

Mesure indirecte des performances de LLR approché *

Yasser MESTRAH^{1,2}, Anne SAVARD¹, Alban GOUPIL², Guillaume GELLE², Laurent CLAVIER¹

¹IMT Lille Douai, Univ. Lille, CNRS, UMR 8520 - IEMN, F-59000 Lille, France

²CRéSTIC, University of Reims Champagne-Ardenne, France
prenom.nom@imt-lille-douai.fr, prenom.nom@univ-reims.fr

Résumé – Les réseaux sans fils sont de plus en plus denses et hétérogènes, entraînant l’accroissement très significatif de l’impact des interférences. De nombreux travaux ont montré la nature impulsive de cette interférence et la nécessité de modifier le calcul de la vraisemblance nécessaire au décodage. Une solution est de proposer une approximation de la fonction du logarithme du rapport de vraisemblance. Cette approche permet des performances proches de la vraie vraisemblance mais avec une complexité de mise en œuvre extrêmement réduite et une adaptabilité plus aisée. Nous proposons d’évaluer la qualité des approximations par une erreur quadratique moyenne et montrons que ce critère suffit à identifier les approximations qui seront performantes.

Abstract – Wireless networks are becoming more dense and heterogeneous. One of the consequences is the very significant increase in the impact of interference. Many studies have shown the impulsive nature of this interference and the need to modify the calculation of the likelihood necessary for decoding. One solution is to propose an approximation of the log likelihood function. This approach allows performance close to the true likelihood but with extremely reduced implementation complexity and easier adaptability. We propose to evaluate the quality of the approximation by a mean squared error and ascertain that this criterion is sufficient to identify the approximations that will be efficient.

1 Introduction

Avec la densification des réseaux sans fil, l’interférence devient la principale limitation des performances des réseaux. Si le bruit thermique est bien modélisé par une distribution gaussienne, de nombreux travaux ont montré que l’interférence présente, dans de nombreuses situations, un comportement impulsif [1, 2]. Ce caractère se retrouve dans les travaux de Middleton [3] et plus récemment dans les résultats de la géométrie stochastique et les distributions α -stables [2].

Ces travaux aboutissent à des modèles d’interférences difficilement maniabiles au niveau des récepteurs. Ainsi les densités de probabilité (pdf) obtenues s’expriment soit sous forme de séries infinies, à l’instar des travaux de Middleton, ou n’ont pas de forme analytique simple, comme c’est le cas pour les distributions α -stables. En conséquence, le calcul des vraisemblances des observations à la réception est rendu complexe. Pour y répondre, plusieurs approches ont été proposées utilisant notamment des métriques simples type norme p [4], de Hubber [5] ou encore [6]. Bien qu’améliorant les performances, ces approches restent coûteuses à mettre en œuvre. Une seconde famille de travaux s’attelle plutôt à approcher directement le logarithme de rapport de vraisemblance (LLR)

avant de fournir le résultat au décodeur de canal. Parmi cette famille se trouvent le “clipping demapper” ou “soft limiter” [7], le “hole puncher” ou les fonctions affines par morceaux [8] et plus récemment [9, 10].

Nous nous focalisons dans ce papier vers cette seconde famille car trouver une bonne approximation du LLR dans un espace de fonctions définies par quelques paramètres permet de limiter la complexité tout en offrant une capacité d’adaptation suffisante pour faire face à différentes conditions de bruit ou d’interférence. Nous avons proposé dans [11] deux méthodes simples et robustes pour apprendre les paramètres d’un LLR approché, l’une supervisée, c’est-à-dire utilisant une séquence d’apprentissage et la seconde non-supervisée qui repose uniquement sur la sortie du canal. Toutefois l’analyse des approximations obtenues requiert l’usage massif de simulations numériques afin d’obtenir des courbes de taux d’erreur pour plusieurs types d’interférences notamment selon leur degré d’impulsivité. C’est pourquoi nous proposons et analysons ici une méthode indirecte de mesure de la performances des approximations de LLR axée sur l’erreur quadratique moyenne qui allège considérablement les temps de calcul.

Les détails de notre proposition seront présentés à la section 3 qui suit l’introduction du modèle du système considéré et l’apprentissage supervisé du récepteur. La section 4 teste et analyse cette mesure par des simulations utilisant des codes LDPC réguliers.

*Travail soutenu par l’IRCICA, USR CNRS 3380 et par l’action COST CA15104, IRACON; en partie financé par l’Agence Nationale de la Recherche, subvention ANR-16-CE25-0001 - ARBURST.

2 Modèle du système

2.1 Canal et récepteurs

Le canal est supposé binaire symétrique et sans mémoire. Sa sortie $Y = X + Z$ s'exprime comme la somme de l'entrée X valant $+1$ ou -1 et d'un bruit Z . Par symétrie, l'entrée du canal vérifie $\Pr[X = +1] = \Pr[X = -1] = 1/2$. Par la suite, à titre d'exemple, le bruit Z suivra une distribution α -stable centrée et symétrique de paramètre α qui indique l'impulsivité et de facteur d'échelle γ . La densité n'est pas directement accessible mais sa fonction caractéristique est $\phi_{\alpha,\gamma}(t) = \exp(-|\gamma t|^\alpha)$. Grâce à la queue lourde des lois α -stables, ce type de bruit modélise bien les interférences dans un réseau [2]. Enfin le cas $\alpha = 2$ correspond au canal à bruit additif blanc et gaussien.

Comme le logarithme du rapport de vraisemblance est une statistique suffisante par rapport à X , le récepteur commence par le calculer pour mesurer la qualité de chaque bit reçu. Dans le cadre d'un canal à bruit additif, ce LLR s'écrit

$$\Lambda(y) = \log \frac{\Pr[Y = y | X = +1]}{\Pr[Y = y | X = -1]} = \log \frac{f(y-1)}{f(y+1)}, \quad (1)$$

où f dénote la densité de probabilité du bruit Z . Le processus de décodage du code correcteur d'erreur peut ensuite se poursuivre à partir des LLR.

Malheureusement, l'évaluation de (1) se révèle parfois difficile. Par exemple, si le bruit est α -stable, le calcul du LLR demande deux intégrations pour calculer la transformée de Fourier inverse de sa fonction caractéristique, et ce calcul dépend naturellement des paramètres α et γ qu'il faut estimer dans un premier temps. Il est donc naturel que diverses approximations plus simples aient été proposées dans la littérature. Par exemple, les travaux [7] proposent d'utiliser la fonction d'écrêtage dépendant de deux paramètres a et b ,

$$L_{\text{clip}}(y) = \text{sgn}(y) \min(a|y|, \sqrt{ab}). \quad (2)$$

Une solution plus appropriée pour les bruits impulsifs a été développée dans [9]. Elle limite le poids des valeurs trop excessives,

$$L_{ab}(y) = \text{sgn}(y) \min(a|y|, b/|y|). \quad (3)$$

Enfin, une combinaison des deux précédentes approximations améliore encore les performances au prix d'un paramètre supplémentaire c [10],

$$L_{abc}(y) = \text{sgn}(y) \min(a|y|, b/|y|, c). \quad (4)$$

La FIGURE 1 compare ces différentes approximations et le LLR obtenu numériquement pour un bruit α -stable de paramètres $\alpha = 1.4$ et $\gamma = 0.4$. Dans la suite de ce papier, nous expliquerons comment choisir au mieux les valeurs des paramètres. Nous constatons que lorsque les paramètres sont correctement choisis, les fonctions simples L_{clip} , L_{ab} et L_{abc} sont particulièrement proches du LLR.

En surimposition, la figure affiche aussi la densité de la sortie Y sachant l'entrée X ; il est visible que toutes les régions des diverses approximations sont susceptibles d'être utilisées.

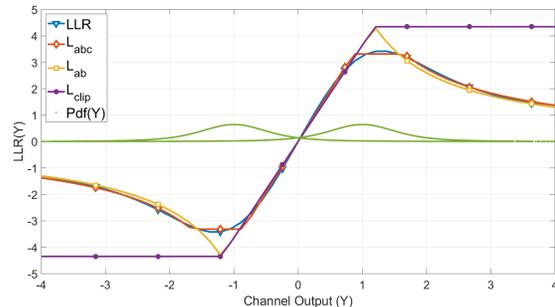


FIGURE 1 – Comparaison du LLR et de différentes approximations dans le cas d'un bruit α -stable de paramètre $\alpha = 1.4$ et $\gamma = 0.4$. Pour L_{ab} , les paramètres utilisés sont $a^* = 4.25$, $b^* = 5.5$ et pour L_{abc} , $a^* = 4.3$, $b^* = 5.7$, $c^* = 3.25$

2.2 Apprentissage

Les approximations du LLR dépendent de deux à trois paramètres, regroupés ici sous la variable θ , qui doit être optimisée pour rendre l'approximation aussi proche que possible du LLR. Dans la suite de ce papier, L_θ représente indifféremment L_{clip} , L_{ab} , ou L_{abc} . Nous avons proposé dans [11, 10] une méthode dérivée des travaux [12] pour un apprentissage supervisé de θ . Le récepteur cherche θ qui maximise

$$C_{L_\theta} = 1 - \mathbb{E} \left[\log_2(1 + e^{-X L_\theta(Y)}) \right]. \quad (5)$$

Cette recherche revient à approcher au mieux la capacité du canal avec des vraisemblances approchées. Notons toutefois qu'une mise en œuvre effective ne peut reposer directement sur l'espérance : à partir d'une séquence d'apprentissage x_1, \dots, x_n et de la sortie correspondante y_1, \dots, y_n , le récepteur optimise une version de (5) où l'espérance est remplacée par une moyenne empirique,

$$C_{L_\theta} = 1 - \sum_{i=1}^n \log_2(1 + e^{-x_i L_\theta(y_i)}). \quad (6)$$

La donnée du LLR $\Lambda(y)$ est équivalente à celle de la probabilité *a posteriori* $p(x | y) = \Pr[X = x | Y = y]$ car $p(x | y) = 1/(1 + e^{x\Lambda(y)})$. De même l'approximation du LLR $L_\theta(y)$ fournit une approximation de l'*a posteriori* $q(x | y) = 1/(1 + e^{xL_\theta(y)})$. Il est possible alors de montrer que le critère C_{L_θ} est borné et la borne est atteinte lorsque $q(x | y) = p(x | y)$.

Plus précisément, l'écart entre C_{L_θ} et la capacité est la distance de Kullback-Leibler entre l'*a posteriori* et son

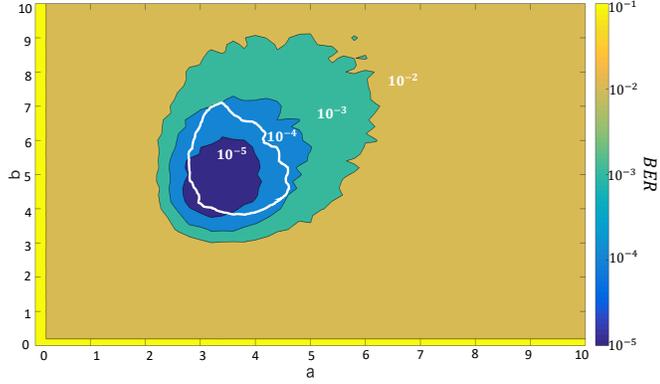


FIGURE 2 – Zone optimale et taux d’erreur binaire en fonction de a et b pour $\alpha = 1.4$ et $\gamma = 0.4$.

approximation,

$$D(p(x|y)||q(x|y)) = \iint \log_2 \frac{q(u|v)}{p(u|v)} p(u|v) du \cdot p(v) dv, \quad (7)$$

où $p(y)$ est la densité de la sortie du canal.

Le critère proposé pour l’apprentissage est séduisant car l’optimum est atteint quand l’*a posteriori* est bien approché. Donc, même sans connaître le LLR, il est possible de l’approcher par apprentissage.

3 Métrique de comparaison

Les récepteurs sous la forme d’approximation du LLR doivent maintenant pouvoir être comparés entre eux pour choisir le meilleur compromis entre simplicité et performance. Toutefois les performances sont à mesurer à l’aulne du taux d’erreur obtenu par simulations Monte-Carlo qui nécessitent une charge de calcul très importante pour atteindre des taux d’erreurs faibles et couvrir la variabilité résultant de l’estimation des paramètres de l’approximation. Pour analyser la robustesse de l’approximation L_{ab} précédente pour un canal à bruit α -stable de paramètre $\alpha = 1.4$ et $\gamma = 0.4$, nous avons tracé sur la FIGURE 2 le taux d’erreur binaire pour un code LDPC régulier (3, 6) de taille 20000 pour différentes valeurs de paramètres a , b . À ces contours se superpose la zone des paramètres qui optimisent le critère (6) pour vérifier l’adéquation entre le récepteur L_{ab} et ce type de canal.

Cette première approche basée sur le taux d’erreur binaire consommant beaucoup de ressources, nous proposons d’utiliser un autre critère basé sur l’erreur quadratique moyenne afin de classer les approximations :

$$\text{MSE} = \int_{-\infty}^{\infty} [\Lambda(y) - L_{\theta}(y)]^2 p(y) dy, \quad (8)$$

le but étant d’approcher au mieux la vraisemblance $\Lambda(y)$ par L_{θ} pour les valeurs les plus probables de y , d’où la pondération par $p(y)$. Même si nous n’avons pas d’expression

analytique de $\Lambda(y)$ et de $p(y)$, une approche numérique à partir de la fonction caractéristique permet de les obtenir.

Plus formellement, il est possible de trouver deux constantes K et K' pour encadrer l’intégrale sur x de (7)

$$K[\Lambda(y) - L_{\theta}(y)]^2 \leq \int \log \frac{q(x|y)}{p(x|y)} p(x|y) dx \leq K'[\Lambda(y) - L_{\theta}(y)]^2,$$

ce qui permet de montrer l’équivalence entre la distance de Kullback-Leibler et le critère MSE,

$$K \text{ MSE} \leq D(q(x|y)||p(x|y)) \leq K' \text{ MSE}. \quad (9)$$

Ainsi comparer des récepteurs selon le critère de Kullback-Leibler et le critère MSE est en première approche cohérent et permet de rapidement sélectionner les meilleures propositions.

4 Résultats de simulation

Pour étudier les performances de notre approche, nous utilisons des codes LDPC régulier (3, 6) d’une longueur de 20000 bits. La séquence d’apprentissage se compose également de 20000 échantillons, permettant d’obtenir une estimation suffisamment fiable du paramètre θ^* . Les résultats seront présentés en fonction du paramètre γ , utilisé comme mesure de l’intensité du bruit α -stable, ce dernier n’ayant pas une variance finie [13].

Dans un premier temps nous calculons la distance (8) pour différentes approximations en fonction de la valeur de dispersion γ . Nous constatons sur la FIGURE 3, pour $\alpha = 1.8$, les gains importants lorsque nous passons de l’écritage L_{clip} (2) à L_{ab} (3) puis à L_{abc} (4).

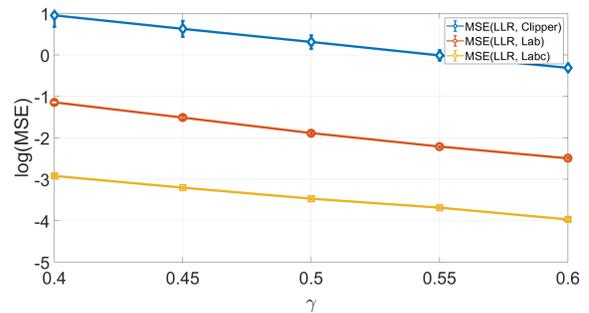


FIGURE 3 – MSE entre L_{clip} , L_{ab} , L_{abc} et le LLR en fonction de la dispersion γ dans un environnement modérément impulsif ($\alpha = 1.8$).

Les résultats sont similaires dans un environnement plus impulsif avec $\alpha = 1.4$ comme le montre la FIGURE 4. La différence entre l’écritage et les autres approximations est cependant plus significative.

Pour évaluer si la métrique choisie est bonne, nous étudions dans un second temps les performances des trois approximations en terme de taux d’erreurs binaires données sur les FIGURE 5 et FIGURE 6, respectivement pour $\alpha = 1.8$ et $\alpha = 1.4$.

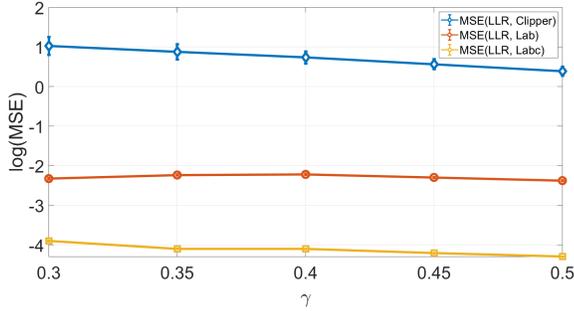


FIGURE 4 – MSE entre L_{clip} , L_{ab} , L_{abc} et le LLR en fonction de la dispersion γ dans un environnement fortement impulsif ($\alpha = 1.4$).

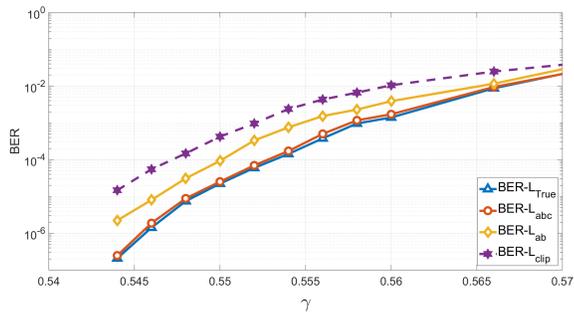


FIGURE 5 – Comparaison du BER pour un environnement modérément impulsif ($\alpha = 1.8$) obtenu pour les approximations L_{clip} , L_{ab} , L_{abc} et le LLR.

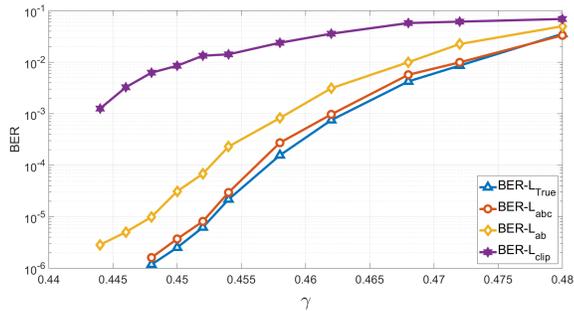


FIGURE 6 – Comparaison du BER pour un environnement fortement impulsif ($\alpha = 1.4$) obtenu pour les approximations L_{clip} , L_{ab} , L_{abc} et le LLR.

Comme pressenti par les calculs du MSE, l'écrêtage s'avère bien moins performant que les deux autres approximations du LLR et de façon d'autant plus significative quand α diminue. En effet, les courbes de MSE présentaient déjà un écart croissant avec les autres approximations dans ce cas. La fonction L_{abc} offre également un gain par rapport à L_{ab} au prix d'un paramètre à estimer supplémentaire. Les résultats nous permettent aussi de constater que l'approximation L_{abc} donne d'excellentes

performances, très proches de celles obtenues en utilisant le LLR, tout en restant élémentaire à mettre en œuvre et d'apprentissage supervisé performant.

5 Conclusion

La présence d'interférence impulsive rend complexe le calcul des LLRs nécessaires au décodage. Il est possible d'utiliser des fonctions les approchant. Ces fonctions doivent être proches du LLR exact mais également simple à utiliser et pouvant s'adapter à différents environnements. Pour évaluer les performances d'une approximation, nous montrons dans cet article qu'il n'est pas nécessaire de recourir à d'intensives simulations Monte Carlo mais qu'un simple calcul de distance permet d'avoir une idée des performances de l'approximation proposée. Cela permettra de travailler sur la qualité des approximations et surtout leur adaptabilité à des contextes variés où la distribution même de l'interférence peut évoluer dans le temps.

Références

- [1] P. C. Pinto et M. Z. Win, "Communication in a Poisson field of interferers—part i: interference distribution and error probability," *IEEE Trans. Wireless Comm.*, vol. 9, no. 7, Jul. 2010.
- [2] H. E. Ghannudi, L. Clavier, N. Azzaoui, F. Septier et P. A. Rolland, " α -stable interference modeling and Cauchy receiver for an IR-UWB ad-hoc network," *IEEE Trans. Comm.*, vol. 58, no. 6, Jun. 2010.
- [3] A. Spaulding et D. Middleton, "Optimum reception in an impulsive interference environment—part i: coherent detection," *IEEE Trans. Comm.*, vol. 25, no. 9, Sep. 1977.
- [4] W. Gu et L. Clavier, "Decoding metric study for turbo codes in very impulsive environment," *IEEE Comm. Lett.*, vol. 16, no. 2, Feb. 2012.
- [5] T. C. Chuah, "Robust iterative decoding of turbo codes in heavy-tailed noise," *IEE Proceedings*, vol. 152, no. 1, Feb. 2005.
- [6] D. Fertnani et G. Colavolpe, "A robust metric for soft-output detection in the presence of class-A noise," *IEEE Trans. Comm.*, vol. 57, no. 1, Jan. 2009.
- [7] H. Ben Mâad, A. Goupil, L. Clavier et G. Gellé, "Clipping demapper for LDPC decoding in impulsive channel," *IEEE Comm. Lett.*, vol. 17, no. 5, May 2013.
- [8] T. S. Saleh, I. Marsland, and M. El-Tanany, "Simplified LLR-based Viterbi decoder for convolutional codes in symmetric alpha-stable noise," in *CCECE*, Apr. 2012.
- [9] V. Dimanche, A. Goupil, L. Clavier et G. Gellé, "On detection method for soft iterative decoding in the presence of impulsive interference," *IEEE Comm. Lett.*, vol. 18, no. 6, Jun. 2014.
- [10] Y. Mestrah, A. Savard, A. Goupil, G. Gellé et L. Clavier, "Robust and simple log-likelihood approximation for receiver Design," in *IEEE WCNC*, Morocco, Apr. 2019.
- [11] Y. Mestrah, A. Savard, A. Goupil, L. Clavier et G. Gellé, "Blind estimation of an approximated likelihood ratio in impulsive environment," in *IEEE PIMRC*, Italy, Sep. 2018.
- [12] R. Yazdani et M. Ardakani, "Linear LLR approximation for iterative decoding on wireless channels," *IEEE Trans. Comm.*, vol. 57, no. 11, Nov. 2009.
- [13] N. C. Beaulieu, H. Shao et J. Fiorina, " p -order metric UWB receiver structures with superior performance," *IEEE Trans. Comm.*, vol. 56, no. 10, Oct. 2008.