

Déshabiller Adam et Ève avec le modèle linéaire d’osmose

Marie D’AUTUME, Enric MEINHARDT-LLOPIS

CMLA, ENS Cachan, CNRS, Université Paris-Saclay,
61, avenue du Président Wilson, 94235 Cachan, France

marie.de-masson-d-autume@ens-cachan.fr, enric.meinhardt@cmla.ens-cachan.fr

Résumé – Le modèle linéaire d’osmose, une alternative au *Poisson editing* permet de reconstruire une image composite à partir d’un vecteur de tendance, ou *drift-field*, invariant aux changements de contraste multiplicatif et extrait d’une ou plusieurs images d’entrées. Ce modèle est particulièrement bien adaptés aux problèmes où les images d’entrées ont des contrastes très différents comme c’est souvent le cas avec les images multi-spectrales. Nous montrons ici qu’une formulation elliptique locale du problème avec des conditions aux bords mixtes est particulièrement appropriée pour la restauration digitale d’enluminures censurées pour lesquelles on dispose d’une image infrarouge révélant l’information sous-jacente.

Abstract – The linear osmosis model, an alternative to *Poisson editing*, reconstructs a composite image from an input generally given by the drift fields, invariant to contrast changes, extracted from one or several images. It is well adapted to tasks where the input images contrast vary wildly, as is often the case for multi-spectral images. We show that its stationary local elliptic formulation with mixed boundary conditions is particularly appropriate for the task of digitally removing over-paint in illuminations for which we dispose of underlying information provided by infrared imaging.



Fig. 1: de gauche à droite : une page de l’abécédaire de Claude de France en couleur et en infrarouge, et le résultat pour cette page de la méthode décrite dans cet article. Les deux détails du bas sont présentés dans la suite de l’article.

1 Introduction

Les enluminures des manuscrits médiévaux forment le corpus le plus large et le mieux préservé concernant l’art pictural européen du VI^{ème} au XVI^{ème} siècle. Néanmoins toutes les enluminures n’ont pu échapper aux dégradations. Certaines sont déchirées ou abimées par des inondations, d’autres ont été censurées, d’autres encore ont été grattées pour en extraire les pigments rares et précieux en vue d’une réutilisation, l’or en particulier.

De nos jours les enluminures ne sont pas restaurées physiquement : à cause de leur finesse, il serait impossible de supprimer des couches superficielles de pigments sans causer d’irréparables dommages aux couches

inférieures. À cause de cela, seule est possible une restauration virtuelle de l’oeuvre, une représentation aussi proche que possible de l’état originel de la peinture. Par chance, dans le cas d’une censure, l’imagerie infrarouge peut permettre de récupérer l’information sous-jacente, recouverte mais non détruite contrairement au cas où des pigments ont été grattés [3].

Cet article présente une méthode numérique semi automatique de suppression de la censure à partir d’une photo couleur et d’une photo infrarouge de l’enluminure. Pour cela est utilisée une équation à dérivée partielle elliptique correspondant à l’état stable de l’équation introduite dans le cadre du traitement d’image par Weickert et al. [10] sous le nom d’équation d’osmose :

$$\Delta u = \text{div}(\mathbf{d}u), \quad (1)$$

où u est l’inconnue et \mathbf{d} le champ de vecteur guidant la diffusion. Cette équation est formellement similaire à celle de Poisson et peut être utilisé dans le même cadre que le *Poisson editing* de Pérez et al. [8]. La différence principale entre les deux procédés est qu’au lieu de modifier les gradients d’images, on modifie leur *drift fields*, champs de vecteurs de tendance. On définit le drift-field canonique d’une image v par $\mathbf{d}_v = \nabla v/v$. Contrairement au gradient, invariant à l’addition d’une constante à v , le *drift-field* est invariant à la multiplication par une constante. Cela permet en particulier des applications au problème de suppression d’ombres ou au *seamless cloning*, un copier-coller invisible, même dans le cas où les deux images ont des contrastes très différents.

La majorité des méthodes de seamless cloning modifient soit toute l'image et imposent des conditions aux bords de Neumann soit seulement la partie où a lieu le clonage et dans ce cas utilisent des conditions de Dirichlet. La spécificité de notre méthode consiste à travailler localement avec des conditions mixtes, Dirichlet par endroits et Neumann à d'autres.

La deuxième section décrit plus en détail le problème elliptique continu et sa discrétisation avec une formulation issue de la théorie des graphes. Puis la troisième section explique comment ce modèle linéaire peut être appliqué au cas particulier de la restauration virtuelle d'une enluminure dans le cas d'une censure.

2 Résultats théoriques

2.1 Modèle continu

Soit U , un ensemble ouvert borné de \mathbb{R}^2 . Soit Γ_0 et Γ_1 tels que $\Gamma_0 \subset \partial U$ et $\Gamma_1 = \partial U \setminus \overline{\Gamma_0}$. Le problème elliptique de conditions aux bords est le suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = \operatorname{div}(\mathbf{d}u) & \text{dans } U \\ u = f & \text{dans } \Gamma_0 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{dans } \Gamma_1 \end{cases} \quad (2)$$

où ν est le vecteur normal à la frontière, $u : \overline{U} \rightarrow \mathbb{R}$ est l'inconnue tandis que $f : \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{R}$ et $\mathbf{d} := (d^1, d^2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sont donnés.

Proposition 1 *Soit U tel que ∂U est C^∞ , $d^i \in C^\infty(\overline{U})$ ($i = 1, 2$) et $f \in C^\infty(\Gamma_0)$. Selon les conditions aux bords utilisées, l'unicité et la régularité des solutions de (2) diffèrent. Le problème a*

- une unique solution $u \in C^\infty(\overline{U})$ pour $\Gamma_0 = \partial U$ (condition de Dirichlet),
- une unique solution $u \in C^\infty(U \cup \overset{\circ}{\Gamma_0} \cup \overset{\circ}{\Gamma_1}) \cap C^{1/2}(\overline{U})$ pour $\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} \neq \emptyset$ (condition mixte),
- une solution unique $u \in C^\infty(\overline{U})$ à une constante multiplicative près pour $\Gamma_1 = \partial U$ (condition de Neumann).

La preuve est détaillée dans [2].

2.2 Discrétisation

Une approche naturelle pour discrétiser un tel système d'équations linéaire est d'utiliser la méthode des différences finies. Pour une image de taille $w \times h$ que l'on réassemble sous la forme d'un vecteur $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{wh}$, le problème se réécrit sous une forme matricielle

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b} \quad (3)$$

où \mathbf{A} est une matrice creuse pentadiagonale non symétrique et $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{wh}$ est un vecteur encodant les conditions de Dirichlet. En imposant des conditions aux

bords de Neumann uniquement aux bords de l'image rectangulaire, la matrice \mathbf{A} peut être exprimée relativement facilement [1, 10, 9] bien qu'assez lourdement. Dans le cas d'une résolution sur toute l'image avec des conditions aux bords de Neumann cela donne

$$\begin{cases} a_{k,k} &= -2 - \mathbb{1}_{0 < i < h-1} - \mathbb{1}_{0 < j < w-1} \\ &+ \frac{1}{2} \left(d_{1,i-\frac{1}{2},j} - d_{1,i+\frac{1}{2},j} + d_{2,i,j-\frac{1}{2}} - d_{2,i,j+\frac{1}{2}} \right) \\ a_{k,k-1} &= 1 + \frac{d_{1,i-\frac{1}{2},j}}{2} \quad \text{if } k \not\equiv 0 \pmod{h} \\ a_{k,k+1} &= 1 - \frac{d_{1,i+\frac{1}{2},j}}{2} \quad \text{if } k \not\equiv h-1 \pmod{h} \\ a_{k,k-h} &= 1 + \frac{d_{2,i,j-\frac{1}{2}}}{2} \quad \text{if } k \geq h \\ a_{k,k+h} &= 1 - \frac{d_{2,i,j+\frac{1}{2}}}{2} \quad \text{if } k < (w-1)h. \end{cases} \quad (4)$$

En revanche si une plus grande flexibilité est requise quant à la région d'intérêt et aux conditions aux bords, la construction de \mathbf{A} devient plus complexe. Dans un tel cas une reformulation du problème à l'aide de la théorie des graphes [6] facilite considérablement l'expression de \mathbf{A} .

Les pixels de l'image forment les sommets du graphe et chaque pixel est relié par une arête à ses 4 voisins (3 aux bords et 2 pour les coins). Les conditions de Dirichlet peuvent être considérés comme une surface d'échange où les pixels à l'intérieur de U extraient des informations auprès des pixels de l'extérieur qui leur sont liés. Au contraire la condition de Neumann peut se voir comme une absence totale de communication à la frontière de U . Pour un graphe, cela se traduit très simplement par la suppression des arêtes traversant le bord du domaine.

En notant B la matrice d'incidence orientée du graphe et $C = |B|/2$ la matrice de centrage, la matrice \mathbf{A} s'exprime par

$$\mathbf{A} = -B^T(B - DC) \quad (5)$$

où $D := \operatorname{diag}(\mathbf{d})$. Le vecteur $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{na}$ est le vecteur de tendance de longueur le nombre d'arêtes.

Le *drift-field* canonique d'une image strictement positive \mathbf{u} est défini sur les arêtes du graphe par $\mathbf{d}_u = \mathbf{B}u \oslash \mathbf{C}u$ où \oslash représente la division d'Hadamard. Le vecteur de tendance, véritable guide de la reconstruction, est en général issu de modifications des *drift-fields* canoniques des images d'entrées. Sa construction exacte dépend de l'application visée.

Proposition 2 *Si $\max_{i=1,\dots,na} |d_i| < 2$ et pour des conditions mixtes ou de Dirichlet alors \mathbf{A} est inversible. Pour des conditions aux bords de Neumann, la matrice \mathbf{A} est de rang $wh - 1$.*

La preuve est détaillée dans [2].

3 Application aux enluminures

Les images d'entrée des expériences présentées ici sont extraites de l'abécédaire de Claude de France. Adam et Ève y ont été peints nus pour les scènes de la genèse mais ont

été rhabillés ultérieurement. Les photos couleurs et infrarouge des enluminures peuvent être récupérées sur le site du musée Fitzwilliam de Cambridge [5].

Pour ces enluminures censurées la région d'intérêt correspond aux zones de la peinture qui ont été recouvertes. Mais si l'imagerie infrarouge permet de voir à travers les couches de peintures, la photo obtenue dépend fortement de la longueur d'onde choisie et des pigments présents. Dans un cas idéal, il serait possible de choisir la longueur d'onde en fonction des pigments originaux et des pigments ajoutés. C'est malheureusement rarement le cas.

Plusieurs cas de figures peuvent avoir lieu. En théorie les pigments ajoutés pourraient être tous invisibles sur l'infrarouge et les pigments originaux tous visibles. Cela n'arrive jamais. Il est possible de répartir les différentes situations en 3 catégories principales. Les pigments sur-numéraires sont invisibles sur l'infrarouge ainsi que certains pigments originaux. Autre possibilité, l'ajout de peinture se voit sur l'infrarouge mais le dessin sous-jacent apparaît en transparence. Enfin lorsque la couche ajoutée apparaît comme opaque ou contient trop de texture sur l'infrarouge, le problème devient beaucoup moins favorable et il faut faire appel à d'autres solutions.

3.1 Surcouche invisible sur l'infrarouge

Le cas où la couche ajoutée est invisible sur l'infrarouge est le plus simple à résoudre, illustré par la figure 2. Ici les feuillages verts qui ont été ajoutés disparaissent complètement sur l'infrarouge et l'esquisse sous-jacente se voit clairement. Il est possible de procéder comme pour du *seamless cloning*. Le *drift-field* canonique de l'image infrarouge est pris comme vecteur de tendance. Aux bords de la région d'intérêt, grise sur le masque, sont imposées des conditions de Dirichlet pour récupérer les couleurs de l'enluminure. Le résultat d'un tel procédé est présenté en bas à gauche de la figure 2. Il y a cependant comme un effet de bavure.

Parce que le fait que des pigments originaux sont également invisible sur l'infrarouge n'a pas été pris en compte. Cela se voit en particulier sur les arbres en haut de l'image. Les cache-sexes révélés par l'infrarouge semblent de la même couleur que la peau d'Adam. Une observation minutieuse de la photo couleur permet cependant de distinguer qu'ils ont été peints en vert. Pour empêcher la diffusion du vert sur la peau des personnages, des conditions de Neumann, en rouge sur le masque, sont imposées aux bords des cache-sexes. Cela permet un résultat beaucoup plus net, en bas à droite de la figure 2.

3.2 Surcouche transparente sur l'infrarouge

Ce cas un plus complexe est représenté sur la figure 3. La peau de bête d'Adam apparaît un peu comme une om-



Fig. 2: En haut : couleur et infrarouge du détail et masque (gris : région d'intérêt, conditions de Dirichlet par défaut, rouge : conditions de Neumann,). En bas : résultat avec condition de Dirichlet pure et résultat avec conditions mixtes.

bre sur l'infrarouge, ce qui peut se modéliser en première approximation comme un changement de contraste multiplicatif. Or le *drift-field* d'une image est invariant à une telle opération. Seule la frontière de l'ombre y est donc encodée. Si l'on procède comme pour le cas précédent avec des conditions mixtes mais sans modifier le *drift-field*, cette ombre apparaît sur le résultat, en bas à gauche sur la figure 3.

Pour se débarrasser de cette ombre il suffit de mettre à zéro le vecteur de tendance sur le bord de la peau de bête, en blanc sur le masque, figure 3. Cela donne lieu à un phénomène de diffusion pure au niveau de cette bande qui se traduit par une perte totale de texture à cet endroit sur l'image de sortie. Le voile d'Ève se voit comme une zone claire plutôt que comme une ombre mais le principe est le même.

Ce détail correspond cependant à un cas limite. Une partie de la texture de la peau de bête, sur la hanche d'Adam, apparaît sur l'infrarouge et se retrouve donc dans le résultat tandis que le voile d'Ève est par endroit trop opaque sur l'infrarouge pour être totalement supprimé. Le rendu final est néanmoins satisfaisant.

3.3 Limites et solutions proposées

À première vue les résultats obtenus sont assez satisfaisants et permettent de se représenter plus facilement l'état premier de l'enluminure. Une examination plus détaillée dégage des défauts et des limites.

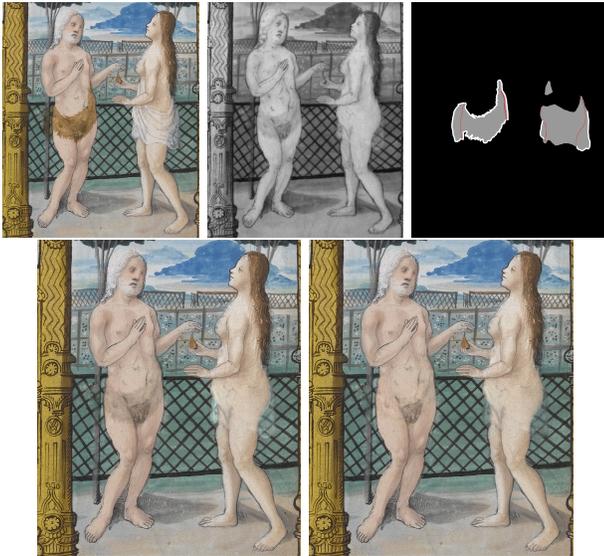


Fig. 3: En haut : couleur et infrarouge du détail et masque (gris : région d'intérêt, conditions de Dirichlet par défaut, rouge : conditions de Neumann, blanc : vecteur de tendance à zéro). En bas : résultat avec condition mixtes et résultat avec conditions mixtes avec vecteur de tendance à zéro dans la zone en blanc.

Les bandes où le vecteur de tendance est mis à zéro sont floues. Une solution est de ne l'annuler que dans la direction orthogonale au bord de l'ombre. Cela a déjà été mis en oeuvre dans l'article de Parisotto et al. [7] pour le modèle parabolique. S'il est aisé de reproduire la même idée pour le modèle elliptique, aucune expérience n'a encore été réalisée.

Lorsque la couche surimposée est opaque ou très texturée sur l'infrarouge, différentes pistes sont ouvertes. Avec les mêmes images d'entrée, il est possible d'ajouter une étape d'*inpainting* à base de patches [4] sur les zones concernées. Une telle méthode a déjà été mise en oeuvre dans [3]. Une meilleure solution serait de travailler avec des spécialistes des enluminures et de choisir la longueur d'onde pour l'imagerie infrarouge en fonction des pigments mis en jeu et éventuellement utiliser différentes images infrarouges pour traiter séparément les différentes zones censurées.

Sur la figure 3 les traits apparaissent plus épais dans les zones reconstruites. Cela est dû à la moindre résolution de l'infrarouge par rapport à la photo couleur. Le plus simple est d'attendre une amélioration des appareils de réflectographie infrarouge.

L'infrarouge fait aussi apparaître l'esquisse de l'enlumineur, atténuée normalement par de la peinture, qui réapparaît avec la méthode proposée. C'est le cas en particulier sur la hanche d'Ève dans la figure 2.

La méthode n'est que semi-automatique. Le masque encodant la région d'intérêt, les conditions aux bords et les bandes où annuler le vecteur de tendance doit être réalisé

entièrement par l'utilisateur. Or la qualité du résultat dépend très fortement de la qualité du masque. Cela impose de retravailler parfois plusieurs fois celui-ci en fonction des résultats avant qu'il ne soit suffisamment précis.

Enfin cette méthode ne peut s'appliquer que lorsque la zone région d'intérêt n'est pas trop large. Il faut en effet avoir la couleur d'au moins quelques pixels justes pour chaque élément de l'enluminure. C'est heureusement souvent le cas pour les images censurées pour raison de pudeur comme ici.

References

- [1] M. d'Autume, J.-M. Morel and E. Meinhardt-Llopis, "A flexible solution to the osmosis equation for seamless cloning and shadow removal", ICIP, 2018.
- [2] M. d'Autume "Manuscrit de thèse (en préparation)" 2019
- [3] L. Calatroni, M. d'Autume, R. Hocking, S. Panayotova, S. Parisotto, P. Ricciardi and C.-B. Schönlieb, "Unveiling the invisible: mathematical methods for restoring and interpreting illuminated manuscripts" Heritage Science, 2018
- [4] V. Fedorov, G. Facciolo and P. Arias "Variational framework for non-local inpainting" IPOL, 2015
- [5] Fitzwilliam Museum, Cambridge "ILLUMINATED: Manuscripts in the making" <https://www.fitzmuseum.cam.ac.uk/illuminated/>
- [6] O. Lézoray et L. Grady "Image processing and analysis with 445 graphs: theory and practice" CRC Press, 2012
- [7] S. Parisotto, L. Calatroni, M. Caliari, C.-B. Schönlieb and J. Weickert "Anisotropic osmosis filtering for shadow removal in images" IOP, 2019
- [8] P. Pérez and M. Gangnet and A. Blake, "Poisson image editing" ACM TOG, 2003.
- [9] O. Vogel, K. Hagenburg, J. Weickert et S. Setzer "A fully discrete theory for linear osmosis filtering", ICSSVMCV, 2013.
- [10] J. Weickert, K. Hagenburg, M. Breuß and O. Vogel, "Linear osmosis models for visual computing", EMMCVPR, 2013.