

Analyse de la vulnérabilité d'un réseau via la mesure de l'entropie de Von Neumann.

Hadj-Ahmed BAY-AHMED, Delphine DARÉ-EMZIVAT, Abdel BOUDRAA

IRENav, Ecole Navale - Arts-Métiers ParisTech
CC 600, 29240 Brest Cedex 09, France

hadj_ahmed.bay_ahmed@ecole-navale.fr, delphine.dare@ecole-navale.fr
abdel.boudraa@ecole-navale.fr

Résumé – Dans ce travail, nous présentons une nouvelle stratégie de mesure de la vulnérabilité des connexions d'un réseau modélisé par un graphe via les variations de l'entropie de Von Neumann de la matrice de densité associée à ce graphe, celui-ci étant vu comme un système quantique. Nous montrons que la perturbation du poids d'une arête agit sur l'entropie de Von Neumann résultante, la variation incluant certes l'intensité de la perturbation induite mais également une quantité liée aux degrés des nœuds adjacents à l'arête perturbée. Un algorithme reposant sur cette stratégie a été développé. Les premiers résultats sont prometteurs et ont confirmé la pertinence de cette nouvelle mesure. Notre algorithme met en évidence les discontinuités qui pourraient apparaître dans la structure en proposant une décomposition hiérarchique en sous-graphes relativement aux degrés de vulnérabilité des arêtes. La carte établie garantit une meilleure sécurité du réseau.

Abstract – In this work, we present a new strategy for measuring the vulnerability of network connections, modeled by a graph, via the variations of the Von Neumann entropy of the density matrix associated to this graph, this one being seen as a quantum system. We show that the change of the weight of an edge impacts the resulting Von Neumann entropy, which includes not only the intensity of the perturbation induced but also a quantity related to the degrees of the nodes adjacent to the perturbed edge. An algorithm based on this strategy has been developed. The obtained results confirm the relevance of this new measure. Our algorithm highlights the discontinuities that could appear in the structure by proposing a hierarchical decomposition into subgraphs relative to the degrees of vulnerability of the edges. The obtained map guarantees a better network security

1 Introduction

Les réseaux constituent des infrastructures qui interagissent de manière collaborative et coordonnée entre elles afin de fournir des services essentiels et faciliter l'interaction humaine [1] [2]. Les dépendances des populations vis-à-vis des systèmes d'alimentation électrique, des systèmes d'approvisionnement en eau et en gaz, des systèmes de transport augmente notre vulnérabilité face à des risques de coupure de ces réseaux. L'omniprésence de ces réseaux conduit à des questions portant sur la sécurité, tout dysfonctionnement de ces réseaux pouvant entraîner un blocage total de l'économie du pays. La question concernant la vulnérabilité et la protection des infrastructures bénéficie de l'attention de la communauté scientifique. L'analyse structurelle constitue un moyen pertinent d'appréhender ces problèmes de vulnérabilité. Ainsi le système peut être représenté sous la forme d'un graphe dans lequel les nœuds sont les principaux composants du réseau, les arêtes correspondant aux connexions physiques entre eux. Nous disposons alors de l'architecture du réseau définissant les liaisons existantes entre les différents composants du réseau et la hiérarchie éventuelle entre eux [3]. Le recours à la théorie des graphes permet non seulement cette modélisation du système mais aussi une analyse du système en se basant sur un ensemble de mesures. Différentes stratégies [4] [5] [6] ont été élaborées dans le but de

proposer une mesure de la vulnérabilité du graphe. Une métrique simple pour juger de la vulnérabilité globale du graphe est celle basée sur la plus grande valeur propre de la matrice d'adjacence associée au graphe [6]. Plus cette valeur propre est grande, plus le graphe est dit vulnérable. Cependant, cette mesure globale ne peut pas être utilisée pour identifier ou localiser un nœud ou une arête vulnérable en particulier. Nous proposons une nouvelle stratégie de mesure de la vulnérabilité des connexions d'un réseau modélisé par un graphe via les variations de l'entropie de Von Neumann (VN) de la matrice de densité associée à ce graphe. Nous montrons que la variation de l'entropie après perturbation du poids d'une arête dépend de l'intensité de cette perturbation mais aussi d'une quantité liée aux degrés des nœuds avoisinants. Dans une première partie, nous décrivons la théorie de la perturbation de la matrice d'adjacence en débutant par un rappel général sur le principe de perturbation des éléments d'une matrice et en précisant ensuite l'impact de ces perturbations sur les valeurs propres associées à cette matrice avant de mettre en avant la conséquence introduite sur le contenu en information de la structure via une mesure de l'entropie de VN. Une métrique quantifiant la vulnérabilité de chaque arête est proposée aboutissant à l'établissement d'une carte de vulnérabilité basée sur la pondération VPV (Von Neumann Perturbation Vulnerability).

2 Matrice d'adjacence perturbée

Nous rappelons tout d'abord le principe de perturbation des éléments d'une matrice et précisons leur impact sur les valeurs propres associées puis nous formulons la conséquence induite sur le contenu en information de la structure mesurée par l'entropie de VN. Les perturbations introduites concernent les arêtes du graphe considéré.

2.1 Sensibilité des valeurs propres aux perturbations matricielles

Considérons une matrice carrée symétrique $\mathbf{B} \in \mathbb{M}_n$ associée à un graphe ou à un système physique dont les valeurs propres distinctes λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) sont disposées dans un vecteur colonne. Il est intéressant de voir comment une valeur propre λ_i est sensible à la modification d'un élément seul b_{kl} de \mathbf{B} [7]. Compte tenu des relations entre valeurs/vecteurs propres, l'équation liant la valeur propre à droite λ_i à son vecteur propre droit \mathbf{u}_i de \mathbf{B} donne :

$$\mathbf{B}\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i. \quad (1)$$

De manière similaire, les valeurs propres à gauche λ'_j de \mathbf{B} sont rattachées à leurs vecteurs propres à gauche \mathbf{w}_j de \mathbf{B} (ou aux vecteurs propres à droite de \mathbf{B}^T) par l'équation :

$$\mathbf{B}^T \mathbf{w}_j = \lambda'_j \mathbf{w}_j. \quad (2)$$

Les vecteurs propres \mathbf{u}_i et \mathbf{w}_j sont orthogonaux et conduisent à l'expression :

$$\mathbf{w}_j^T \mathbf{u}_i = \delta_{ij}, \quad (3)$$

où δ_{ij} est la distribution de Kronecker. En dérivant les deux membres de l'équation (1) par rapport à la variable b_{kl} , nous avons :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial b_{kl}} \mathbf{u}_i + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial b_{kl}} = \frac{\partial \lambda_i}{\partial b_{kl}} \mathbf{u}_i + \lambda_i \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial b_{kl}} \quad (4)$$

Après multiplication de l'équation (4) par \mathbf{w}_i^T et en utilisant l'équation (3) et la transposée de l'équation (2), nous aboutissons à :

$$\mathbf{w}_i^T \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial b_{kl}} \mathbf{u}_i + \lambda_i \mathbf{w}_i^T \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial b_{kl}} = \mathbf{w}_i^T \frac{\partial \lambda_i}{\partial b_{kl}} \mathbf{u}_i + \lambda_i \mathbf{w}_i^T \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial b_{kl}} \quad (5)$$

et après simplification, nous arrivons à :

$$\mathbf{w}_i^T \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial b_{kl}} \mathbf{u}_i = \mathbf{w}_i^T \frac{\partial \lambda_i}{\partial b_{kl}} \mathbf{u}_i \quad (6)$$

Au vu de la composition de \mathbf{B} , nous voyons que la dérivée de \mathbf{B} en fonction de b_{kl} est égal à '1' pour l'entrée correspondante b_{kl} et à '0' sinon, ce qui s'exprime par :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial b_{kl}} = [\alpha_{ij}] = [\delta_{ik} \delta_{jl}], \quad (7)$$

où $\alpha_{ij} = 1$ si la paire (i, j) vaut (k, l) , α_{ij} étant nulle sinon. En incorporant (7) dans l'équation (6) et en tenant compte de (3), nous obtenons :

$$\mathbf{w}_i^T \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial b_{kl}} \mathbf{u}_i = w_{ik} u_{il} \text{ et } \mathbf{w}_i^T \mathbf{u}_i = 1 \quad (8)$$

Ainsi l'équation (6) se réduit à :

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial b_{kl}} = w_{ik} u_{il} \text{ avec } i, k, l \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (9)$$

où w_{ik} est le $k^{\text{ième}}$ composant du vecteur propre à gauche \mathbf{w}_i et u_{il} le $l^{\text{ième}}$ composant du vecteur propre à droite \mathbf{u}_i . Si les éléments b_{kl} de \mathbf{B} se transforment en $\tilde{b}_{kl} = b_{kl} + \Delta b_{kl}$, la valeur propre λ_i se transforme, suite à notre calcul, en $\tilde{\lambda}_i$ avec :

$$\tilde{\lambda}_i = \lambda_i + \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial \lambda_i}{\partial b_{kl}} \Delta b_{kl} = \lambda_i + \sum_{k,l=1}^n w_{ik} u_{il} \Delta b_{kl} \quad (10)$$

2.2 Entropie de Von Neumann après perturbation des arêtes

Nous avons récemment montré [8] qu'un graphe peut être considéré comme un système quantique et avons étudié l'entropie de VN de la matrice densité ρ de ce système avec $\rho = \frac{\mathbf{L}}{\text{Trace}(\mathbf{L})}$. La perturbation du poids d'une arête e_{kl} d'un graphe non-orienté G (n nœuds, m arêtes) est équivalent à la perturbation de deux éléments symétriques (a_{kl} et a_{lk}) de sa matrice d'adjacence \mathbf{A} . Pour rappel, un graphe peut être représenté par sa matrice d'adjacence ($\mathbf{A} = [a_{ij}]$) de taille $(n \times n)$ où l'élément a_{ij} de la matrice est égale à '1' si le nœud v_i est connecté au nœud v_j , sinon, a_{ij} vaut zéro. De par la symétrie des relations entre les nœuds d'un graphe non orienté, la matrice d'adjacence est symétrique avec une diagonale à valeurs nulles. Une représentation alternative pour les graphes est donnée par la matrice Laplacienne $\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{A}$, avec \mathbf{D} une matrice diagonale où la $i^{\text{ième}}$ entrée de la diagonale est le nombre de connexions du nœud v_i . Afin de quantifier l'effet de ces perturbations sur l'entropie du graphe, nous introduisons une petite perturbation dans \mathbf{A} en ajoutant, par exemple, aux éléments a_{12} et a_{21} une quantité ξ .

$$\tilde{\mathbf{A}} = [\tilde{a}_{ij}] = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} + \xi & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} + \xi & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

En considérant les deux matrices perturbées que sont $\tilde{\mathbf{A}}$ et $\tilde{\mathbf{D}}$, nous obtenons pour $\tilde{\mathbf{L}}$ ($\tilde{\mathbf{L}} = \tilde{\mathbf{D}} - \tilde{\mathbf{A}}$) :

$$\tilde{\mathbf{L}} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} + \xi & -(a_{12} + \xi) & \cdots & -a_{1n} \\ -(a_{21} + \xi) & \sum_{j=1}^n a_{2j} + \xi & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & \cdots & \sum_{j=1}^n a_{nj} \end{pmatrix} \quad (12)$$

En la normalisant au moyen de $\text{Trace}(\tilde{\mathbf{L}})$, nous disposons alors de la matrice densité correspondante $\tilde{\rho} = \frac{\tilde{\mathbf{L}}}{\text{Trace}(\tilde{\mathbf{L}})}$, avec les valeurs propres $\tilde{\lambda} \in [0, 1]$, où $\sum_{i=1}^n \tilde{\lambda}_i = 1$. Selon l'équation (10), les valeurs propres associées à la matrice densité perturbée $\tilde{\rho}$ sont ainsi données par :

$$\tilde{\lambda}_i = \frac{1}{\text{Trace}(\tilde{\mathbf{L}})} \left[\lambda_i + \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial \lambda_i}{\partial L_{kl}} \Delta L_{kl} \right] \quad (13)$$

où L_{kl} et λ_i sont respectivement les éléments et les valeurs propres de la matrice Laplacienne originale \mathbf{L} . Nous pouvons

observer que dans la matrice laplacienne perturbée $\tilde{\mathbf{L}}$ (12), seuls quatre éléments sont modifiés avec $\Delta L_{11} = \Delta L_{12} = \Delta L_{21} = \Delta L_{22} = \xi$ et l'expression (13) peut ainsi se réduire à :

$$\tilde{\lambda}_i = \frac{1}{\text{Trace}(\tilde{\mathbf{L}})} \left[\lambda_i + \left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial L_{11}} + \frac{\partial \lambda_i}{\partial L_{12}} + \frac{\partial \lambda_i}{\partial L_{21}} + \frac{\partial \lambda_i}{\partial L_{22}} \right) \xi \right] \quad (14)$$

Or l'entropie de VN de la matrice densité perturbée $\tilde{\rho}$ est donnée par :

$$S(\tilde{\rho}) = - \sum_{i=1}^n \tilde{\lambda}_i \log_2 \tilde{\lambda}_i, \quad (15)$$

ainsi, en introduisant (14) dans (15), nous obtenons :

$$S(\tilde{\rho}) = - \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i + (w_{i1}u_{i2} + w_{i2}u_{i1} + w_{i1}u_{i1} + w_{i2}u_{i2})\xi}{\text{Trace}(\mathbf{L}) + 2\xi} \times \log_2 \left[\frac{\lambda_i + (w_{i1}u_{i2} + w_{i2}u_{i1} + w_{i1}u_{i1} + w_{i2}u_{i2})\xi}{\text{Trace}(\mathbf{L}) + 2\xi} \right] \quad (16)$$

avec $\text{Trace}(\tilde{\mathbf{L}}) = \text{Trace}(\mathbf{L}) + \sum_{k=1}^n \Delta L_{kk}$; $(u_{i1}; u_{i2}; w_{i1}; w_{i2})$ étant les composantes des vecteurs propres des deux entrées impactées de (\mathbf{L}) . L'équation (16) exprime la variation de l'entropie du graphe suite à la perturbation de l'arête e_{12} au sein de la structure du graphe. Nous allons exploiter les changements de valeurs de l'entropie de VN pour mesurer l'importance des arêtes au sein de sa structure puisque pour un graphe non pondéré une telle évaluation demeure problématique. Nous avons montré que la variation de l'entropie dépend du voisinage et donc de la structure interne où se situe l'arête perturbée (quantité liée aux degrés des nœuds avoisinants (cf (12))). Afin de quantifier celle-ci face aux perturbations subies, nous allons mesurer la distorsion de l'entropie avant et après les modifications engendrées à partir de l'expression suivante :

$$\Delta_{i,j} = S(\rho) - S(\tilde{\rho}[\xi_{i,j}]), \quad (17)$$

où ρ est la matrice densité du graphe G avant perturbation et $\tilde{\rho}[\xi_{i,j}]$ est la matrice densité après perturbation des éléments d'entrée $a_{i,j}$, ($a_{i,j} \in \{0, 1\}$) de la matrice d'adjacence de G par la quantité $\xi_{i,j} \in [0, 1]$. Nous poursuivons le calcul en considérant à présent l'exponentielle de cette différence. Ainsi la variation de l'entropie relativement à l'arête $e_{i,j}$ s'exprime par :

$$\eta_{i,j} = e^{\Delta_{i,j}}. \quad (18)$$

Nous exploitons cette mesure afin de constituer une carte de vulnérabilité en associant à chaque arête perturbée une valeur de perturbation, la valeur $\eta_{i,j}$ correspondant alors au poids attribué à cette arête au sein du réseau. Nous résumons l'ensemble de la procédure de pondération par l'algorithme suivant nommé le **VPV-weighting** algorithme (Table 1). Le calcul mené est de complexité maximale $O(n^2)$. Pour des réseaux de grande taille, la perturbation pourrait être menée conjointement sur un nombre donné d'arêtes plutôt que d'envisager la perturbation individuelle successive de ces arêtes, coûteuse en temps de calcul.

TABLE 1 – Algorithme VPV-weighting.

Algorithme : Von Neumann-Perturbation-Vulnerability

Soit $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un graphe non pondéré avec \mathcal{V} et \mathcal{E} l'ensemble des nœuds et arêtes du graphe. \mathbf{A} et \mathbf{D} désignent les matrices d'adjacence et de degré. La matrice d'adjacence pondérée \mathbf{W} est obtenue à l'issue des étapes suivantes :

1. $\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{A}$
 2. $\rho = \frac{\mathbf{L}}{\text{Trace}(\mathbf{L})}$
 3. $S(\rho) = -\text{Trace}(\rho \log_2 \rho)$
 4. Choisir une valeur de perturbation $\xi \in [0, 1]$
 5. Choisir une arête à perturber : $e_{kl} = (v_k, v_l) \in \mathcal{E}$
 6. $\tilde{\mathbf{A}} = [\tilde{a}_{ij}] = \begin{cases} a_{ij} - \xi, & \text{si } i, j \in \{k, l\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
 7. $\tilde{\mathbf{L}} = \tilde{\mathbf{D}} - \tilde{\mathbf{A}}$ avec $\tilde{d}_i = \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}$
 8. $\tilde{\rho} = \frac{\tilde{\mathbf{L}}}{\text{Trace}(\tilde{\mathbf{L}})}$
 9. $S(\tilde{\rho}) = - \sum_{i=1}^n \tilde{\lambda}_i \log_2 \tilde{\lambda}_i$
 10. $\mathbf{W}_{kl} = \mathbf{W}_{lk} = e^{(S(\rho) - S(\tilde{\rho}))}$
 11. Répéter les étapes 5 à 10 pour toutes les arêtes $e_{kl} \in \mathcal{E}$.
-

3 Résultats

Un algorithme reposant sur la stratégie précédemment décrite a été développé et illustré sur deux réseaux de la littérature. Le premier résultat proposé concerne la structure TwoBalls, graphe composé de 10 nœuds et de 21 arêtes, le graphe original étant proposé à la Figure 1(a). Ce réseau est intéressant car il a la particularité d'être composé de deux régions connectées entre elles uniquement par l'arête $e_{56} = (v_5, v_6)$. Les variations des 21 arêtes suivent trois tendances correspondant aux 3 niveaux de vulnérabilité associés à ce graphe. Nous obtenons le graphe pondéré (Figure 1(b)) et les différents niveaux de vulnérabilité associés à ce graphe (Figure 2(a), 2(b), 2(c)). Dans le cas présenté, la variation de l'entropie $\eta_{i,j}$ pour une perturbation $\xi_{i,j} = 1$ correspond aux poids attribués aux arêtes de ce réseau pondéré. Comme attendu, l'observation de cette Figure 2 montre bien que l'arête $e_{56} = (v_5, v_6)$ est la plus sensible de la structure. La suppression de cette arête conduirait à la déconnection de ce réseau. Nous poursuivons nos tests en considérant à présent les données du "Karate club", un réseau social largement utilisé en théorie des graphes. Il est construit à partir des interactions existant entre les 34 membres d'un club de karaté universitaire américain conduisant à un graphe de 34 nœuds et de 78 arêtes. Le graphe non pondéré et sa version pondérée sont donnés en Figure 3. L'application de l'algorithme VPV-weighting obtenus pour une valeur de $\xi_{i,j} = 1$ conduit à quatre niveaux de vulnérabilité comme le montre la Figure 4. Nous observons pour premier niveau de vulnérabilité les arêtes $e_{1,12}$, $e_{6,17}$ et $e_{7,17}$ qui risquent d'isoler certains nœuds en cas de suppression. Nous remarquons que l'arête $e_{4,13}$ semble être plus

vulnérable que l'arête $e_{1,13}$ car le nœud v_4 est de plus petit degré au sein du réseau que le nœud v_1 . De même, nous pouvons noter que les arêtes de plus faible niveau de vulnérabilité correspondent aux deux régions les plus denses de la structure.

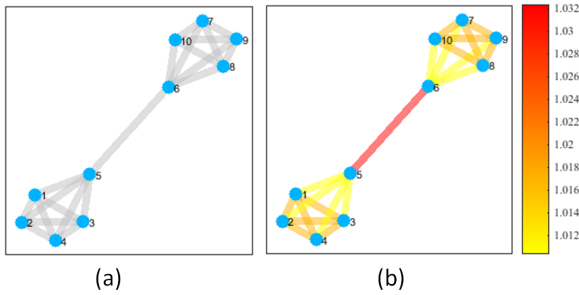


FIGURE 1 – (a) Graphe original non pondéré (b) Graphe pondéré pour une valeur de $\xi = 1$.

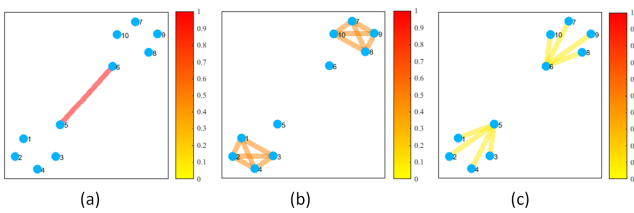


FIGURE 2 – (a) Niveau 1 de vulnérabilité (b) Niveau 2 de vulnérabilité (c) Niveau 3 de vulnérabilité.

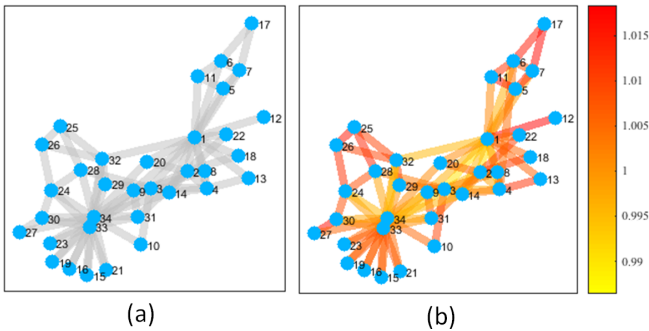


FIGURE 3 – (a) Graphe non pondéré Karate club (b) Graphe pondéré Karate Club pour une valeur de $\xi = 1$.

4 Conclusion

Dans ce travail, nous présentons une nouvelle stratégie de mesure de la vulnérabilité des connexions d'un réseau via les variations de l'entropie de VN de la matrice de densité associé au graphe qui modélise ce réseau et qui est vu comme un système quantique. Nous avons montré qu'en perturbant le poids d'une arête, l'entropie de VN résultante prend en compte l'intensité de cette perturbation mais également une quantité liée aux degrés des nœuds voisins de l'arête perturbée. Un algorithme reposant sur cette stratégie a été développé et illustré sur deux réseaux de la littérature. Les résultats obtenus ont permis d'établir une décomposition hiérarchique en sous-graphes en termes de vulnérabilité et de sensibilité aux attaques (isolement). Des tests supplémentaires sur un plus large éventail de

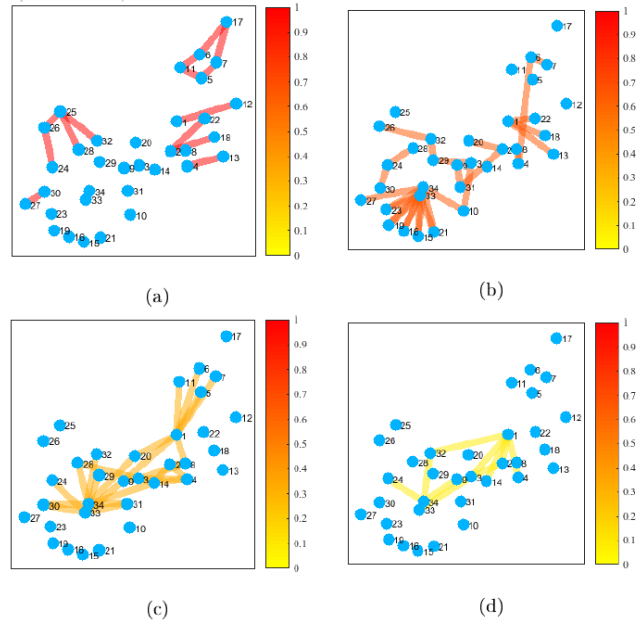


FIGURE 4 – (a) Niveau 1 de vulnérabilité pour le réseau Karate club (b) Niveau 2 de vulnérabilité (c) Niveau 3 de vulnérabilité (d) Niveau 4 de vulnérabilité.

graphes réels sont nécessaires afin de compléter ces premiers résultats déjà prometteurs. De même, nous projetons d'étendre notre approche à la vulnérabilité des nœuds.

Références

- [1] C. Nan et I. Eusgeld, "Adopting HLA standard for interdependency study", *Reliab. Eng. Syst. Safety*, vol. 96, pp. 149-159, 2011.
- [2] S. Wang, J. Zhang et N. Duan, "Multiple perspective vulnerability analysis of the power network", *Physica A*, vol. 492, pp. 1581-1890, 2018.
- [3] S. Segarra et A. Ribeiro, "Stability and continuity of centrality measures in weighted graphs", *IEEE Trans. Sig. Proc.*, vol. 64, no. 3, pp. 543-555, 2016.
- [4] J.A. Gutierrez-Perez et al, "Application of graph-spectral methods in the vulnerability assessment of water supply networks", *Mathematical and Computer Modeling*, vol. 57, pp. 1853-1859, 2013.
- [5] P.C. Crucitti, V. Latora et M. Marchiori, "Locating critical lines in high-voltage electrical power grids", *Fluctuation and Noise Letters*, vol. 5, no. 2, pp. 201-208, 2005.
- [6] C. Chen et al, "Node immunization on large graphs : Theory and algorithms", *IEEE Trans. Knowledge and Data Eng.*, vol. 28, no. 1, pp. 113-126, 2016.
- [7] T.R. Crossley et B. Porter, "Eigenvalue and eigenvector sensitivities in linear systems theory", *International Journal of Control.*, vol. 10, no. 1, pp. 163-170, 1969.
- [8] H.A. Bay-Ahmed, A.O. Boudraa et D. Dare-Emzivat, "A Joint Spectral Similarity Measure for Graphs Classification", *Pattern Recognition Letters*, vol. 120, pp. 01-07, 2019.