

Identification de supports en k étapes avec OMP pour les dictionnaires continus

Clément ELVIRA¹, Rémi GRIBONVAL¹, Charles SOUSSEN², Cédric HERZET¹

¹Inria centre Rennes-Bretagne Atlantique, Université de Rennes, CNRS, IRISA, 35000 Rennes, France

²L2S, CentraleSupélec-CNRS-Université Paris-Saclay, 91192 Gif-sur-Yvette, France

prenom.nom@{inria.fr,centralesupelec.fr}

Résumé – Nous présentons de nouveaux résultats concernant les garanties d’identification de support en k étapes pour un algorithme glouton, *orthogonal matching pursuit* (OMP), pour les dictionnaires continus. Un dictionnaire est dit continu s’il est constitué d’une infinité indénombrable d’atomes. Nous étudions une famille de dictionnaires paramétrés, appelée CMF (pour *completely monotone function*), pour laquelle l’identification de support en k étapes est toujours possible lorsque le paramètre est de dimension 1 quels que soient le nombre et le choix des atomes du support. En dimension supérieure, des conditions algébriques deviennent nécessaires et nous amènent à revisiter les analyses classiques du cas discret. Finalement, nous discutons l’implémentation d’une version continue d’OMP.

Abstract – We present new theoretical results on sparse recovery guarantees for a greedy algorithm, orthogonal matching pursuit (OMP), in the context of continuous parametric dictionaries, *i.e.*, made up of an infinite uncountable number of atoms. We characterize a family of dictionaries which definition relies on completely monotone functions (CMF), for which k -step recovery is possible with OMP for 1-dimensional parameters. In higher dimension, algebraic conditions become necessary and lead us to revisit some well-known k -step discrete analyses.

1 Introduction

L’approximation parcimonieuse vise à approcher un élément $\mathbf{y} \in \mathcal{H}$ d’un espace de Hilbert, appelé ici observation, par une combinaison linéaire d’un petit nombre d’éléments appartenant à un dictionnaire noté $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}$. Idéalement, on cherche à écrire

$$\mathbf{y} = \sum_{\ell=1}^k c_{\ell} \mathbf{a}_{\ell} \quad \text{où } c_{\ell} \in \mathbb{R}, \mathbf{a}_{\ell} \in \mathcal{A}. \quad (1)$$

Une telle représentation est dite « parcimonieuse » si peu d’éléments sont impliqués dans la décomposition comparé à la dimension de l’espace ambiant. En particulier, on s’intéresse dans cet article à des dictionnaires de la forme

$$\mathcal{A} = \{\mathbf{a}(\theta) \mid \theta \in \Theta\}, \quad (2)$$

où Θ est l’espace des paramètres et $\mathbf{a} : \Theta \rightarrow \mathcal{H}$ un *atome paramétré*. De nombreuses méthodes de représentations parcimonieuses ont été proposées dans la littérature, voir [1] pour une présentation de ces procédures et leur analyse théorique. Toutefois, la plupart de ces contributions considèrent un « cadre discret », *i.e.*, lorsque le dictionnaire \mathcal{A} contient un nombre fini ou dénombrable d’éléments. Par exemple, ces représentations sont obtenues en résolvant un problème de minimisation ℓ_1 , *e.g.*, *Basis Pursuit* (BP) [2] ou *Lasso* [3], un problème de minimisation continu qui fait intervenir une mesure de parcimonie non convexe [4] ou par des *algorithmes gloutons*. Ces derniers sont des méthodes itératives démarrant d’un support vide et sélectionnant un nouvel atome à chaque itération. Dans cet article,

nous proposons une nouvelle étude théorique pour l’algorithme glouton appelé *Orthogonal Matching Pursuit* (OMP), voir Algorithme 1, lorsque le dictionnaire est « continu », c’est à dire constitué d’un nombre infini indénombrable d’atomes. Lorsque $\Theta = \mathbb{R}$, décomposer \mathbf{y} selon (1) correspond à un problème de déconvolution impulsionnelle où θ est un retard et $\mathbf{a}(\theta)$ la version « retardée » de la réponse impulsionnelle centrée. En dimension supérieure, ce formalisme couvre par exemple les problèmes de *sketching* [5] où θ désigne les paramètres du modèle d’apprentissage et \mathbf{a} l’opérateur de *sketching*. Ces problématiques se rencontrent dans différentes applications comme pour la reconstruction 3D de fluides en mouvement (PIV tomographique, pour *Particle Image Velocimetry*) [6], l’holographie digitale de particules, vue comme un problème de déconvolution impulsionnelle 2D [7] ou la reconstruction d’image en microscopie PALM/STORM [8].

Une question d’intérêt pour les méthodes gloutonnes est leur capacité à identifier des supports en k étapes. Étant donné un support $\mathcal{S}^* \triangleq \{\theta_{\ell}^*\}_{\ell=1}^k$ dit k -parcimonieux, supposons que \mathbf{y} s’écrive selon (1) avec $\mathbf{a}_{\ell} = \mathbf{a}(\theta_{\ell}^*)$ pour tout ℓ . Sous quelles conditions, OMP avec \mathbf{y} en entrée, peut-il identifier le support \mathcal{S}^* en exactement k itérations ? Dans le cas discret, une réponse à cette question a été apportée par Tropp [9]. Plus particulièrement, Tropp montre qu’OMP identifie \mathcal{S}^* en k étapes pour tout choix de coefficients non tous nuls dans (1) si et seulement si

$$\forall \theta \in \Theta \setminus \mathcal{S}^*, \quad \|\mathbf{G}^{-1} \mathbf{g}_{\theta}\|_1 < 1, \quad (3 - \text{ERC})$$

où $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{k \times k}$ est définie selon $\mathbf{G}[i, j] = \langle \mathbf{a}(\theta_i^*), \mathbf{a}(\theta_j^*) \rangle$

Algorithme 1 : Algorithme OMP

Entrées : Observation \mathbf{y} , atome paramétré $\mathbf{a}(\cdot)$ et niveau de parcimonie k .

```
1 pour  $t \leftarrow 1$  à  $k$  faire
2    $\mathbf{r} = \mathbf{y} - \sum_{\ell=1}^{t-1} \hat{c}_\ell \mathbf{a}(\hat{\theta}_\ell)$  ;
3    $\hat{\theta}_t \in \arg \max_{\theta \in \Theta} |\langle \mathbf{a}(\theta), \mathbf{r} \rangle|$  ;
4    $\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_t = \arg \min_{(c_1, \dots, c_t) \in \mathbb{R}^t} \left\| \mathbf{y} - \sum_{\ell=1}^t c_\ell \mathbf{a}(\hat{\theta}_\ell) \right\|_{\mathcal{H}}$  ;
5 fin
6 Sorties :  $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_k$  et  $\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_k$ 
```

et $\mathbf{g}_\theta \in \mathbb{R}^k$ selon $\mathbf{g}_\theta[i] = \langle \mathbf{a}(\theta), \mathbf{a}(\theta_i^*) \rangle$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire dans \mathcal{H} . La condition (3 – ERC) est connue sous le nom d'*exact recovery condition* (ERC) dans la littérature et peut être vérifiée numériquement étant donné un dictionnaire fini et un support \mathcal{S}^* donné. Il est à noter que (3 – ERC) est aussi connectée à l'identification de \mathcal{S}^* avec d'autres algorithmes gloutons [10, 11] ou comme solutions de problèmes convexes [12–14]. Cependant, la condition (3 – ERC) est d'un intérêt limité puisqu'elle se focalise sur le succès de reconstruction d'un support \mathcal{S}^* donné. D'autres conditions de succès ont été proposées, plus simples à évaluer mais plus restrictives. Les conditions les plus populaires exploitent la *cohérence mutuelle* μ du dictionnaire et requièrent

$$k < \frac{1}{2}(1 + \mu^{-1}) \quad \text{où } \mu = \sup_{\theta \neq \theta' \in \Theta} |\langle \mathbf{a}(\theta), \mathbf{a}(\theta') \rangle|. \quad (4)$$

Pour un dictionnaire paramétré, le formalisme discret correspond à une grille sur l'espace des paramètres. Cependant, si l'un des paramètres d'intérêt n'est pas sur la grille alors l'identification parfaite est impossible.

Ces dernières années, plusieurs travaux ont été consacrés aux représentations parcimonieuses dans un cadre « continu », *i.e.*, lorsque le dictionnaire contient une infinité indénombrable d'atomes [15–17]. En particulier, des versions continues du Lasso [18, 19] et de BP [16] ont été formulées en se plaçant dans un contexte de théorie de la mesure. À ce jour, les garanties de reconstruction pour le cas continu concernent principalement les solutions des problèmes convexes. En effet, les analyses de reconstruction pour les algorithmes gloutons ne peuvent être étendues au cas continu car i) l'évaluation de la condition (3 – ERC) n'est plus une opération triviale, le suprémum pouvant être difficile à évaluer et ii) la cohérence μ vaut 1 et la condition (4) n'est vérifiée que pour $k = 0$. Au contraire, il a été montré que pour certaines familles de dictionnaires, il est possible d'identifier le support d'une observation \mathbf{y} à partir des solutions de BP ou du Lasso [16, 17, 19] si les éléments du support sont suffisamment séparés.

Dans ce travail, on s'intéresse aux propriétés d'identification de support par OMP pour les dictionnaires continus. La condition (3 – ERC) sert de point départ pour ré-exprimer l'identification d'un support comme une propriété de l'opérateur linéaire induit par le produit scalaire entre deux atomes. Dans [20], nous avons montré que l'identification de support est possible

pour un dictionnaire exponentiel. Ici, nous dérivons un résultat plus général qui sera développé dans une version longue [21].

Cet article est organisé comme suit. La Section 2 précise les notions de dictionnaires « continus » et d'identification de support. La Section 3 présente nos résultats d'identification de supports pour une famille de dictionnaires particulière. Nous discutons les problématiques liées à l'implémentation dans la Section 4 et la Section 5 conclut l'article.

2 Contexte des dictionnaires continus

2.1 Dictionnaire continu

Notre analyse d'OMP est valide pour tout espace de paramètres Θ contenant une infinité indénombrable d'éléments (*e.g.*, un pavé de \mathbb{R}^D). Cependant, pour simplifier l'exposé, nous considérons uniquement le cas où $\Theta = \mathbb{R}^D$ avec $D \geq 0$. On suppose également que la fonction $\mathbf{a} : \Theta \rightarrow \mathcal{H}$ est continue, *i.e.*, $\forall \theta \in \Theta$, $\lim_{\theta' \rightarrow \theta} \|\mathbf{a}(\theta') - \mathbf{a}(\theta)\| = 0$ et que les atomes $\mathbf{a}(\cdot)$ sont normés, *i.e.*, $\|\mathbf{a}(\theta)\| = 1$.

Dans la suite, les résultats d'identification de support dépendront des propriétés du noyau $\kappa(\theta, \theta')$ induit par le produit scalaire entre deux atomes paramétrés et défini par

$$\kappa(\theta, \theta') \triangleq \langle \mathbf{a}(\theta), \mathbf{a}(\theta') \rangle \quad \forall \theta, \theta' \in \Theta. \quad (5)$$

Les hypothèses de *continuité* et de *normalisation* impliquent

$$\begin{aligned} \text{« normalisation » :} & \quad \kappa(\theta, \theta) = 1 \quad \forall \theta \in \Theta, \\ \text{« continuité » :} & \quad \lim_{\theta' \rightarrow \theta} \kappa(\theta, \theta') = 1 \quad \forall \theta \in \Theta. \end{aligned} \quad (6)$$

Combinée avec l'inégalité de Cauchy-Schwartz, la normalisation (6) implique $|\kappa(\theta, \theta')| \leq 1$. Enfin, nous considérons uniquement des noyaux évanescents, *i.e.*, tel que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\theta \in \Theta$,

$$\exists K_\varepsilon \subset \Theta \text{ compact} : \sup_{\theta \in \Theta \setminus K_\varepsilon} |\kappa(\theta, \theta')| < \varepsilon. \quad (7)$$

Les conditions (6) et (7) garantissent qu'il existe au moins un maximiseur au problème de « sélection » (Algorithme 1, ligne 3) considéré par OMP.

2.2 Identification d'un support

Dans cette partie, la notion de support identifiable en k étapes est précisée. Soit $\mathcal{S}^* \triangleq \{\theta_\ell^*\}_{\ell=1}^k$ un sous-ensemble de Θ . Une observation \mathbf{y} a pour support \mathcal{S}^* si \mathbf{y} s'écrit selon (1) avec $\mathbf{a}_\ell = \mathbf{a}(\theta_\ell^*)$ et $c_\ell \in \mathbb{R}^*$ pour tout $\ell \in \llbracket 1, k \rrbracket$. De plus, si \mathbf{y} a pour support \mathcal{S}^* tel que $\text{card}(\mathcal{S}^*) = k$, \mathbf{y} est dit « k -parcimonieux ». Étant donné \mathbf{y} , on dit qu'OMP identifie \mathcal{S}^* en « k étapes » si et seulement si

$$\arg \max_{\theta \in \Theta} |\langle \mathbf{a}(\theta), \mathbf{r} \rangle| \subseteq \mathcal{S}^*, \quad (8)$$

durant les k premières itérations, où $\mathbf{r} \in \mathcal{H}$ est l'observation résiduelle (*cf.* Alg. 1, ligne 4). L'Éq. (8) garantit que les maximiseurs de corrélation (Alg. 1 ligne 3) appartiennent au support \mathcal{S}^* , *i.e.*,

$$\max_{\theta \in \mathcal{S}^*} |\langle \mathbf{a}(\theta), \mathbf{r} \rangle| > |\langle \mathbf{a}(\theta'), \mathbf{r} \rangle| \quad \forall \theta' \in \Theta \setminus \mathcal{S}^*. \quad (9)$$

Enfin, on dit qu'OMP identifie « uniformément en k étapes » un support \mathcal{S}^* si la condition (8) est satisfaite pour toute observation \mathbf{y} de support \mathcal{S}^* . En d'autres mots, le support est correctement identifié pour tout choix des coefficients $c_1 \dots c_k$ non tous nuls dans (1).

3 Identification uniforme de support

Introduisons préalablement une classe de dictionnaires permettant l'identification de supports en k étapes par OMP, voir les Th. 1 et 3. Le lecteur intéressé trouvera les preuves de ces résultats dans [20]. Soient $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^D)$ et $\lambda > 0$. Considérons le dictionnaire \mathcal{A} dont les atomes $\mathbf{a}(\theta)$ sont les fonctions

$$\mathbf{a}(\theta) : t \in \mathbb{R}^D \mapsto (2\lambda)^{\frac{D}{2}} e^{-\lambda \mathbf{1}_D^\top (t-\theta)} \mathbb{I}_{\{t \geq \theta\}}, \quad (10)$$

pour tout $\theta \in \mathbb{R}^D$ où $\mathbf{1}_D = (1 \dots 1)^\top \in \mathbb{R}^D$ et \mathbb{I} vaut 1 si l'inégalité est vérifiée par toutes les composantes de θ , et 0 sinon. On vérifie facilement que le produit scalaire κ dans $L_2(\mathbb{R}^D)$ entre deux atomes s'écrit $\langle \mathbf{a}(\theta), \mathbf{a}(\theta') \rangle = e^{-\lambda \|\theta - \theta'\|_1}$ et correspond au noyau Laplacien. C'est un cas particulier de dictionnaires CMF (pour *Completely Monotone Function*, fonction complètement monotone [22]) proposés dans [21] où $\kappa(\theta, \theta') = \varphi(\|\theta - \theta'\|_p^p)$ où φ est une CMF et $\varphi(0) = 1$.

3.1 Identification de supports k -parcimonieux

Pour le cas $\Theta = \mathbb{R}$ ($D = 1$), l'identification de supports en k étapes est possible pour le dictionnaire défini sous (10) :

Théorème 1. *Soit $\Theta = \mathbb{R}$, $k \geq 1$, \mathcal{A} un dictionnaire CMF (voir [21]) et \mathcal{S}^* un support k -parcimonieux. Alors, pour toute observation \mathbf{y} de support \mathcal{S}^* , OMP identifie \mathcal{S}^* en k -itérations.*

La contribution du Th. 1 est la suivante : bien que la cohérence du dictionnaire soit 1, OMP identifie tout support k -parcimonieux. Ce résultat ne nécessite aucune hypothèse de séparation entre les paramètres du support \mathcal{S}^* , contrairement aux résultats classiques pour les combinaisons linéaires de signes inconnus d'atomes dans des dictionnaires continus [16, 17].

En revanche, un tel résultat n'est plus vrai lorsque $\Theta \subset \mathbb{R}^D$ avec $D \geq 2$. De façon analogue aux résultats de [16, 17] pour BLasso, il est possible de garantir pour OMP l'identification en k étapes en dimension supérieure à l'aide de conditions de séparation. Étant donné un support $\mathcal{S} = \{\theta_\ell\}_{\ell=1}^k$, on définit :

$$\Delta_0(\mathcal{S}) \triangleq \min_{\substack{d=1, \dots, D \\ i \neq j}} |\theta_j[d] - \theta_i[d]| \quad \text{t.q.} \quad \theta_i[d] \neq \theta_j[d], \quad (11)$$

la plus petite séparation entre les coordonnées non égales d'un support. Lorsque Δ_0 est petit, il est possible de trouver une configuration de paramètres telle que OMP échoue à la première itération (voir [20]). Lorsque cette séparation est suffisamment grande, l'identification en k étapes est possible :

Théorème 2. *Soit $\Theta = \mathbb{R}^D$ avec $D \geq 2$, \mathcal{A} le dictionnaire défini en (10) et \mathcal{S}^* un support k -parcimonieux. Si*

$$\Delta_0(\mathcal{S}^*) > \lambda^{-1} \log(2k - 1), \quad (12)$$

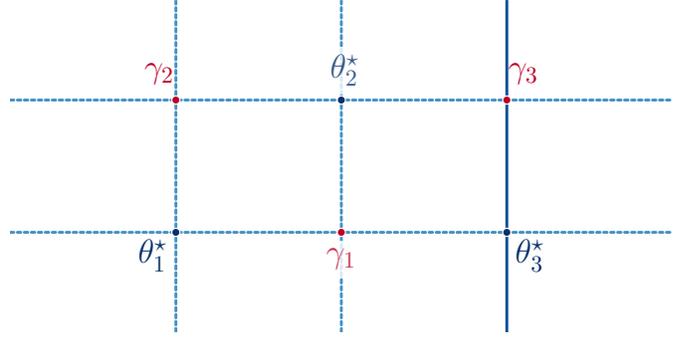


FIGURE 1 – Illustration de la définition de l'ensemble augmenté Γ (voir (14)) pour $D = 2$ et $k = 3$. Ici, $\Gamma((\theta_\ell^*)_{\ell=1}^3)$ est composé des θ_ℓ^* et de 3 autres points notés γ_ℓ .

ou, de façon équivalente,

$$k < \frac{1}{2} \left(1 + e^{\lambda \Delta_0(\mathcal{S}^*)} \right), \quad (13)$$

Alors OMP identifie uniformément \mathcal{S}^* en k itérations.

Le Th. 2 garantit qu'OMP peut identifier tout support k -parcimonieux suffisamment séparé à partir d'une combinaison linéaire d'atomes. Nous soulignons que la condition (13) est de type cohérence mutuelle (cf. (4)). La principale différence avec le cas discret est que seulement un sous-ensemble du dictionnaire est impliqué dans la condition.

3.2 Identification d'un support donné

Dans [20] nous avons montré que la condition (12) est fine pour certaines configurations de points. Toutefois, l'identification de support k -parcimonieux peut être complètement caractérisée par une condition de type ERC. Introduisons à cet effet l'ensemble augmenté

$$\Gamma(\mathcal{S}) = \prod_{d=1}^D \left\{ \theta[d] \mid \theta \in \mathcal{S} \right\} \quad (14)$$

où \times est le produit cartésien. Notons que $\mathcal{S} \subseteq \Gamma(\mathcal{S})$ pour tout \mathcal{S} . La Fig. 1 illustre ces définitions avec $\mathcal{S}^* = \{\theta_1^*, \theta_2^*, \theta_3^*\}$. L'ensemble $\Gamma(\mathcal{S}^*)$ permet de caractériser une condition ERC généralisée assurant l'identification de \mathcal{S}^* en k étapes via OMP :

Théorème 3. *Soit $\Theta = \mathbb{R}^D$ $k \geq 1$, \mathcal{A} le dictionnaire défini en (10) et $\mathcal{S}^* = \{\theta_\ell^*\}_{\ell=1}^k$ un support k -parcimonieux. Alors OMP identifie uniformément \mathcal{S}^* en k étapes si et seulement si*

$$\max_{\theta \in \Gamma(\mathcal{S}^*) \setminus \mathcal{S}^*} \|\mathbf{G}^{-1} \mathbf{g}_\theta\|_1 < 1. \quad (15 - \text{ERC})$$

En particulier, si (15 – ERC) n'est pas vérifiée, alors il existe une combinaison linéaire d'atomes $\mathbf{y} = \sum_{\ell=1}^k c_\ell \mathbf{a}(\theta_\ell^*)$ telle que OMP avec \mathbf{y} en entrée échoue à la première itération.

Comme $\text{card}(\mathcal{S}^*) < +\infty$, la condition (15 – ERC) n'implique qu'un nombre fini de points. En conséquence, cette condition peut être évaluée numériquement.

4 Implémentation

Des implémentations efficaces d’algorithmes gloutons pour les dictionnaires continus ont déjà été proposées dans la littérature. Une version améliorée d’OMP pour les dictionnaires continus est présentée pour le *sketching* [5]. Dans [23] un algorithme de Frank-Wolfe modifié est proposé pour résoudre le Lasso continu. La principale différence avec notre analyse est que l’erreur d’estimation des paramètres à chaque itération dépend de la précision de la méthode utilisée à l’étape de sélection (Alg. 1 ligne 3). Au mieux, un support est identifié avec une erreur de l’ordre de la précision machine. Même si cette erreur n’a pas d’impact sur les résultats de nos simulations numériques, de futurs travaux visent à étudier les itérés d’OMP en tenant compte de cette imprécision.

5 Conclusion et perspectives

Cet article aborde l’analyse de reconstruction exacte d’OMP pour des dictionnaires continus. Nous avons montré qu’il existe une famille de dictionnaires paramétrés pour laquelle OMP est capable d’identifier un support k -parcimonieux en k itérations. En particulier, les performances d’OMP dépendent de la dimension de l’espace des paramètres. En dimension 1, OMP identifie uniformément tout support k -parcimonieux tandis que la condition algébrique (15 – ERC) est nécessaire en dimension supérieure. La condition (15 – ERC) est exploitée pour construire une condition suffisante basée sur la séparation entre les paramètres. Toutefois, l’analyse d’OMP présentée ici n’est pas limitée aux dictionnaires définis par (10). Dans [21], nous étendons ces résultats à une large classe de noyaux.

Finalement, notons que les Théorèmes 1, 2 et 3 concernent exclusivement l’identification exacte de supports en k étapes pour les dictionnaires CMF. À première vue, cette classe de dictionnaires peut sembler restrictive. Toutefois, son étude a permis de lever plusieurs verrous méthodologiques et les techniques de preuves développées dans [21] ouvrent la voie à reformulation de ces résultats en autorisant les paramètres estimés à être dans un voisinage des vrais paramètres. Bien que plus faible en apparence, ce type de résultat permettrait de pallier une limitation de l’analyse puisqu’en pratique l’identification se fait au mieux avec une erreur de l’ordre de l’imprécision machine. D’autre part, cela pourrait permettre de couvrir une classe de dictionnaires plus large que les dictionnaires CMF.

Remerciements Ce travail a été en partie soutenu par le projet ANR Becose no. ANR-15-CE23-0021 et le Labex CominLabs.

Références

[1] S. Foucart and H. Rauhut, *A Mathematical Introduction to Compressive Sensing*, Springer New York, 2013.
[2] S. S. Chen, D. L. Donoho, and M. A. Saunders, “Atomic decomposition by basis pursuit,” *SIAM Jour. on Scient. Comp.*, 1998.

[3] R. Tibshirani, “Regression shrinkage and selection via the Lasso,” *Journal of the Royal Statistical Society. Series B*, 1996.
[4] G. Gasso, A. Rakotomamonjy, and S. Canu, “Recovering sparse signals with a certain family of nonconvex penalties and DC programming,” *IEEE Trans. on Sig. Proc.*, 2009.
[5] R. Gribonval, G. Blanchard, N. Keriven, and Y. Traonmilin, “Compressive Statistical Learning with Random Feature Moments,” *preprint*, 2017.
[6] I. Barbu and C. Herzet, “A new approach for volume reconstruction in tomographic with the alternating direction method of multipliers,” *Measurement Science and Technology*, 2016.
[7] L. Denis, D. A. Lorenz, and D. Trede, “Greedy solution of ill-posed problems : Error bounds and exact inversion,” *Inverse Problems*, Nov. 2009.
[8] S. T. Hess, T.P.K. Girirajan, and M. D. Mason, “Ultra-high resolution imaging by fluorescence photoactivation localization microscopy,” *Biophysical Journal*, 2006.
[9] J. A. Tropp, “Greed is good : algorithmic results for sparse approximation,” *IEEE Trans. on Inf. Th.*, 2004.
[10] C. Soussen, R. Gribonval, J. Idier, and C. Herzet, “Joint k -Step Analysis of Orthogonal Matching Pursuit and Orthogonal Least Squares,” *IEEE Trans. on Inf. Th.*, 2013.
[11] R. Gribonval and P. Vandergheynst, “On the exponential convergence of matching pursuits in quasi-incoherent dictionaries,” *IEEE Trans. on Inf. Th.*, 2006.
[12] R. Gribonval and M. Nielsen, “Sparse representations in unions of bases,” *IEEE Trans. on Inf. Th.*, 2003.
[13] J.-J. Fuchs, “On sparse representations in arbitrary redundant bases,” *IEEE Trans. on Inf. Th.*, 2004.
[14] J. A. Tropp, “Just relax : convex programming methods for identifying sparse signals in noise,” *IEEE Trans. on Inf. Th.*, 2006.
[15] C. Ekanadham, D. Tranchina, and E. P. Simoncelli, “Recovery of sparse translation-invariant signals with continuous basis pursuit,” *IEEE Trans. on Sig. Proc.*, 2011.
[16] E. J. Candès and C. Fernandez-Granda, “Towards a Mathematical Theory of Super-resolution,” *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2014.
[17] V. Duval and G. Peyré, “Exact support recovery for sparse spikes deconvolution,” *Found. Comput. Math.*, 2015.
[18] K. Bredies and H. K. Pirkkarainen, “Inverse problems in spaces of measures,” *ESAIM : Cont., Opt. and Calc. of Var.*, 2012.
[19] Y. de Castro and F. Gamboa, “Exact reconstruction using Beurling minimal extrapolation,” *Jour. of Math. An. and App.*, 2012.
[20] C. Elvira, R. Gribonval, C. Soussen, and C. Herzet, “Omp and continuous dictionaries : Is k -step recovery possible?,” in *ICASSP 2019 - 2019 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, May 2019, pp. 5546–5550.
[21] C. Elvira, R. Gribonval, C. Soussen, and C. Herzet, “When does omp achieve support recovery with continuous dictionaries?,” *preprint arXiv*, 2019.
[22] M. Merkle, “Completely Monotone Functions : A Digest,” 2014.
[23] Q. Denoyelle, V. Duval, G. Peyré, and E. Soubies, “The Sliding Frank-Wolfe Algorithm and its Application to Super-Resolution Microscopy,” *preprint arXiv*, 2018.