

Modélisation de la statistique du signal OFDM pour l'étude analytique de l'EVM avec réduction de PAPR par porteuses réservées

Mariam ELHASSAN^{1,3}, Matthieu CRUSSIÈRE¹, Jean-François HÉLARD¹, Youssef NASSER², Oussama BAZZI³

¹Univ Rennes, INSA Rennes, CNRS, IETR-UMR6164, F-35000 Rennes, France

²American University of Beirut, Beirut, Liban 1107 2020

³Université Libanaise, Faculté de Sciences 1, Hadath, Liban

{mariam.el-hassan, matthieu.crussiere, jean-francois.helard}@insa-rennes.fr,
yn17@aub.edu.lb, obazzi@ul.edu.lb

Résumé – La distribution statistique de l'amplitude du signal OFDM temporel, auquel est appliqué l'algorithme optimal de *Tone Reservation* pour la réduction de PAPR, est évaluée et modélisée. Cette étude fournit un résultat important et essentiel en tant que première étape à l'obtention d'une expression analytique de la métrique "Magnitude du Vecteur d'Erreur" (EVM) des signaux OFDM en présence de réduction de PAPR. L'algorithme de réduction utilisé étant mathématiquement optimal, le modèle proposé permet d'accéder à la borne inférieure de l'EVM des signaux OFDM avec réduction de PAPR.

Abstract – The distribution of the time domain OFDM signal amplitude, submitted to the optimal Tone Reservation (TR) PAPR reduction, is evaluated and modeled. This result comes as an essential first step in order to analytically derive the Error Vector Magnitude (EVM) metric considering the impact of PAPR reduction. As the optimal PAPR reduction algorithm is considered in our study, the proposed statistical model is expected to lead to the derivation of the lower bound of the EVM for OFDM signals with PAPR reduction.

1 Introduction

Les techniques multiporteuses de type *Orthogonal Frequency Division Multiplexing* (OFDM), largement déployées dans les systèmes de communication sans fils, se caractérisent par une grande dynamique du signal transmis qui est mesurée par le rapport de la puissance crête sur la puissance moyenne ou *Peak to Average Power Ratio* (PAPR). Lors de l'amplification de ces signaux par des Amplificateurs de haute Puissance (AP) qui sont par essence non linéaires, cette grande dynamique du signal nécessite d'utiliser un certain recul ou *Input Back-Off* (IBO) par rapport au niveau de saturation de l'amplificateur afin de limiter les distorsions générées dans la bande et en dehors de la bande du signal. Ceci veut dire que le point de fonctionnement utilisé conduit à une efficacité énergétique qui est d'autant plus faible que le recul est élevé.

Plusieurs techniques de réduction de PAPR ont été proposées dans la littérature pouvant être appliquées au signal avant amplification pour réduire sa dynamique et pouvoir utiliser un recul plus faible. La plus simple est la technique du *clipping* [1], mais elle introduit de fortes distorsions sur le signal. Des techniques avancées comme *Tone Reservation* (TR) [2] ont été adoptées par des standards comme *Digital Video Broadcasting - Second Generation Terrestrial* (DVB-T2) [3] ou *Advanced Television Systems Committee 3.0* (ATSC3.0) [4].

Malgré le grand nombre d'algorithmes de réduction de PAPR

proposés dans la littérature, l'évaluation analytique de leurs performances, dans le but de répondre à la question globale de l'efficacité des systèmes de transmission de façon analytique (et pas algorithmique), n'a pas été suffisamment étudiée. En effet, l'évaluation de métriques de performances comme l'*Error Vector Magnitude* (EVM) et l'*Adjacent Channel Power Ratio* (ACPR) est d'un grand intérêt afin de prévoir les gains en efficacité énergétique offerts par ces techniques.

Dans ce contexte, une étude récente a évalué les performances analytiques de la technique de *clipping* par la dérivation analytique de l'EVM [5]. Aujourd'hui, aucune technique avancée telle que la technique TR n'a été analytiquement évaluée. Dans cette perspective, on propose dans ce papier de modéliser la distribution statistique de l'amplitude du signal OFDM dans le domaine temporel après l'application de cette technique. Ce travail vient comme première étape pour la dérivation ultérieure de l'expression analytique de l'EVM. Afin d'évaluer les bornes de performances de la technique de TR notre étude s'intéresse à la solution optimale de réduction de PAPR par TR qui consiste à résoudre un problème convexe de type *Quadratically Constrained Quadratic Problem* (QCQP). La contribution principale est donc de proposer, à partir d'une analyse approfondie, une expression analytique de la distribution de l'amplitude du signal OFDM dont le PAPR est réduit par TR-QCQP, dans la perspective d'un calcul analytique de l'EVM.

Le reste du papier est organisé comme suit. La section 2 dé-

crit le modèle du système notamment le modèle de l'AP, la technique TR et l'expression de l'EVM. La section 3 décrit les étapes suivies pour aboutir au modèle statistique du signal et valide ce résultat. Enfin, la section 4 résume ce papier.

2 Description du système

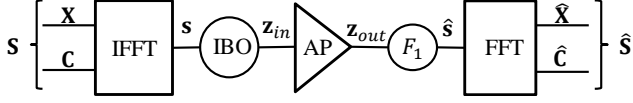


FIGURE 1: Schéma block de la chaîne de transmission

La Fig. 1 décrit la chaîne de transmission OFDM considérée. Sans restreindre le cas général, on considère un système OFDM avec $N = 1024$ sous-porteuses auxquelles est appliquée une constellation QAM-16 et en utilisant une trame DVB-T2 [3] avec les positions correspondantes des porteuses réservées pour la réduction de crêtes ou *Peak Reserved Tones* (PRT), soit 10 PRT. On considère, dans le domaine fréquentiel, \mathbf{X} , \mathbf{C} , $\mathbf{S} \in \mathbb{C}^N$ respectivement le signal de donnée d'origine, le signal ajouté par TR, le signal résultant de cette addition et $\hat{\mathbf{X}}$, $\hat{\mathbf{C}}$, $\hat{\mathbf{S}}$ les signaux reçus correspondants respectifs. Soit $\mathbf{s} \in \mathbb{C}^N$ le signal temporel de puissance moyenne P_s correspondant à \mathbf{S} qui est amplifié par l'AP après l'application de l'IBO tel que le signal à l'entrée de l'AP a une puissance moyenne P_{in} . Le signal \mathbf{z}_{out} à la sortie de l'AP, de puissance moyenne P_{out} est normalisé par un facteur $F_1 = \frac{P_s}{P_{out}}$, afin de comparer le signal $\hat{\mathbf{s}}$ obtenu au signal \mathbf{s} d'origine avec les mêmes niveaux d'énergie lors de l'évaluation de l'EVM.

Réduction de PAPR par TR Selon le principe de TR, le signal \mathbf{C} est ajouté au signal \mathbf{X} pour obtenir le signal \mathbf{S} afin de réduire le PAPR de sa réponse temporelle \mathbf{s} , soit :

$$\mathbf{S} = \mathbf{X} + \mathbf{C}. \quad (1)$$

Le vecteur \mathbf{C} est composé des R PRT selon un sous-ensemble de sous-porteuses β , les vecteurs \mathbf{X} et \mathbf{C} appartiennent à des sous-espaces disjoints de fréquences tels que $X_k = 0, \forall k \in \beta$ et $C_k = 0, \forall k \in \beta^c$, ce qui assure que la méthode de TR n'introduit pas d'interférences entre \mathbf{X} et \mathbf{C} .

Par suite, \mathbf{C} est calculé à partir du problème d'optimisation proposé par Tellado [2] comme suit :

$$\begin{aligned} \min \tau \\ \text{tel que } \|\mathbf{x} + \mathbf{QC}\|_\infty^2 \leq \tau \end{aligned} \quad (2)$$

où \mathbf{Q} est la matrice de la transformation de Fourier rapide inverse (IFFT) et $\|\cdot\|_\infty$ est la norme infinie. Dans les standards, une contrainte de puissance s'ajoute sur les PRTs. Soit $\Gamma = 10^{\frac{\lambda}{10}}$ le rapport entre la puissance maximale de chaque PRT et P_x , la puissance moyenne d'une porteuse data, où λ est la valeur de ce boost de puissance en dB , la condition suivante s'ajoute :

$$\|\mathbf{C}\|_\infty^2 \leq \Gamma \cdot P_x \quad (3)$$

Le problème est donc un problème convexe de type QCQP [2].

Amplificateur de puissance Un modèle d'amplificateur sans mémoire, et donc qui n'introduit pas de distorsions sur la phase du signal, est considéré tel que la caractéristique amplitude - amplitude est exprimée par [6] :

$$H_{AP}(r) = \sum_{l=0}^{L-1} b_{2l+1} r^{2l+1} \quad (4)$$

où L est l'ordre du polynôme modèle de l'amplificateur et b_{2l+1} ses coefficients d'indices impairs.

Expression de l'EVM L'EVM est une métrique qui mesure le taux de déviation des points de constellation de \mathbf{X} par rapport à $\hat{\mathbf{X}}$. En remarquant que la technique de TR n'ajoute pas de distorsions au signal, dû à l'utilisation de porteuses orthogonales, l'EVM peut être évaluée soit dans le domaine fréquentiel sur les signaux \mathbf{S} et $\hat{\mathbf{S}}$ soit dans le domaine temporel sur \mathbf{s} et $\hat{\mathbf{s}}$. L'EVM s'exprime donc par :

$$EVM = \sqrt{\frac{E\{|\hat{s}(k) - s(k)|^2\}}{E\{|s(k)|^2\}}} \quad (5)$$

Par passage aux coordonnées polaires, r et ϕ , du signal de référence \mathbf{s} , on remarque que \mathbf{s} et $\hat{\mathbf{s}}$ ont la même phase et que la phase et l'amplitude sont deux v.a indépendantes. Le calcul ne dépend donc que de l'amplitude des signaux et l'EVM peut être exprimée par :

$$EVM = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{s}(r) - r|^2 f_s(r) dr}{\int_{-\infty}^{\infty} r^2 f_s(r) dr}} \quad (6)$$

où $f_s(r)$ est la densité de probabilité de l'amplitude du signal \mathbf{s} . À partir du modèle de la chaîne, $\hat{s}(r)$ s'exprime en fonction de l'amplitude r du signal de référence $\mathbf{s}(r)$ par :

$$\hat{s}(r) = \sqrt{\frac{P_s}{P_{out}}} H_{AP} \left(\sqrt{\frac{P_{in}}{P_s}} r \right) \quad (7)$$

L'évaluation de l'EVM repose donc sur la connaissance de la densité de probabilité $f_s(r)$, de l'amplitude du signal \mathbf{s} , signal OFDM après application de TR.

3 Distribution du signal s

À partir de l'expression de l'EVM décrite dans la section 2, une analyse statistique rigoureuse est menée sur l'amplitude du signal \mathbf{s} afin d'en modéliser proprement la densité de probabilité $f_s(r)$. Comme première étape, la distribution empirique, obtenue par simulations avec application ou non de l'algorithme TR est donnée Fig. 2. Les cas avec $\lambda = 10$ dB et sans contrainte de puissance sont testés. On vérifie que la distribution de l'amplitude du signal OFDM sans réduction de PAPR suit une loi de Rayleigh par application du théorème de la limite centrale. Il s'avère cependant que la distribution obtenue après application de l'algorithme TR-QCQP suit une loi bimodale qui dépend du gain de puissance λ imposé sur les PRT. Dans ce qui suit, on vise à analyser cette bimodalité et en dériver un modèle en fonction de λ .

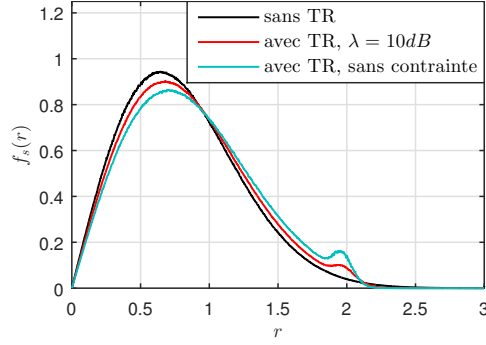


FIGURE 2: Distribution simulée de l'amplitude du signal temporel sans réduction de PAPR, avec TR-QCQP avec $\lambda = 10$ dB ou sans contrainte de puissance.

3.1 Distribution d'un seul symbole

Afin de comprendre l'origine de la bimodalité de la distribution de l'amplitude du signal, l'histogramme de l'amplitude d'un seul symbole OFDM est représenté Fig. 3 pour le cas sans contrainte de puissance. La figure à droite montre les valeurs des amplitudes d'un seul symbole après l'application de l'algorithme de TR-QCQP et la figure à gauche représente l'histogramme correspondant. Il se trouve donc que chaque symbole est composé de deux groupes d'échantillons. Le premier groupe concerne les échantillons ayant une amplitude égale à l'amplitude maximale sur ce symbole, $A_{max} = \|s\|_{\infty}$, et donne lieu au pic dans l'histogramme pour $r = A_{max}$. Le second est composé du reste des échantillons, ayant une amplitude inférieure à A_{max} . Il est important de noter ici que cette valeur A_{max} est différente pour chaque symbole OFDM car elle dépend de la solution trouvée par l'algorithme QCQP pour ce symbole. Il est aussi important de noter que la distribution des échantillons ayant une amplitude inférieure à A_{max} n'est pas la même qu'avant l'application du QCQP. En effet tous les symboles prennent de nouvelles valeurs et l'algorithme n'agit pas en simple écrêteur d'amplitude.

3.2 Séparation des distributions

À partir des observations de la section 3.1, on poursuit l'analyse par une séparation des distributions des deux parties décrites pour chaque symbole. On propose donc de modéliser la distribution bimodale comme étant une superposition de deux distributions séparées, mais pas indépendantes, comme suit :

$$f_s(r) = (1 - p)f_{s1}(r) + pf_{s2}(r) \quad (8)$$

avec
$$\begin{cases} f_{s1}(r) = P\{|s_k| = r \mid r \neq \|s\|_{\infty}\} \\ f_{s2}(r) = P\{|s_k| = r \mid r = \|s\|_{\infty}\} \end{cases}$$

où p est la moyenne du rapport entre le nombre d'échantillons d'un symbole à A_{max} correspondant et le nombre total d'échantillons (soit 1024 ici). La Fig. 4 illustre ces distributions séparées obtenues pour le cas sans contrainte de puissance. Dans ce qui suit on s'intéresse donc à modéliser les deux composantes de la distribution.

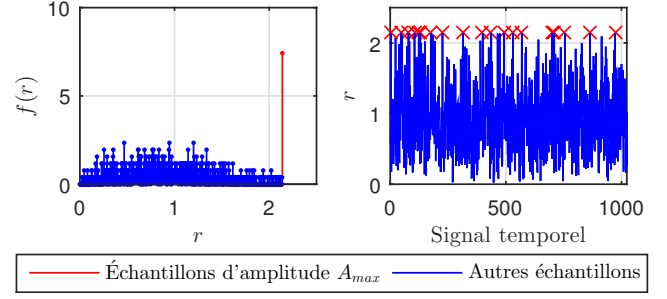


FIGURE 3: Présentation temporelle de l'amplitude d'un seul symbole avec TR-QCQP et l'histogramme correspondant.

3.3 Modèle de la distribution $f_{s2}(r)$

À partir de la forme simulée de la distribution $f_{s2}(r)$ pour différentes valeurs de λ , un modèle convenable de $f_{s2}(r)$ est la distribution GEV, de paramètres μ_2 , σ_2 et k_2 :

$$f_{s2}(r) = f_{\text{GEV}}(r; \mu_2, \sigma_2, k_2) \quad (9)$$

La distribution GEV a été choisie comme étant la loi qui modélise les maximums des séquences i.i.d., et est définie sur son support D comme suit :

$$f_{\text{GEV}}(r; \mu, \sigma, k) = \frac{1}{\sigma} t(r)^{k+1} e^{-t(r)} \quad (10)$$

$$\text{avec } t(r) = \begin{cases} (1 + k \frac{r-\mu}{\sigma})^{-1/k} & \text{if } k \neq 0 \\ e^{-(x-\mu)/\sigma} & \text{if } k = 0 \end{cases}$$

Ces paramètres sont évalués pour différentes valeurs de λ , en utilisant la méthode d'estimation par moments pondérés (*probability weighted moment* (PWM)) [7] [8]. Les paramètres obtenus sont regroupés dans la table 1.

3.4 Modèle de la distribution $f_{s1}(r)$

À partir de la distribution de la Fig. 3, on peut comprendre que pour une valeur particulière de $A_{max} = \|s\|_{\infty}$ l'amplitude des échantillons dans un seul symbole suit une loi de Rayleigh tronquée à A_{max} . Il est donc convenable d'introduire la distribution suivante :

$$f_{s1}(r|A_{max}) = f_{\text{Ray}}(r; \sigma_r)(1 - u(r - A_{max})) \quad (11)$$

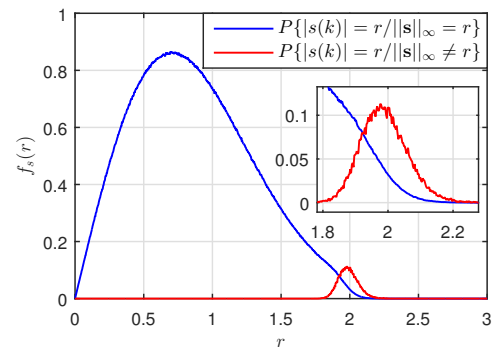


FIGURE 4: Distributions empiriques de $f_{s1}(r)$ et $f_{s2}(r)$ séparées, avec application de l'algorithme TR-QCQP sans contrainte de puissance

λ	p	σ_{r1}	μ_1	σ_1	k_1	μ_2	σ_2	k_2
5 dB	0.0059	0.7087	2.2467	0.1193	-0.0308	2.2113	0.1054	-0.0718
10 dB	0.0113	0.7108	2.1028	0.0881	-0.0789	2.0865	0.0816	-0.1091
no limit	0.0188	0.7178	1.9695	0.0666	-0.1825	1.9634	0.0664	-0.1836

TABLE 1: Paramètres du modèle de la distribution $f_s(r)$, normalisés par rapport à P_s

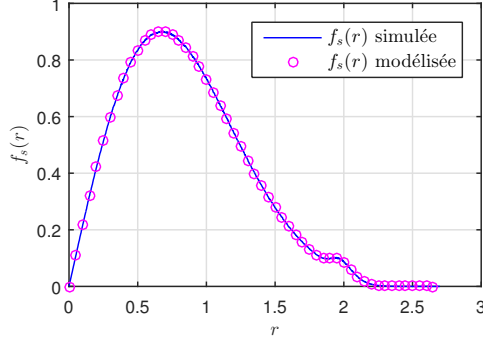


FIGURE 5: $f_s(r)$ simulée et selon le modèle proposé pour $\lambda = 10$ dB

où $f_{\text{Ray}}(r; \sigma_r)$ est la loi de Rayleigh de paramètre σ_r et $u(r)$ est la fonction échelon unité. À noter que la distribution de Rayleigh est tronquée pour chaque symbole à une valeur de A_{max} éventuellement différente. Donc la loi marginale obtenue est :

$$f_{s1}(r) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{s1}(r|A_{\text{max}}) f_{A_{\text{max}}}(A) dA \quad (12)$$

$f_{A_{\text{max}}}(A)$ est la densité de probabilité que suit l'amplitude maximale de chaque symbole :

$$f_{A_{\text{max}}}(A) = P\{\|s\|_{\infty} = A\}. \quad (13)$$

Donc, l'intégration de (11) dans (12) donne :

$$f_{s1}(r) = f_{\text{Ray}}(r; \sigma_{r1}) \times \left(1 - \int_{-\infty}^{\infty} u(r-A) f_{A_{\text{max}}}(A) dA \right) \quad (14)$$

Cette dernière intégrale peut être simplifiée par :

$$\int_{-\infty}^r f_{A_{\text{max}}}(A) dA \quad (15)$$

qui correspond à la fonction de répartition de la variable aléatoire A_{max} qu'on propose de modéliser par une deuxième GEV : $F_{A_{\text{max}}}(r) = F_{\text{GEV}}(r; \mu_1, \sigma_1, k_1)$. On obtient donc finalement :

$$f_{s1}(r) = q f_{\text{Ray}}(r; \sigma_{r1}) (1 - F_{\text{GEV}}(r; \mu_1, \sigma_1, k_1)) \quad (16)$$

avec q le facteur de normalisation qui assure que $\int f_{s1}(r) dr = 1$. Les paramètres de cette fonction $f_{s1}(r)$, soient μ_1, σ_1, k_1 ainsi que le paramètre σ_{r1} sont évalués pour différentes valeurs de λ dans la table 1.

3.5 Validation du modèle

La Fig. 5 montre la distribution $f_s(r)$ simulée en comparaison au modèle proposé pour $\lambda = 10$ dB. Cette figure permet de valider le modèle de $f_s(r)$. Les valeurs des paramètres de $f_s(r)$ dans la table 1 peuvent être considérés comme référence du modèle statistique global.

4 Conclusion

Dans ce papier, une étude rigoureuse de la distribution de l'amplitude du signal OFDM a été menée en considérant la réduction de PAPR de type TR-QCQP. Un modèle statistique de ce signal a été proposé faisant intervenir une distribution de Rayleigh et une distribution GEV. On a montré que le modèle proposé suit strictement la forme de la statistique du signal présentée par simulations. Ce résultat est d'une grande importance car il représente la première étape au calcul analytique de l'EVM des signaux OFDM sous l'effet de la réduction de PAPR, résultat aujourd'hui absent de la littérature.

Références

- [1] R. Yoshizawa and H. Ochiai, "Effect of Clipping and Filtering with Distortionless PAPR Reduction for OFDM Systems", in 2015 IEEE 82nd Vehicular Technology Conference (VTC2015-Fall), 2015, pp. 1-5.
- [2] J. Tellado and J. M. Cioffi, "Peak power reduction for multicarrier transmission", in IEEE GLOBECOM, vol. 99, pp. 5-9, 1998.
- [3] ETSI. Frame structure channel coding and modulation for DVB-T2. EN 302 55 v1.4.1, European Telecommunications Standards Institute (ETSI), 2015.
- [4] 'Advanced Television Systems Committee, ATSC Proposed Standard : Physical Layer Protocol', 2016
- [5] A. Cheaito, M. Crussière, J. F. Héland, and Y. Louet, "Quantifying the Memory Effects of Power Amplifiers : EVM Closed-Form Derivations of Multicarrier Signals", IEEE Wire. Commun. Letters, vol. 6, no. 1, pp. 34-37, Feb. 2017.
- [6] J. Kim and K. Konstantinou, "Digital predistortion of wideband signals based on power amplifier model with memory", Electronics Letters, vol. 37, no. 23, pp. 1417-1418, Nov. 2001.
- [7] J. R. M. Hosking, J. R. Wallis, and E. F. Wood, "Estimation of the Generalized Extreme-Value Distribution by the Method of Probability-Weighted Moments", Technometrics, vol. 27, no. 3, p. 251, Aug. 1985.
- [8] P. Ribereau, E. Masiello, and P. Naveau, "Skew generalized extreme value distribution : Probability-weighted moments estimation and application to block maxima procedure", Communications in Statistics - Theory and Methods, vol. 45, no. 17, pp. 5037-5052, Sep. 2016.