

Modèle et algorithme sur groupe de Lie pour l'estimation de la forme d'un amas de débris spatiaux

Samy LABSIR^{1,2}, Audrey GIREMUS², Guillaume BOURMAUD², Brice YVER¹, Thomas BENOUDIBA-CAMPANINI¹

¹CEA CESTA, 15 Avenue des Sablières, 33114 Le Barp cedex, France

²Laboratoire IMS CNRS UMR 5218, 351 cours de la Libération, 33405 Talence cedex, France

samy.labsir@ims-bordeaux.fr, audrey.giremus@ims-bordeaux.fr, guillaume.bourmaud@ims-bordeaux.fr,
brice.yver@cea.fr, thomas.benoudiba-campanini@cea.fr

Résumé – Dans le contexte de la surveillance spatiale, nous nous intéressons à un amas de débris évoluant en orbite autour de la Terre et observé par un capteur radar. Il est alors constaté que l'ensemble de ses réflecteurs prépondérants se disperse selon une forme "bananoïde" due au mouvement contraint par les lois de Kepler. Cette répartition est représentative d'échantillons gaussiens concentrés sur le groupe de Lie $SE(3)$ et peut être complètement caractérisée par une matrice de covariance inconnue. Nous proposons dans cette communication une reformulation originale sur groupe de Lie du modèle d'observation de l'amas qui nous permet de reconsidérer l'estimation de sa forme comme un problème d'inférence sur variété. Sa géométrie est ainsi intrinsèquement prise en compte. Dans un second temps, un algorithme de Newton sur groupe de Lie est développé pour réaliser cette estimation.

Abstract – In the context of spatial surveillance, we are interested in a cluster of debris orbiting around the Earth and observed by a sensor. It is observed that the set of main reflectors scatters taking a banana shape due to its elliptical motion constrained by Kepler's laws. This spreading is representative of Gaussian samples drawn on the Lie group $SE(3)$ and can be characterized by an unknown covariance matrix. In this paper, we propose a reformulation of the cluster observation model on Lie group to address the shape estimation as a Bayesian inference problem on manifolds. Thus, its geometry is intrinsically taken into account. Then, a Newton algorithm on Lie group is developed to perform this estimation.

1 Introduction

Le terme débris spatial définit des objets naturels ou artificiels, non fonctionnels, qui se déplacent en orbite autour de la Terre ou du Soleil. Les anciens satellites ou les fragments de fusées issus de désintégrations ou encore de collisions en sont des exemples. Ces débris, en particulier ceux se déplaçant en orbite basse autour de la Terre, peuvent engendrer des dégâts importants lorsqu'ils entrent en contact avec des satellites opérationnels [1][2][3]. Ainsi, le domaine de la surveillance spatiale a été le fruit de nombreux travaux ces dernières décennies, visant à anticiper et prévenir les éventuelles collisions. Un des défis majeurs est de mettre à profit l'ensemble des mesures fournies par des capteurs au sol (radars, lidars, télescopes,...) afin de déterminer les caractéristiques des objets spatiaux et de prédire leurs trajectoires. Ce problème de pistage peut se résoudre par des approches statistiques de type bayésien. Des méthodes classiques telles que le filtre de Kalman et ses variantes sont alors classiquement utilisées [4].

Dans cette communication, seules des mesures radar sont disponibles. Par ailleurs, nous nous focalisons sur les instants suivant directement une collision, lorsque les fragments sont supposés suffisamment proches les uns des autres pour pouvoir être considérés comme un amas compact. Ce dernier peut alors être traité comme une cible étendue, c'est-à-dire générant un nombre de mesures radar variable et inconnu distribuées spa-

tialement en son volume. Dans ce cadre, différentes approches récursives pour réaliser l'estimation des paramètres d'une cible étendue, et plus précisément son centroïde ainsi que sa forme, ont été proposées. Deux des méthodes les plus connues sont celles fondées sur une représentation par une matrice aléatoire ou un ensemble convexe étoilé [5]. La première approche [6] [7] suppose que l'objet étendu est de forme ellipsoïdale et peut être paramétrisé par une matrice symétrique définie positive (SPD), dite matrice de forme. Les mesures générées sont distribuées selon une loi normale de moyenne la position du centroïde et de matrice de covariance proportionnelle à la matrice de forme. Ainsi, une approximation de la distribution *a posteriori* de la position du centroïde et de la matrice SPD est obtenue analytiquement et récursivement. Toutefois, cette modélisation reste limitée et restrictive.

Comme alternative, la seconde approche utilise une représentation convexe étoilée de la forme, permettant d'obtenir une paramétrisation du contour basée sur les modèles d'hypersurfaces [8] ou sur les processus gaussiens [9]. Dans notre contexte d'application, ces approches ne sont pas nécessairement judicieuses car trop génériques. En effet, l'amas de débris étant uniquement soumis à la force gravitationnelle, son mouvement est donc contraint et il se disperse selon une forme "bananoïde" [1] [10][11]. Tout d'abord, nous observons que celle-ci est caractéristique d'objets évoluant sur des variétés de type groupe de

Lie (GdL) et distribués selon une loi gaussienne concentrée [12][13][14]. Ainsi, nous visons à développer une méthode d'estimation des paramètres de l'amas, en adaptant l'approche des matrices aléatoires, de façon à prendre en compte la structure de GdL.

La première contribution de ce travail est de reformuler l'état de l'amas comme appartenant à un GdL spécifique contenant les informations de position et d'orientation du centroïde. La seconde est de définir un nouveau modèle d'observation. La répartition spatiale des mesures est caractérisée par une matrice de covariance désignée par la suite comme la matrice de forme, mais contrairement à [6], elles sont supposées distribuées selon une loi gaussienne concentrée sur GdL. Ces reformulations sont présentées dans la partie 2. Il convient de noter que les résultats présentés dans cette communication constituent une première étape de nos travaux dans laquelle l'évolution au cours du temps de l'amas n'est pas considérée et les caractéristiques de son centroïde sont supposées connues. Sous ces hypothèses, notre troisième contribution est de proposer un algorithme d'estimation hors-ligne sur GdL qui, à partir de l'ensemble des observations, réalise l'estimation de la matrice de forme. Les développements théoriques ainsi que les résultats obtenus sur données simulées font l'objet de la partie 3. Enfin, des conclusions et perspectives sont proposées en partie 4.

2 Formulation du problème

Dans cette partie, nous introduisons et formalisons le modèle d'observation permettant de générer un ensemble de mesures distribuées en banane autour d'un centroïde. Pour mener à bien cette tâche, le formalisme des GdL matriciels ainsi que des distributions gaussiennes concentrées est mis à profit.

2.1 Propriétés des GdL et lois de probabilité

Par définition, un GdL G est un groupe muni d'une structure de variété différentielle. Plus précisément, les opérations de dérivation et d'intégration sur ce groupe, sont différentiables [12]. Dans l'ensemble de notre travail, nous nous focalisons sur les GdLs matriciels tels que $G \subset \mathbb{R}^{r \times r}$ ($r \in \mathbb{N}^*$) et les opérations de groupe sont les opérations matricielles classiques. Grâce aux propriétés des variétés différentielles, nous pouvons définir un espace tangent en tout élément $g \in G$. Il s'agit d'un espace vectoriel dont la dimension m est la dimension de la variété qui traduit le nombre de degrés de liberté de cet espace contraint. Une attention particulière est accordée à l'espace tangent en l'identité, noté \mathfrak{g} . Les éléments de \mathfrak{g} et de G sont liés entre eux par la fonction exponentielle matricielle $\exp_G : \mathfrak{g} \rightarrow G$, et réciproquement par la fonction logarithme matriciel $\log_G : G \rightarrow \mathfrak{g}$. Ces deux fonctions définissent un difféomorphisme local entre \mathfrak{g} et G . De plus, nous pouvons définir un isomorphisme entre \mathfrak{g} et l'espace euclidien \mathbb{R}^m . Si $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ et \mathbf{a} est son image dans \mathfrak{g} , nous notons $\mathbf{a} = [\mathbf{a}]_G^\wedge$ et $\mathbf{a} = [\mathbf{a}]_G^\vee$. Cet isomorphisme est pertinent d'un point de vue numérique, car il nous permet de manipuler des vecteurs de taille m plutôt que des matrices de taille $n \times n$. La relation entre le GdL G , son algèbre de Lie \mathfrak{g} et l'espace euclidien associé est représentée sur la figure 1. Par souci de simplicité dans la suite de l'article, nous utilisons les notations suivantes : $\mathbf{a} = \log_G^\vee(X) = [\log_G(X)]^\vee$ et $X = \exp_G^\wedge(\mathbf{a}) = \exp_G([\mathbf{a}]_G^\wedge)$, avec $X \in G$ et $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$.

tée sur la figure 1. Par souci de simplicité dans la suite de l'article, nous utilisons les notations suivantes : $\mathbf{a} = \log_G^\vee(X) = [\log_G(X)]^\vee$ et $X = \exp_G^\wedge(\mathbf{a}) = \exp_G([\mathbf{a}]_G^\wedge)$, avec $X \in G$ et $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$.

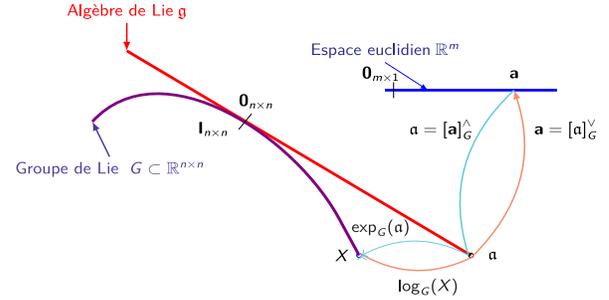


FIG. 1: Lien entre G , \mathfrak{g} and \mathbb{R}^m .

Dans un cadre bayésien, l'information disponible sur les paramètres inconnus est représentée par des distributions de probabilité. Or, les distributions usuelles sont définies sur des espaces euclidiens et ne permettent pas de prendre intrinsèquement en compte les propriétés des éléments d'un GdL. Dans [13][14][15], le formalisme des densités de probabilité gaussienne concentrée est présenté, permettant de modéliser directement sur GdL l'incertitude associée. Notons $\mathcal{N}(\mathbf{x}; \mathbf{m}, \Sigma)$ la loi gaussienne multivariée sur \mathbb{R}^m , calculée en \mathbf{x} , de moyenne \mathbf{m} et de matrice de covariance Σ . Si $\epsilon \sim \mathcal{N}(\epsilon; \mathbf{0}_{m \times 1}, \Sigma)$, alors $X = \mu \exp_G^\wedge(\epsilon)$ est distribuée selon une loi gaussienne concentrée à gauche sur le GdL G (de dimension m), de moyenne $\mu \in G$ et de matrice de covariance $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Nous écrivons alors $X \sim \mathcal{N}_G^L(X; \mu, \Sigma)$. Sur un voisinage de μ , l'expression de cette distribution peut être approchée par :

$$p(X) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m |\Sigma|}} \exp^{-\frac{1}{2} \|\log_G^\vee(\mu^{-1} X)\|_\Sigma^2}, \quad (1)$$

où $|\Sigma|$ est le déterminant de Σ and $\|\cdot\|_\Sigma^2$ est la distance de Mahalanobis. Notons qu'une distribution concentrée à droite peut être également définie.

2.2 Modèle proposé

Comme mentionné dans [1][2][11], nous pouvons observer par simulation numérique qu'un ensemble d'objets dont le mouvement est uniquement contraint par la force gravitationnelle évolue vers une configuration "bananoïde" illustrée sur la figure (2). Celle-ci est représentative d'un ensemble d'échantillons distribués sur le GdL dit "spécial euclidien" $SE(3)$.

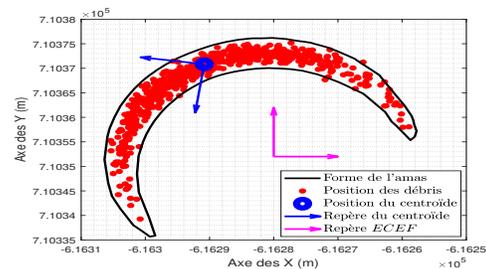


FIG. 2: Modélisation de l'amas dans le plan (X, Y) .

Pour capturer la forme de l'amas de débris, nous proposons donc une formulation originale du modèle de mesure fondée sur les GdLs. Elle s'appuie sur une paramétrisation adaptée de l'amas caractérisé d'une part par la position \mathbf{p} de son centroïde et d'autre part par une matrice de rotation \mathbf{R} [15]. Cette dernière traduit son orientation au sens où elle représente la matrice de passage entre un repère local attaché au centroïde et un repère de référence tel que le repère "Earth Centered Earth Fixed"(ECEF). Regroupés dans une même matrice, \mathbf{p} et \mathbf{R} forment un état appartenant à $SE(3)$ sous la forme :

$$M = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

A un instant donné, les objets à l'intérieur de l'amas ne sont pas tous détectés par le capteur radar. Seuls n d'entre eux réfléchissent fortement le signal radar. Pour représenter leur dispersion "en banane" autour de M , nous considérons qu'ils sont distribués selon une loi gaussienne concentrée à gauche :

$$Z_i = M \exp_{SE(3)}^{\wedge}(\epsilon_i) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad (3)$$

avec $\epsilon_i \sim \mathcal{N}(\epsilon_i; \mathbf{0}, \mathbf{S})$ où $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ est la matrice de covariance associée à la forme de l'amas et supposée inconnue. Dans (3), les différents réflecteurs sont représentés par des éléments de $SE(3)$, les $\{Z_i\}_{i=1}^n$, comportant leur position mais également une composante rotationnelle. Cette dernière n'est pas directement observable par le radar qui ne fournit que des mesures de position. Le modèle d'observation s'écrit donc :

$$\mathbf{z}_i = \Pi(Z_i) + \mathbf{u}_i, \quad (4)$$

où $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, \mathbf{u}_i est le bruit d'observation vérifiant $\mathbf{u}_i \sim \mathcal{N}(\mathbf{u}_i; \mathbf{0}, \mathbf{U})$. $\Pi : SE(3) \rightarrow \mathbb{R}^3$, est une fonction permettant de projeter la partie euclidienne d'un élément de $SE(3)$. Dans la troisième partie, nous proposons et présentons un algorithme d'estimation qui, à partir des mesures $\mathbf{z} = \{\mathbf{z}_i\}_{i=1}^n$ bruitées issues des réflecteurs de l'amas, réalise l'estimation de la matrice de forme \mathbf{S} .

3 Algorithme proposé

\mathbf{S} appartient à une variété riemannienne : celle des matrices symétriques définies positives (SPD) [16]. Il est donc possible de l'estimer par des algorithmes d'optimisation sur variétés [17]. Toutefois, à terme, l'objectif de nos travaux est de proposer un formalisme unifié pour estimer conjointement \mathbf{S} et M sur GdL. À cette fin, nous reparamétrisons \mathbf{S} comme un ensemble d'éléments définis sur GdL. Sachant qu'elle est SPD, elle se décompose dans une base de vecteurs propres avec des valeurs propres strictement positives comme suit :

$$\mathbf{S} = \mathbf{P}^\top \mathbf{D} \mathbf{P} \quad (5)$$

où \mathbf{P} appartient au GdL $SO(6)$ et \mathbf{D} appartient au GdL $D_6(\mathbb{R}^+)$ avec :

- $SO(6) = \{\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{6 \times 6} \mid \|\mathbf{P}\| = 1, \mathbf{P}^\top \mathbf{P} = \mathbf{I}_{6 \times 6}\}$
- $D_6(\mathbb{R}^+) = \{\text{diag}([d_1, \dots, d_6]) \mid \forall i \in \{1, \dots, 6\}, d_i > 0\}$.

Par cette décomposition, réaliser l'estimation de \mathbf{S} est équivalent à réaliser l'estimation jointe du couple (\mathbf{P}, \mathbf{D}) .

3.1 Estimateur *a posteriori*

Nous considérons une approche bayésienne, bien adaptée pour intégrer des contraintes *a priori* sur les paramètres à estimer. Néanmoins, un des aspects important à prendre à compte est la présence des $Z = \{Z_i\}_{i=1}^n \in SE(3)^n$ (n produits directs de $SE(3)$). Ces variables sont difficiles à marginaliser, aussi nous choisissons de les estimer au même titre que nos paramètres d'intérêts. L'estimation au sens du maximum *a posteriori* s'obtient comme suit :

$$\hat{X} = \arg \max_{X \in G} p(X|\mathbf{z}), \quad (6)$$

où $X = (\mathbf{P}, \mathbf{D}, Z)$ et $G = SO(6) \times D_6(\mathbb{R}^+) \times SE(3)^n$.

La densité *a posteriori* à maximiser peut se décomposer en utilisant la règle de Bayes. Par indépendance conditionnelle des $\{\mathbf{z}_i\}_{i=1}^n$ et des $\{Z_i\}_{i=1}^n$ ainsi que de \mathbf{P} et \mathbf{D} , nous pouvons alors écrire :

$$p(X|\mathbf{z}) \propto \left(\prod_{i=1}^n p(\mathbf{z}_i|\mathbf{P}, \mathbf{D}, Z_i) p(Z_i|\mathbf{P}, \mathbf{D}) \right) p(\mathbf{P})p(\mathbf{D}). \quad (7)$$

Maximiser $p(X)$ est équivalent à minimiser $J(X) = -2 \log p(X)$. D'après l'expression (3), il vient que les variables $\{Z_i\}_{i=1}^n$, conditionnellement à \mathbf{P} et \mathbf{D} , sont distribuées sous une loi gaussienne concentrée, soit $p(Z_i|\mathbf{P}, \mathbf{D}) = \mathcal{N}_{SE(3)}^L(Z_i; M, \mathbf{S})$. De plus, d'après l'équation (4), la vraisemblance des mesures $\{\mathbf{z}_i\}_{i=1}^n$ est une loi gaussienne multivariée sur \mathbb{R}^3 , soit $p(\mathbf{z}_i|\mathbf{P}, \mathbf{D}, Z_i) = \mathcal{N}(\mathbf{z}_i; \Pi(Z_i), \mathbf{U})$. Une loi *a priori* gaussienne concentrée sur $SO(6)$ est choisie pour \mathbf{P} , soit $p(\mathbf{P}) = \mathcal{N}_{SO(6)}^L(\mathbf{P}; \mathbf{P}_P, \mathbf{Q}_P)$. Pour la matrice \mathbf{D} , nous optons pour une loi *a priori* conservant la positivité des valeurs propres $\{d_j\}_{j=1}^6$. La loi log-normale, telle que $d_j \sim \mathcal{LN}(d_j; \mu_j, \sigma_j^2)$, permet de garantir cette propriété. Après quelques calculs, le critère d'optimisation peut être décomposé en deux termes :

$$J(X) = \underbrace{J_{nq}(\mathbf{D})}_{\text{Partie non quadratique}} + \underbrace{J_q(\mathbf{P}, \mathbf{D}, Z)}_{\text{Partie quadratique}}, \quad (8)$$

où :

$$J_{nq}(\mathbf{D}) = \sum_{j=1}^6 \left((n+2-2\frac{\mu_j}{\sigma_j^2}) \log(d_j) + \frac{\log(d_j^2)}{\sigma_j^2} \right), \quad (9)$$

$$J_q(\mathbf{P}, \mathbf{D}, Z) =$$

$$\sum_{i=1}^n \left(\|\mathbf{z}_i - \Pi(Z_i)\|_{\mathbf{U}}^2 + \|\mathbf{D}^{-1/2} \mathbf{P} \log_{SE(3)}^{\vee}(M^{-1} Z_i)\|_2^2 \right) + \|\log_{SO(6)}^{\vee}(\mathbf{P}_P^{-1} \mathbf{P})\|_{\Sigma_P}^2. \quad (10)$$

Par sa structure quadratique, J_q peut s'écrire $\|\phi(\mathbf{P}, \mathbf{D}, Z)\|_{\Sigma_q}^2$ où ϕ est une fonction différentiable et $\Sigma_q = \text{blkdiag}(\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{I}}, \mathbf{Q}_P)$ avec $\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{I}_n \odot \mathbf{P}$ et $\tilde{\mathbf{I}} = \mathbf{I}_n \odot \mathbf{I}_{3 \times 3}$ (\odot définissant le produit de Kronecker).

Ce critère est différentiable mais difficile à minimiser analytiquement. Pour pallier ce problème, un algorithme itératif de type Newton sur GdL est proposé dans ce travail. A chaque itération l , une direction de descente optimale δ_{l+1}^* est obtenue en

minimisant une approximation à l'ordre 2 de $J(X_l \exp_G^\wedge(\delta))$. La mise à jour de l'algorithme s'écrit alors :

$$X_{l+1} = X_l \exp_G^\wedge(\delta_{l+1}^*). \quad (11)$$

Dans notre cas, la structure particulière du critère nous motive à trouver δ_{l+1}^* minimisant la somme :

1/ d'une approximation à l'ordre 2 de J_q obtenue par développement de Taylor à l'ordre 1 de $\phi(X_l \exp_G^\wedge(\delta))$ à la manière de la méthode de Gauss-Newton,

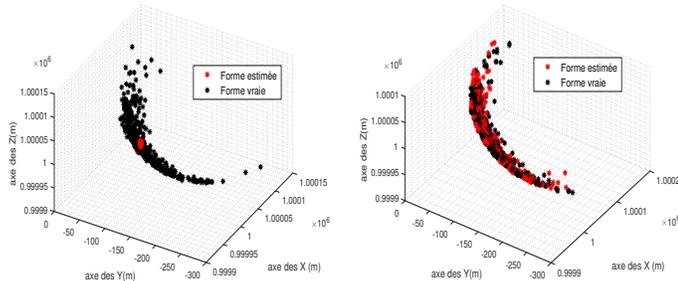
2/ d'un développement direct à l'ordre 2 de $J_{nq}(X_l \exp_G^\wedge(\delta))$. Nous obtenons après calculs :

$$\delta_{l+1}^* = -(\mathbf{H}_l + 2\mathbf{J}_{\phi_l}^T \Sigma_q^{-1} \mathbf{J}_{\phi_l})^{-1} (\nabla J_l + 2\mathbf{J}_{\phi_l}^T \Sigma_q^{-1} \phi_l) \quad (12)$$

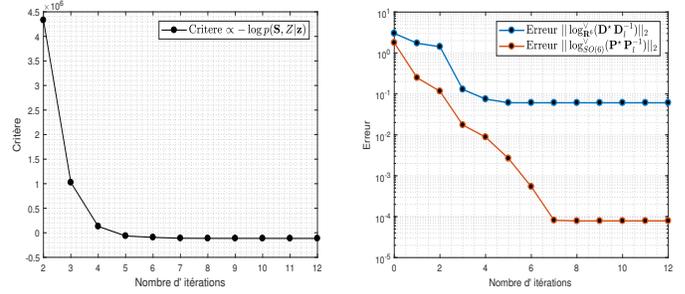
où \mathbf{H}_l , ∇J_l et \mathbf{J}_{ϕ_l} correspondent respectivement à la hessienne et au gradient de J_{nq} , et au jacobien de ϕ_l calculés en X_l . L'avantage de cette direction est d'assurer la positivité de la hessienne globale à chaque itération de l'algorithme puisque $\mathbf{H}_l = \text{diag}([\frac{2}{\sigma_{l,1}^2}, \dots, \frac{2}{\sigma_{l,6}^2}])$ est positive et $\mathbf{J}_{\phi_l}^T \Sigma_q^{-1} \mathbf{J}_{\phi_l}$ l'est également par construction. Par ailleurs, la parcimonie des matrices \mathbf{H}_l et \mathbf{J}_{ϕ_l} assure un faible coût calculatoire.

3.2 Résultats de simulation

Nous évaluons l'approche proposée en considérant un amas de débris situé en orbite basse, tel que chacun d'eux évolue à une altitude d'environ $10^6 m$ par rapport au sol terrestre. Les mesures issues des réflecteurs sont générées selon les modèles (3) et (4). $n = 10$ réflecteurs sont supposés détectés par le radar, l'écart type sur le bruit de mesure est pris égal à $50 m$. Soient \mathbf{P}^* et \mathbf{D}^* les matrices vraies supposées inconnues : l'initialisation \mathbf{P}_0 est effectuée avec une erreur de 0.8 rad sur \mathbf{P}^* , \mathbf{D}_0 avec une erreur de l'ordre de 0.5 rad et de 500 m respectivement sur la partie orientation et position de \mathbf{D}^* . Pour visualiser la bonne estimation de la forme de l'amas sont représentés en figures 3-(a) et 3-(b) $n_{ech} = 200$ échantillons tirés selon le modèle de mesure (4) avec la vraie matrice \mathbf{S} en noir et son estimation en rouge à différentes itérations. Nous observons une très bonne coïncidence entre la forme estimée et la forme vraie. Pour valider cette observation, sur les figures 3-(c) et 3-(d) sont tracées au cours des itérations les évolutions du critère J et des erreurs d'estimations sur GdL pour \mathbf{P} et \mathbf{D} , s'écrivant $\|\log_{SO(6)}^V(\mathbf{P}^* \mathbf{P}_l^{-1})\|_2$ et $\|\log_{D_6(\mathbb{R}^+)}^V(\mathbf{D}^* \mathbf{D}_l^{-1})\|_2$. Nous observons alors un comportement stable et convergent, ce qui confirme le bon comportement de l'algorithme.



(a) Forme estimée: première itération. (b) Forme estimée: dernière itération.



(c) Evolution du critère J .

(d) Evolution des erreurs d'estimation sur \mathbf{P} et \mathbf{D} (échelle logarithmique).

FIG. 3: Résultats obtenus

4 Conclusions et perspectives

Dans cet article, un nouveau modèle d'observation et un algorithme ont été présentés pour déterminer la forme d'un amas de débris spatiaux. A partir d'une représentation sur GdL, la matrice de covariance modélisant la forme a pu être estimée avec précision, à partir de mesures euclidiennes issues d'un capteur radar. La perspective à court terme est d'estimer conjointement la forme de l'amas ainsi que la position de son centroïde. Dans un second temps, leurs évolutions au cours du temps seront prises en compte et l'estimation sera réalisée par un algorithme en-ligne de filtrage récursif de type itéré.

Références

- [1] H. Klinkrad, Space debris, *Wiley Online Library*, 2010.
- [2] The threat of orbital debris and protecting NASA Space Assets from satellite collisions, NASA, 28 April 2009.
- [3] J.A. Kennewell and B.-N. Vo, "An overview of space situational awareness", *16th International Conference on Information Fusion*, Istanbul, Turkey, July 2013.
- [4] S. Arulampalam, S. Maskell, N. Gordon and T. Clapp, "A tutorial on particle filter for online nonlinear/non-Gaussian bayesian tracking", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol 50, 2002.
- [5] K. Granstrom, M. Baum and S. Reuter, "Extended object tracking: Introduction and Applications", *Journal of Advances in Information Fusion*, 2017.
- [6] J.W. Koch, "Bayesian approach to extended object and cluster tracking using random matrices", *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol 44, 2008.
- [7] M. Feldmann and J.W. Koch, "Tracking of extended objects and group targets using random matrices", *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol 59, 2011.
- [8] M. Baum and U.D. Hanebeck, "Extended Object Tracking with Random Hypersurface Models", *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2014, 50, 149-159.
- [9] N. Wahlström and E. Özkan, "Extended target tracking using Gaussian processes", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 63, no.16, August 2015.
- [10] J.E. Prussing and B.A. Conway, "Orbital Mechanics", *Oxford University Press, USA*, 1993.
- [11] J.T. Horwood and A.B. Poore, "Orbital state uncertainty realism", *Proceedings of the Advanced Maui Optical and Space Surveillance Technologies Conference*, September 2011.
- [12] A. Baker, "Matrix Groups: An Introduction to Lie Group Theory", *Springer*, 2002.
- [13] G. Bourmaud, R. Mégret, A. Giremus and Y. Berthoumieu, "From Intrinsic Optimization to Iterated Extended Kalman Filtering on Lie Groups", *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, Volume 55(3), 2016.
- [14] T.D. Barfoot, "State estimation on robotics", *Cambridge University Press*, 2017.
- [15] S. Labsir, A. Giremus, G. Bourmaud, B. Yver and T. Benoudiba-Campanini "Tracking a cluster of space debris by filtering on Lie groups", *ICASSP*, 2019.
- [16] M.P.Do Carmo, "Riemannian geometry", *Birkhäuser*, 1979.
- [17] P.A. Absil, R. Mahony, R. Sepulchre "Optimization algorithms on matrix manifolds", *Princeton University Press*, 2009.