

Fréquence, fréquences ? Quelques remarques

Patrick FLANDRIN¹

¹Univ Lyon, Ens de Lyon, Univ Claude Bernard, CNRS, Laboratoire de Physique, F-69342 Lyon, France
flandrin@ens-lyon.fr

Résumé – En partant de l'exemple très simple du sinus cardinal vu comme fonction oscillante, on s'intéresse à deux questions relatives à la notion de fréquence. Dans un premier temps, on distingue les concepts d'instantanéité et de localité dans les cas évolutifs ; dans un second temps, on remet en perspective les propriétés spectrales locale et globale, en lien en particulier avec les phénomènes de “supershift” et “superoscillation”.

Abstract – Starting with the very simple example of the “sinc function”, we address two questions related to the notion of frequency. We first make a distinction between the concepts of instantaneity and locality in the case of evolutive situations; we then discuss links between local and global spectral properties, in relation in particular with the recently introduced phenomena of “supershift” and “superoscillation”.

1 Comment un sinus oscille-t-il lorsqu'il devient “cardinal” ?

Un des enjeux de la représentation des signaux est de fournir des cadres mathématiques à même de rendre compte au mieux de la réalité physique des grandeurs analysées [6]. Une question emblématique à cet égard est celle de la fréquence instantanée. En effet, si celle-ci est supposée décrire de façon aisément interprétable ce que l'intuition suggère pour des oscillations variant dans le temps, il n'en va cependant pas nécessairement ainsi, y compris dans des situations apparemment très simples.

Prenons le cas de la forme d'onde représentée en Fig. 1(a). À une légère décroissance près de l'amplitude, la lecture la plus simple de ce signal est celle d'une oscillation quasi-sinusoïdale à une fréquence de 1 Hz, suggérant ainsi qu'une définition convenable de fréquence instantanée devrait fournir cette valeur de 1 Hz (ou une valeur proche) sur l'intervalle d'observation, quelle que soit l'évolution du signal en-dehors de cet intervalle.

1.1 Instantané — Gabor-Ville

En fait, tel qu'il a été choisi pour cet exemple, le signal de la Fig. 1(a) est un détail “à grand temps” de celui représenté en Fig. 1(b), où l'on reconnaît le *sinus cardinal*

$$s(t) = \frac{\sin(2\pi f_0 t)}{2\pi f_0 t}, \quad (1)$$

construit sur la fréquence $f_0 = 1$ Hz dans le cas présent. Afin de caractériser le caractère “instantané” de l'oscillation d'un tel signal, l'approche la plus classique est celle qui, pour tout signal $x(t) \in \mathbb{R}$, s'appuie sur le *signal analytique* $z_x(t) \in \mathbb{C}$ défini par

$$z_x(t) = x(t) + i(\mathcal{H}x)(t), \quad (2)$$

avec $(\mathcal{H}x)(t)$ la transformée de Hilbert de $x(t)$ [4, 6]. La représentation fréquentielle de ce signal analytique est telle que

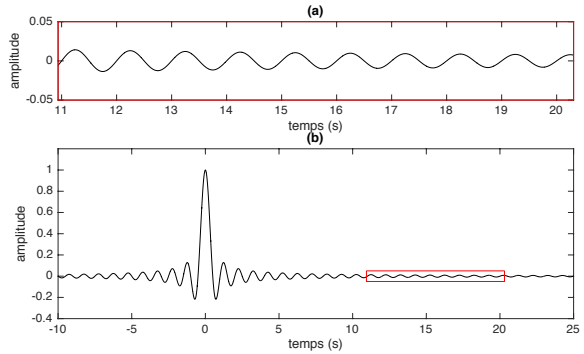


FIGURE 1 – (a) Oscillation quasi-sinusoïdale. (b) Sinus cardinal dont l'oscillation représentée en (a) est un détail “à grand temps”.

$Z_x(f) = 2X(f)\mathbf{1}_{[0,\infty)}(f)$, avec

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp\{-i2\pi ft\} dt \quad (3)$$

la transformée de Fourier de $x(t)$ et en notant $\mathbf{1}_I(f)$ la fonction indicatrice valant 1 sur l'intervalle I et zéro ailleurs.

En mettant la représentation temporelle à valeurs complexes (2) sous forme polaire, on peut alors suivre D. Gabor et J. Ville pour définir l'amplitude et la fréquence instantanées par les expressions respectives [4, 6] :

$$a_x^{\text{GV}}(t) = |z_x(t)| \quad ; \quad f_x^{\text{GV}}(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \arg\{z_x(t)\}. \quad (4)$$

Dans le cas du sinus cardinal $s(t)$, il est bien connu que sa transformée de Fourier s'écrit $S(f) = (1/2f_0)\mathbf{1}_{[-f_0,f_0]}(f)$. Par construction, $s(t)$ est ainsi une fonction à bande limitée, de fréquence maximale f_0 et de largeur de bande totale $B = 2f_0$. La transformée de Fourier $Z_s(f)$ du signal analytique $z_s(t)$ associé à $s(t)$ a pour valeur $Z_s(f) = (1/f_0)\mathbf{1}_{[0,f_0]}(f)$ d'où, par transformation de Fourier inverse,

$$z_s(t) = \frac{\sin(2\pi f_0 t)}{2\pi f_0 t} + i \frac{\sin^2(\pi f_0 t)}{\pi f_0 t}. \quad (5)$$

En mettant cette quantité à valeurs complexes sous sa forme polaire $z_s(t) = a_s^{\text{GV}}(t) \exp\{i\varphi_s^{\text{GV}}(t)\}$, on montre en utilisant (4) que $a_s^{\text{GV}}(t) = |\sin(\pi f_0 t)/\pi f_0 t|$. En ce qui concerne la phase $\varphi_s^{\text{GV}}(t)$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \tan(\varphi_s^{\text{GV}}(t)) &= \frac{\sin^2(\pi f_0 t)/(\pi f_0 t)}{\sin(2\pi f_0 t)/(2\pi f_0 t)} \\ &= \frac{\sin^2(\pi f_0 t)}{\sin(\pi f_0 t) \cos(\pi f_0 t)} \\ &= \tan(\pi f_0 t) \end{aligned} \quad (6)$$

et il s'ensuit que $\varphi_s^{\text{GV}}(t) = \pi f_0 t + n\pi, n \in \mathbb{Z}$. À tous les instants $\{t_k = k/f_0, k \in \mathbb{Z}^*\}$ où l'amplitude $a_s^{\text{GV}}(t)$ s'annule, la phase subit un saut de $-\pi$ et, hors ces points dont l'ensemble est de mesure nulle, on a

$$f_s^{\text{GV}}(t) = \frac{f_0}{2}. \quad (7)$$

C'est donc une valeur constante qui correspond à la moitié de la fréquence maximale ou, de manière équivalente dans le cas présent où le spectre du signal analytique est plat dans la bande $[0, f_0]$, à la fréquence moyenne de celui-ci¹. La description que l'approche Gabor-Ville offre du sinus cardinal est cependant contre-intuitive, proposant une fréquence instantanée constante et égale à $f_0/2$ presque partout alors que, à l'exception du lobe principal de largeur $1/f_0$ (pouvant s'interpréter comme la demi-arche d'une oscillation à la fréquence $f_0/2$), le signal oscille pour l'essentiel de façon régulière en s'annulant périodiquement à tous les instants $\{t_k = k/2f_0, k \in \mathbb{Z}^*\}$, suggérant davantage l'existence d'une fréquence f_0 comme cela avait été mis en avant en Fig. 1.

La description offerte par l'approche Gabor-Ville n'étant clairement pas satisfaisante, on peut alors s'interroger sur ce que des descriptions alternatives peuvent fournir.

1.2 Local — Teager-Kaiser

Si l'on considère un signal harmonique simple (un "mode de Fourier") de la forme $x(t) = a \sin(2\pi f_0 t + \psi)$, la proposition de H.M. Teager et S.M. Teager, reprise et prolongée par J.F. Kaiser, est de lui associer un "opérateur d'énergie" défini par [9]

$$\Psi[x(t)] = [x'(t)]^2 - x(t)x''(t). \quad (8)$$

Il est facile de vérifier que, dans le cas présent, on a simplement $\Psi[x(t)] = a^2(2\pi f_0)^2$ et $\Psi[x'(t)] = a^2(2\pi f_0)^4$, d'où un accès possible à l'amplitude a et à la fréquence f_0 par une combinaison convenable des grandeurs fournies par l'application de l'opérateur d'énergie Ψ au signal et à sa dérivée.

L'approche étant différentielle et donc essentiellement locale, il est raisonnable de penser qu'elle puisse encore s'appliquer

1. Ceci est évidemment en accord avec la formule permettant d'exprimer la fréquence moyenne du spectre d'énergie comme moyenne temporelle pondérée de la fréquence instantanée, ceci grâce à l'identité [4] :

$$\int_0^\infty f |Z_s(f)|^2 df = \int_{-\infty}^\infty [a_s^{\text{GV}}(t)]^2 f_s^{\text{GV}}(t) dt.$$

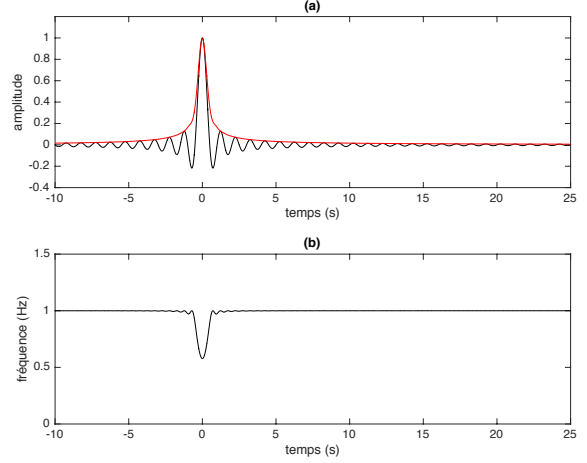


FIGURE 2 – Analyse de Teager-Kaiser du sinus cardinal de la Fig. 1. (a) Signal (en noir) et amplitude instantanée (en rouge). (b) Fréquence instantanée.

au cas des oscillations quasi-sinusoidales pour lesquelles l'amplitude et la fréquence sont lentement variables. Ceci conduit alors aux définitions "à la Teager-Kaiser" de l'amplitude et de la fréquence instantanées, selon les expressions respectives (lorsqu'elles existent) :

$$a_x^{\text{TK}}(t) = \frac{\Psi[x(t)]}{\sqrt{\Psi[x'(t)]}}; \quad f_x^{\text{TK}}(t) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\Psi[x'(t)]}{\Psi[x(t)]}}. \quad (9)$$

Dans le cas du sinus cardinal (1), un calcul explicite conduit au résultat suivant pour l'opérateur d'énergie agissant sur $s(t)$:

$$\Psi[s(t)] = \frac{1}{t^2} \left[1 - \frac{\sin^2(2\pi f_0 t)}{(2\pi f_0 t)^2} \right]. \quad (10)$$

En procédant de manière analogue pour le signal dérivé $s'(t)$, on obtient après quelques calculs :

$$\begin{aligned} \Psi[s'(t)] &= \frac{(2\pi f_0)^2}{t^2} - \frac{1}{t^4} \left(1 - \frac{2}{(2\pi f_0 t)^2} \right) \sin^2(2\pi f_0 t) \\ &\quad - 2 \frac{\cos^2(2\pi f_0 t)}{t^4} + 2 \frac{\sin(4\pi f_0 t)}{2\pi f_0 t^5} \end{aligned} \quad (11)$$

et les expressions pour l'amplitude et la fréquence instantanées s'en déduisent d'après (9). Celles-ci sont représentées en Fig. 2.

En comparaison avec l'approche Gabor-Ville, la fréquence variable ainsi obtenue offre un résultat plus satisfaisant du point de vue de l'interprétation, le caractère extrêmement local de son calcul résultant en une valeur essentiellement constante et égale à la fréquence attendue $f_0 = 1$, sauf au voisinage de l'origine où l'existence du lobe de largeur $1/f_0$ se traduit par une excursion vers des fréquences plus basses, dont on peut montrer qu'elle atteint la valeur minimale $f_0/\sqrt{3}$ en $t = 0$.

Si, sur cet exemple, l'approche Teager-Kaiser semble intéressante, il n'en est malheureusement pas toujours ainsi. Dans le cas général, l'opérateur d'énergie (8) n'offre en particulier aucune garantie de positivité ce qui, sans parler de l'interprétation associée, peut compromettre l'existence même de la fréquence instantanée au sens de (9).

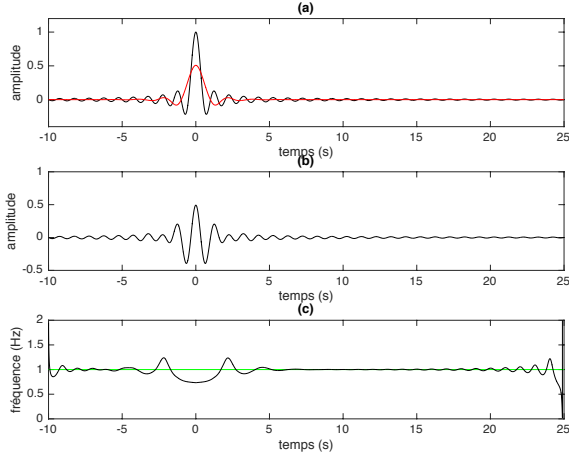


FIGURE 3 – Décomposition Modale Empirique du sinus cardinal de la Fig. 1. (a) Signal (en noir) et moyenne locale (en rouge). (b) Premier mode intrinsèque, obtenu en soustrayant la moyenne locale du signal. (c) Fréquence instantanée, au sens de Gabor-Ville, du mode intrinsèque représenté en (b).

1.3 Local et instantané — Hilbert-Huang

Comme cela a été souvent remarqué, la notion classique de fréquence est attachée aux modes de Fourier apparaissant dans (3). C’est donc celle qui est en jeu dans une oscillation sinusoïdale monochromatique et, lorsque celle-ci évolue dans le temps, les difficultés apparaissent dès que le comportement local s’écarte par trop du modèle nominal. Pour pallier (au moins partiellement) cette difficulté, N.E. Huang a proposé de n’appliquer une estimation de fréquence instantanée qu’à des “modes intrinsèques” se comportant localement comme un mode de Fourier. Dans la “Décomposition Modale Empirique” (ou EMD, pour *Empirical Mode Decomposition*) qu’il a développée à cet effet, ces modes sont extraits successivement, à partir de l’oscillation locale la plus rapide, sur la base d’une moyenne locale nulle (cf. [7] pour plus de détails sur la méthode et l’algorithme). Itérant la procédure jusqu’à une profondeur K , un signal $x(t)$ est ainsi décomposé selon

$$x(t) = \sum_{k=1}^K d_k(t) + r_K(t), \quad (12)$$

expression dans laquelle les $d_k(t)$ sont les modes intrinsèques et $r_K(t)$ le résidu. Par construction, chaque mode $d_k(t)$ est justiciable d’une analyse instantanée au sens Gabor-Ville, résultant en une collection d’amplitudes et de fréquences instantanées au sens dit “Hilbert-Huang” :

$$a_k^{\text{HH}}(t) = a_{d_k}^{\text{GV}}(t); \quad f_k^{\text{HH}}(t) = f_{d_k}^{\text{GV}}(t). \quad (13)$$

La Fig. 3 présente le résultat d’une telle analyse en se restreignant à $K = 1$, c’est-à-dire en ne considérant que le premier mode intrinsèque et le résidu associé, celui-ci jouant le rôle d’estimateur d’une moyenne locale. Comme attendu, cette moyenne locale n’est pas nulle et sa soustraction au signal initial se traduit au voisinage de l’origine par un “creux” dans la fréquence, celle-ci s’identifiant pour l’essentiel du reste des temps à f_0 .

2 Fréquences et bande spectrale

Ce que met en évidence l’exemple du sinus cardinal est la distinction qu’il est nécessaire d’opérer entre les notions apparemment proches d’*instantanéité* et de *localité*. En effet, en Fig. 1, l’interprétation de (a) par rapport à (b) repose sur un a priori de *localité* selon lequel les propriétés d’un détail ne devraient pas être affectées par celles du signal dans son ensemble. Ceci n’est évidemment pas respecté avec la fréquence (4) au sens de Gabor-Ville, celle-ci acquérant certes un caractère *instantané* (elle devient fonction du temps) mais au prix d’une transformation (de Hilbert) fortement non locale. La faible décroissance de la réponse impulsionnelle de celle-ci (“en $1/x$ ”) étant de même nature que celle du signal analysé, l’instantanéité qui en résulte ne permet pas d’atteindre le caractère local que l’on serait en droit d’attendre.

Une autre remarque importante est que, dans le cas d’un signal à bande limitée, la représentation spectrale (3) suggère que l’oscillation la plus rapide soit fixée localement par le mode de Fourier de fréquence maximale dans le spectre global. La situation n’est cependant pas si simple.

2.1 Deux raies spectrales

Le premier exemple, très connu et largement documenté [4], concerne la situation idéalisée de deux raies spectrales d’inégales amplitudes : $x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$, avec a_1 et $a_2 \in \mathbb{R}$ et $x_j(t) = \cos(2\pi f_j t)$; $j = 1, 2$. Un calcul direct [4] montre que :

$$f_x^{\text{GV}}(t) = \frac{f_1 + f_2}{2} + \frac{d}{2} \frac{\rho^2 - 1}{1 + \rho^2 + 2\rho \cos(2\pi dt)} \quad (14)$$

l’écart à la demi-somme des fréquences ne dépendant que de la différence $d = f_2 - f_1$ des fréquences et du rapport $\rho = a_2/a_1$ des amplitudes. Si $\rho = 1$, on a $f_{x_1+x_2}^{\text{H}}(t) = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$ pour tout t . Cependant, si $\rho \neq 1$ et $f_2 > f_1$, on a

$$f_x^{\text{GV}}(t_k) = \frac{f_1 + f_2}{2} + \frac{f_2 - f_1}{2} \cdot \left(\frac{1 + \rho}{1 - \rho} \right) > f_2 \quad (15)$$

pour tous les t_k tels que $t_k = (k + \frac{1}{2})/d$; $k \in \mathbb{Z}$.

Ce comportement apparemment paradoxal (la fréquence d’un signal à bande limitée est localement plus grande que la fréquence maximale du spectre) est classiquement invoqué pour justifier du caractère insatisfaisant de la fréquence instantanée au sens Gabor-Ville. De manière non moins paradoxale, c’est pourtant cette même définition qui est utilisée pour justifier le grand écart pouvant exister entre fréquence locale et bande spectrale dans le cas du phénomène récemment mis en avant de “supershift” et de “superoscillation” [5].

2.2 “Supershift” et “superoscillation”

Telle que proposée par Y. Aharonov et reprise par M.V. Berry [1], l’heuristique justifiant l’existence de “supershift” et/ou de “superoscillation” est la suivante. On choisit une fréquence arbitraire f_* et on considère la représentation spectrale

$$z_\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_\varepsilon(f - if_*) \exp\{i2\pi K(f)t\} df, \quad (16)$$

avec $f_1 \leq K(f) \leq f_2$, ce qui lui garantit d'être à bande limitée. Si l'on choisit alors G_ε telle que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon = \delta$, on obtient formellement que $z(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} z_\varepsilon(t) = \exp\{i2\pi K(if_*)t\}$. Ainsi, le choix par exemple de $K(f) = \cos 2\pi f$ correspond à un mode de Fourier de fréquence maximale $f_2 = 1$, alors que le signal $z(t)$ oscille à une fréquence $\cos(i2\pi f_*) = \cosh(2\pi f_*)$, quantité toujours supérieure à 1 et pouvant prendre une valeur arbitrairement grande. On se trouve ainsi dans la situation apparemment paradoxale d'une "superoscillation", c'est-à-dire d'un signal à bande limitée pouvant osciller plus vite que son mode de Fourier de fréquence la plus élevée.

Initialement qualifié du vocable unique de "superoscillation", ce phénomène est d'abord celui d'un "supershift" au sens où la fréquence locale est *déplacée* au-delà de la fréquence maximale du spectre sans que cela corresponde nécessairement à une oscillation : il en est ainsi dans le cas des deux raies spectrales considéré précédemment. Ceci étant précisé, il est tout-à-fait remarquable que le "supershift" puisse être associé dans certains cas à une "superoscillation" effective. Un modèle particulièrement simple pour cela a été proposé sous la forme [2] :

$$B(t) = (\cos(t/N) + ia \sin(t/N))^N ; a > 1, N \gg 1. \quad (17)$$

Comme ceci est illustré en Fig. 4, un choix convenable des paramètres peut conduire à une véritable "superoscillation". Il y a néanmoins un prix à payer, à savoir une nécessaire croissance exponentielle de l'amplitude du signal à l'extérieur de l'intervalle de "superoscillation" [5], ainsi qu'en atteste l'échelle logarithmique utilisée pour visualiser l'amplitude en Fig. 4.

On pourrait penser cet exemple très particulier, mais on en trouve de nombreux autres dans la littérature [5], un des plus simples nous ramenant au sinus cardinal d'où est partie la discussion présente. En effet, si l'on ré-écrit (1) selon :

$$s(t) = \frac{\sin(2\pi f_0 t)}{2\pi f_0 t} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4f_0^2 t^2}{n^2}\right), \quad (18)$$

il est justifié dans [8] qu'un déplacement de N zéros garantit que, pour tout $k > 0$, le signal

$$s_*(t) = \prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{4f_0^2 k^2 t^2}{n^2}\right) \prod_{n=N+1}^{\infty} \left(1 - \frac{4f_0^2 t^2}{n^2}\right) \quad (19)$$

reste à bande limitée $[-f_0, f_0]$ tout en oscillant à kf_0 sur l'intervalle $[-N/2kf_0, N/2kf_0]$.

3 Pour conclure

Que peut-on conclure de ces considérations essentiellement phénoménologiques ? En premier lieu d'abord, et on le savait depuis longtemps, que vouloir rendre une fréquence "instantanée" ou "locale" n'a pas de solution unique, différentes options mathématiques pouvant conduire à des résultats parfois très différents et sensiblement éloignés de ce que l'intuition physique pourrait laisser espérer. En deuxième lieu ensuite, que les deux points de vue d'instantanéité et de localité sont à distinguer, une possibilité de les réconcilier partiellement, non discutée ici faute

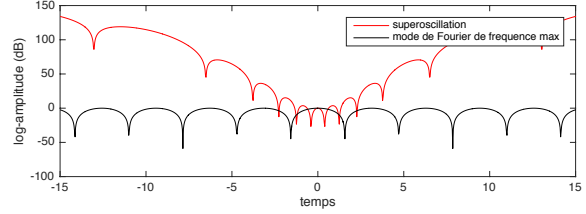


FIGURE 4 – "Superoscillation" (d'après [2]). Pour $a = 4$ et $N = 12$, le signal défini comme partie réelle de (17) oscille autour de l'origine plus rapidement que la fréquence la plus élevée de son spectre.

de place, étant de recourir à des approches "temps-fréquence" [6]. En troisième lieu enfin, que la notion même de fréquence est à considérer différemment suivant qu'il s'agit de propriétés locales ou globales. Ainsi, dans l'exemple des "superoscillations", c'est un agencement subtil des modes de Fourier qui "pousse" localement la fréquence en-dehors du spectre, redonnant tout son sens à l'affirmation de L. de Broglie [3] selon laquelle "Si l'on considère une grandeur qui peut être représentée, à la manière de Fourier, par une superposition de composantes monochromatiques, c'est la superposition qui a un sens physique et non les composantes de Fourier considérées isolément."

Les questions abordées ici n'ont pu être qu'effleurées et mériteraient de nombreux développements. L'objet ce texte était surtout de mettre le doigt sur certains comportements d'apparence paradoxale et d'inciter à réfléchir de façon plus approfondie aux questions qu'ils soulèvent.

Références

- [1] M.V. Berry, "Faster than Fourier," *Celebration of the 60th Birthday of Yakir Aharonov* (J.S. Anandan and J.L. Safko, eds.), Singapore : World Scientific, pp. 55–65, 1994.
- [2] M.V. Berry and N. Moiseyev, "Superoscillations and supershifts in phase space : Wigner and Husimi function interpretations," *J. Phys. A : Math. Theor. A*, **47** 315204, 2014.
- [3] L. de Broglie, *Certitudes et Incertitudes de la Science*, Paris : Albin-Michel, 1966.
- [4] L. Cohen, *Time-Frequency Analysis*, Englewood Cliffs : Prentice-Hall, 1995.
- [5] P.J.S.G. Ferreira, "Superoscillations," in *New Perspectives on Approximation and Sampling Theory : Festschrift in honor of Paul Butzer's 85th birthday* (G. Schmeisser and A. Zayed, eds.), Springer, pp. 247–268, 2014.
- [6] P. Flandrin, *Explorations in Time-Frequency Analysis*, Cambridge : Cambridge University Press, 2018.
- [7] N.E. Huang and S.P. Chen (eds.), *Hilbert-Huang Transform and Its Applications* (2nd edn.), Singapore : World Scientific, 2014.
- [8] W. Qiao, "A simple model of Aharonov-Berry's superoscillations," *J. Phys. A : Math. Gen.*, Vol. 29, pp. 2257–2258, 1996.
- [9] D. Vakman, "On the analytic signal, the Teager-Kaiser energy algorithm, and other methods for defining amplitude and frequency," *IEEE Trans. on Signal Proc.*, Vol. 44, No. 4, pp. 791–797, 1996.