près de 70m de long sur 70cm de large, elle raconte la conquête de l'Angleterre par Guillaume le Conquérant, depuis l'ambassade de Harold, comte de Wessex, en Normandie en 1064 jusqu'au terme de la bataille de Hastings, le 14 octobre 1066. Cette œuvre unique du Moyen Age est à la fois reconnue par la communauté scientifique et le grand public à l'échelle internationale comme un

témoignage exceptionnel de la société du XIe siècle, une œuvre d’art singulière et une source fondamentale pour le récit d’un évènement majeur dans l’Histoire de l’Europe médiévale .

La Tapisserie de Bayeux est une œuvre propriété de l’Etat, déposée dans la collection muséographique municipale ”Tapisserie de Bayeux-Musée d’Art et d’Histoire Baron Gérard” de la Ville de Bayeux, sous appellation ”Musée de France” (JO du 29/07/2017). Elle est le premier objet mobilier classé Monument Historique (liste de 1840) et est inscrite au registre ”Mémoire du Monde” de l’UNESCO en 2007. Elle est exposée au sein du Centre Guillaume le Conquérant (Musée de la Tapisserie de Bayeux).

L’une de ses caractéristiques majeures est sa grande richesse iconographique, permise par sa longueur exceptionnelle de 68m de long. En effet, elle se compose de 58 scènes, dont les repères, reconnaissables pour le grand public, sont inscrits sur une ”bande numérotée” ancienne mais postérieure à la broderie, placée au-dessus de la toile de base.

Dans le cadre du volet ”Études” du projet de restructuration du Musée de la Tapisserie, des prises de vues multi-spectrales ont été effectuées par le pôle Conservation-Restauration-Numérique de la Fabrique de patrimoines en Normandie. Cette opération de numérisation a été réalisée pendant le mois de Janvier 2017, et avait comme objectif de documenter l’état actuel de la Tapisserie, de servir de support à différents programmes de recherche, comme un Système d’Information Géoréférencées (S.I.G.), en tant que référence alimentant la base de données géoréférencées comme ”support cartographique”. Cette numérisation a permis d’obtenir une couverture complète de la Tapisserie sous forme d’une série de 86 images, de taille 8000 x 6000 pixels env., sous différentes modalités : lumière directe, réflexion infrarouge, fluorescence ultraviolet. Chaque couple d’images consécutives possède une zone de recouvrement permettant de faciliter le recalage entre ces images. Nous avons également réaliser la numérisation 3D.

3.1 Reconstruction 2D / 3D de la totalité de la Tapisserie de Bayeux.

À partir des images 2D de la Tapisserie de Bayeux, nous avons proposé des algorithmes de recalage pour reconstruire la totalité de la Tapisserie de Bayeux¹. La reconstruction 2D / 3D permettent de visualiser à distance et de représenter la totalité de la Tapisserie de Bayeux sous forme numérique (voir Figure 1). Cette reconstruction peut servir également à la médiation. Dans le cadre de la journée culture numérique, ce travail à permis de réaliser pour la première fois un musée virtuel consacré à la Tapisserie de Bayeux, où les visiteurs pouvaient naviguer et visiter la Tapisserie de Bayeux complètement².

1. Voir la reconstruction du panorama de la Tapisserie de Bayeux comme fond de référence d’un Système d’Informations Géoréférencées : création d’un algorithme de traitement d’images dédié à apparaitre dans la revue *In situ*, du ministère de la culture

2. https://chpc.greyc.fr/index.php?option=com_content&view=article&id=123&Itemid=130

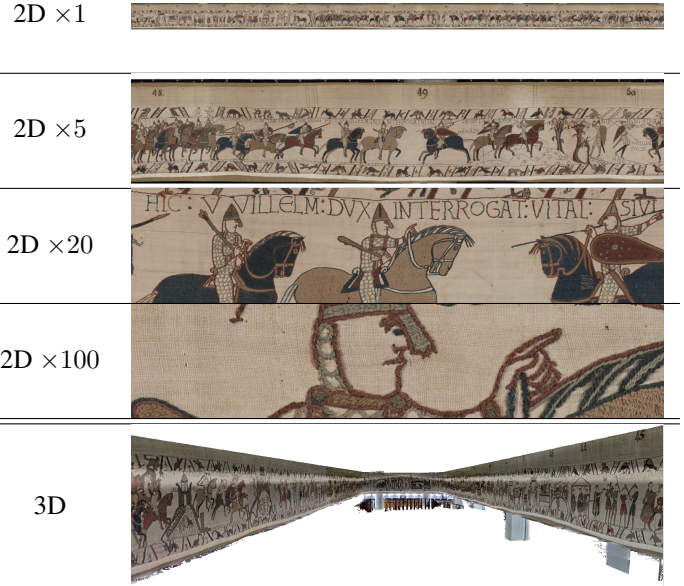


FIGURE 1: Visualisation du panorama 2d à différentes échelles, et du nuage de points 3D de la Tapisserie de Bayeux.

3.2 Filtrage et simplification

Soit $f^0 : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{P}$ les coordonnées des sommets. La simplification d’une fonction f sur graphe peut être formulé par :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t}(u) = (\mathcal{K}_w(f(u)))^+ \|\nabla_w^+ f(u)\|_\infty \\ \quad - (\mathcal{K}_w(f(u)))^- \|\nabla_w^- f(u)\|_\infty \\ f(u, 0) = f_0(u), \end{cases} \quad (12)$$

avec :

$$\mathcal{K}_w(u, f) = \frac{\sum_{f(v)-f(u) \geq 0} w(u, v) - \sum_{f(v)-f(u) < 0} w(u, v)}{\delta_w(u)}. \quad (13)$$

La Figure 2 montre la simplification de la couleur de l’image 2D et du nuage de point 3D de la Tapisserie de Bayeux.

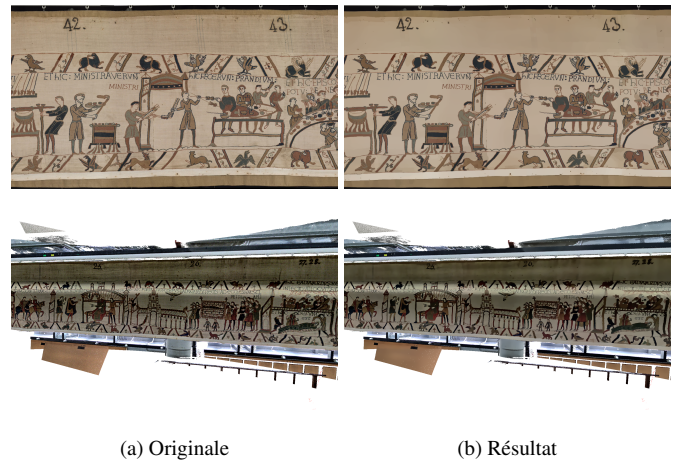


FIGURE 2: Filtrage couleur de la couleur de la Tapisserie de Bayeux.



FIGURE 3: Inpainting couleur d'une partie de la Tapisserie de Bayeux.

3.3 Inpainting

L'inpainting consiste à déduire des valeurs manquantes à partir des valeurs connues. Nous considérons des données définies sur un domaine général représenté par un graphe $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, w)$. Soit $f^0 : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{C}$ une fonction qui assignent une couleur aux sommets. Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{V}$ le sous-ensemble des sommets de valeurs inconnues et $\partial\mathcal{A}$ le sous-ensemble de sommets de valeurs connues. Le but de l'interpolation est de trouver une fonction \hat{f} approximant $f^0 \in \mathcal{V}$ et correspond à résoudre :

$$\begin{cases} (\Delta_{w, \infty} f)(v_i) = 0 & \forall v_i \in \mathcal{A}, \\ f(v_i) = f^0(v_i) & \forall v_i \in \partial\mathcal{A}. \end{cases} \quad (14)$$

Les travaux de [LEL14] ont montré que le problème d'interpolation a une solution unique qui peut être obtenu avec l'algorithme itératif présenté dans [EDL12]. À chaque fin d'itération, l'ensemble $\partial\mathcal{A}$ est mise à jour avec $\partial\mathcal{A}^{(n+1)} = \partial\mathcal{A}^{(n)} \cup \partial^- \mathcal{A}^{(n)}$ et $\partial^- \mathcal{A}^{(n+1)}$ est mise à jour avec $\partial\mathcal{A}^{(n+1)}$. L'algorithme s'arrête lorsque l'ensemble des sommets à interpoler est vide. La Figure 3 montre la restauration d'une partie de la Tapisserie Bayeux.

3.4 Segmentation

La segmentation consiste à partitionner un objet 3D en plusieurs régions. Soit $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction sur un graphe $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E}, w)$ à segmenter. Le problème de la segmentation peut être formulé par une EDP à résoudre sur des graphes pondérés. Cette dernière formulation repose sur la propagation de front de l'équation eikonale pour calculer des distances généralisées sur graphe. Soit $L = \{l_1, \dots, l_n\}$ l'ensemble des labels. L'objectif de la propagation de label, est de labéliser chaque sommet $u \in \mathcal{V}$ sous la condition que u soit un voisin de même label.



FIGURE 4: Segmentation de plusieurs objets sur une partie de la Tapisserie de Bayeux.

La propagation de label peut être formalisé par la résolution de l'équation eikonale sur un graphe G tel que :

$$\begin{cases} \|(\nabla_w^- \phi)(v_i, t)\|_2 = 1 & v_i \in \mathcal{V} \\ f(v_i) = \phi(v_i) & x \in \gamma \subset \mathcal{V} \end{cases} \quad (15)$$

où $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ représente l'ensemble des labels initiaux. La résolution de l'équation eikonale (15) sur un graphe pondéré est étudiée dans [DEL13]. La fonction de similarité $w : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^+$ prend en compte la distance colorimétrique $w(v_i, v_j) = e^{-\|f^0(v_i) - f^0(v_j)\|/\sigma^2}$, où $f^0 : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{C}$ sont les couleurs associées au noeud $v_i \in \mathcal{V}$. La Figure 4 montre la segmentation de plusieurs objets sur une partie de la Tapisserie de Bayeux.

4 Conclusion

Nous avons proposé un cadre unifiant le traitement et l'analyse d'image. Nous avons montré des applications autour de la Tapisserie de Bayeux. Ce travail s'inscrit dans le cadre d'une collaboration avec le Musée de Bayeux. Ce travail est soutenu par le projet RIN Normand MoNoMAD et le projet ANR SUMUM (<https://anr-sumum.fr>).

Références

- [CdH⁺18] Luca Calatroni, Marie d'Autume, Rob Hocking, Stella Panayotova, Simone Parisotto, Paola Ricciardi, and Carola-Bibiane Schönlieb. Unveiling the invisible : mathematical methods for restoring and interpreting illuminated manuscripts. *Heritage Science*, 6(1) :56, 2018.
- [DEL13] X. Desquesnes, A. Elmoataz, and O. Lézoray. Eikonal equation adaptation on weighted graphs : fast geometric diffusion process for local and non-local image and data processing. *J. Math. Imaging Vis.*, 46(2) :238–257, 2013.
- [EDL12] A. Elmoataz, X. Desquesnes, and O. Lezoray. Non-local morphological pdes and p-laplacian equation on graphs with applications in image processing and machine learning. *IEEE J. Sel. Top. Signa.*, 6(7) :764–779, 2012.
- [ELB08] A. Elmoataz, O. Lezoray, and S. Boughleux. Non-local discrete regularization on weighted graphs : a framework for image and manifold process ing. *IEEE T. Image Process.*, 17(7) :1047–1060, 2008.
- [LEL14] F. Lozes, A. Elmoataz, and O. Lezoray. Partial difference operators on weighted graphs for image processing on surfaces and point clouds. *IEEE T. Image Process.*, 23(9) :3896–3909, Sept 2014.
- [LEL15] F. Lozes, A. Elmoataz, and O. Lezoray. Pde-based graph signal processing for 3-d color point clouds : Opportunities for cultural heritage. *Signal Processing Magazine, IEEE*, 32(4) :103–111, July 2015.