

Calcul exact de faible complexité des décompositions conjonctive et disjonctive pour la fusion d'information

Maxime CHAVEROCHE¹, Franck DAVOINE¹, Véronique CHERFAOUI¹

¹Alliance Sorbonne Université, Université de Technologie de Compiègne, CNRS, Laboratoire Heudiasyc
57 Avenue de Landshut, 60200 Compiègne, France
prénom.nom@hds.utc.fr

Résumé – La théorie de Dempster-Shafer (DST) généralise la théorie Bayésienne des probabilités, offrant d'utiles informations supplémentaires, mais souffre d'une grande complexité. Beaucoup de travaux ont visé à réduire la complexité de transformations utilisées pour la fusion d'information avec la règle de Dempster. Pourtant, peu de recherches ont été menées afin de réduire la complexité des calculs liés aux décompositions conjonctive et disjonctive, qui sont à la base d'autres méthodes importantes de fusion d'information. Ici, nous proposons une méthode exploitant l'information contenue dans ces décompositions pour les calculer. Celle-ci se base sur une nouvelle notion que nous appelons *point focal*, dérivée de la notion d'ensemble focal. Avec ceci, nous sommes capables de réduire ces calculs jusqu'à une complexité linéaire par rapport au nombre d'ensembles focaux dans certains cas. Plus largement, nos formules ont le potentiel d'être calculables lorsque la taille du cadre de discernement dépasse la douzaine d'état possibles, contrairement à l'état de l'art actuel. En complément, nous avons développé un framework open-source complet en C++ contenant une implémentation de cette méthode.

Abstract – Dempster-Shafer Theory (DST) generalizes Bayesian probability theory, offering useful additional information, but suffers from a high computational burden. A lot of work has been done to reduce the complexity of computations used in information fusion with Dempster's rule. Yet, few research had been conducted to reduce the complexity of computations for the conjunctive and disjunctive decompositions of evidence, which are at the core of other important methods of information fusion. In this paper, we propose a method designed to exploit the actual *evidence* (information) contained in these decompositions in order to compute them. It is based on a new notion that we call *focal point*, derived from the notion of focal set. With it, we are able to reduce these computations up to a linear complexity in the number of focal sets in some cases. In a broader perspective, our formulae have the potential to be tractable when the size of the frame of discernment exceeds a dozen possible states, contrary to the existing literature. In addition, we have developed a complete open-source C++ framework containing an implementation of this method.

1 Introduction

La théorie de Dempster-Shafer (DST) [1] est un formalisme élégant qui généralise la théorie Bayésienne des probabilités. Il est plus expressif que ce dernier car il donne la possibilité à une source de représenter ses croyances dans l'état d'une variable non seulement en attribuant du crédit directement à un état possible (éléments d'évidence forts) mais aussi en attribuant du crédit à n'importe quel sous-ensemble (éléments d'évidence faibles) de Ω , l'ensemble de tous les états possibles. Cette attribution de crédit s'appelle une *fonction de masse* et fournit des meta-informations qui permettent de quantifier le niveau d'incertitude à propos de croyances, ce qui est crucial pour la prise de décision.

Néanmoins, cette information implique un coût : considérer $2^{|\Omega|}$ valeurs potentielles peut mener à des algorithmes temporellement et spatialement très lourds. Ils peuvent devenir difficiles à utiliser pour plus d'une douzaine d'états possibles (e.g. 20 états dans Ω génèrent environ 1 million de sous-ensembles), bien que l'on pourrait avoir besoin de considérer un grand Ω (e.g. en classification ou identification). De plus, ces algorithmes n'étant plus calculables au-delà d'une douzaine d'états

signifie que leurs performances se dégradent fortement avant cela, ce qui limite davantage leur utilisation pour des applications temps-réel. Pour endiguer ce problème, beaucoup de travaux ont visé à réduire la complexité de transformations utilisées pour la fusion d'information utilisant la règle classique, dite règle de Dempster [2]. Nous distinguons deux approches que nous nommons respectivement *basée ensemble des parties* et *basée information*.

L'approche *basée ensemble des parties* désigne tous algorithmes basés sur la structure de 2^Ω . Ils ont une complexité dépendante de $|\Omega|$. Dans le cas général, la famille d'algorithmes optimaux de ce genre est basée sur la *Fast Möbius Transform* (FMT) [3]. Leur complexité est $O(|\Omega| \cdot 2^{|\Omega|})$ en temps et $O(2^{|\Omega|})$ en espace.

L'approche *basée information* désigne tout algorithme visant à réduire les calculs aux ensembles associés à une information, appelés *ensembles focaux* et généralement bien moins nombreux que $2^{|\Omega|}$. Cette approche est souvent plus efficace que l'approche basée ensemble des parties puisqu'elle ne dépend que de l'information contenue dans les sources avec une complexité quadratique au plus. Ce faisant, elle permet l'exploita-

tion du plein potentiel de la DST en donnant la possibilité de choisir n'importe quel Ω , sans se préoccuper de sa taille.

Par ailleurs, même s'il est possible que cette approche mène à des situations dans lesquelles il est plus performant d'utiliser la FMT [4], celles-ci deviennent de moins en moins probables à mesure que $|\Omega|$ grandit. De plus, l'approche basée information bénéficie directement de l'utilisation de méthodes d'approximation de l'information, dont certaines sont très efficaces [5]. Ainsi, cette approche semble supérieure à la FMT dans la plupart des cas, surtout quand $|\Omega|$ est grand, où une méthode à complexité exponentielle comme la FMT est simplement incalculable.

La décomposition conjonctive, aussi connue sous le nom de *décomposition canonique* [6], est une représentation importante dans la DST. En particulier, elle a permis la définition de la règle *Cautious* [7] et de ses généralisations [8] pour la combinaison de croyances de sources dépendantes les unes des autres, ce qui est souvent le cas dans les applications réelles telles que le partage d'informations dans un réseau de véhicules [9]. Son dual, la décomposition disjonctive, a été définie dans [7] où elle a aussi été utilisée pour définir la règle *Bold*, qui est utile quand les sources sont dépendantes et potentiellement non fiables. Plus généralement, les décompositions conjonctive et disjonctive sont utilisées pour définir les familles infinies de règles de fusion basées t-norme et uninorme [10], ainsi qu'en analyse de conflit [11], clustering [12] et renforcement/affaiblissement [13] de croyances.

Pour le calcul de la décomposition conjonctive, [7] a proposé des méthodes linéaires basées information dans deux cas particuliers. Cependant, dans le cas général, les décompositions conjonctive et disjonctive ne peuvent pas être simplifiées en des expressions mathématiques n'utilisant que des ensembles focaux. À notre connaissance, les seuls algorithmes proposés pour calculer ces décompositions dans le cas général sont la FMT et le calcul matriciel [14], comme suggéré dans [6, 7], le deuxième étant moins efficace en temps et en espace que le premier. Ainsi, jusqu'ici, toute méthode basée sur ces décompositions dans le cas général devait utiliser la FMT, et donc avait une complexité au moins exponentielle en temps et en espace.

Ici, fournissons une méthode basée information pour calculer les décompositions conjonctive et disjonctive dans le cas général. Ce papier est organisé comme suit : Section 2 présente les éléments de la DST sur lesquels nous bâtissons notre méthode. Section 3 en présente les aspects mathématiques. Nous concluons avec la section 4.

2 Définitions préliminaires

Avant de plonger dans notre méthode, il est nécessaire de rappeler quelques notions autour de la décomposition conjonctive. La décomposition disjonctive étant simplement son dual, tout ce qui est dit dans cette section peut être aisément transposé à cette décomposition. Nous supposons les notions de cadre de discernement (i.e. Ω) et de fonction de masse acquises.

Définition 1 (Élément focal). Pour toute fonction de masse m ,

un élément focal (ou ensemble focal) est un ensemble A tel que $m(A) \neq 0$. Tout ensemble non focal ne contient aucune information à propos de m . Dans la suite, nous notons \mathcal{F} l'ensemble des éléments focaux d'une fonction de masse.

Définition 2 (Fonction de commonnalité). Pour toute fonction de masse m , une fonction de commonnalité q est définie comme suit :

$$\forall A \subseteq \Omega, \quad q(A) = \sum_{B \supseteq A} m(B) = \sum_{\substack{B \supseteq A \\ B \in \mathcal{F}}} m(B) \quad (1)$$

Il est important de noter que tous les sous-ensembles de Ω peuvent avoir une commonnalité dans $[0, 1]$, y compris les éléments non-focaux.

Remarque. Une procédure basée directement sur cette formule aurait une complexité entre $O(|\mathcal{F}|)$ et $O(|\mathcal{F}|^2)$. Par la suite, la fonction de masse m peut être simplement récupérée depuis q avec la même complexité en inversant le calcul des commonnalités (1) sur les ensembles focaux uniquement.

Définition 3 (Règle conjonctive). Afin de fusionner les informations issues de deux sources 1 et 2, il est nécessaire de définir une règle de combinaison. Dans l'espace des commonnalités, la règle conjonctive introduite par Smets dans le modèle des croyances transférables (TBM) [15], notée \odot , est définie comme suit :

$$\forall A \subseteq \Omega, \quad (q_1 \odot q_2)(A) = q_1(A) \cdot q_2(A)$$

Définition 4 (Décomposition conjonctive). La décomposition conjonctive est une décomposition introduite par Smets [6] de toute fonction de croyances telle que $\Omega \in \mathcal{F}$ en une combinaison conjonctive de fonctions simples notées A^w , où $A \subset \Omega$ et w est la fonction de poids conjonctif définie ci-après.

Dans l'espace des commonnalités, nous avons :

$$\forall A \subseteq \Omega, \quad A_q^w : \begin{cases} q(B) = 1 & \forall B \subseteq A \\ q(B) = w(A) & \forall B \not\subseteq A \end{cases}$$

La décomposition conjonctive de q est :

$$q = \odot_{A \subset \Omega} A_q^w$$

Nous obtenons :

$$\forall B \subseteq \Omega, \quad q(B) = \prod_{\substack{A \subset \Omega \\ A \not\supseteq B}} w(A) = q(\Omega) \cdot \prod_{\substack{A \subset \Omega \\ A \supseteq B}} w(A)^{-1} \quad (2)$$

En conséquence, selon le théorème d'inversion de Möbius rappelé dans [3], nous déduisons que pour toute fonction de masse sur 2^Ω , si Ω est un élément focal (permet notamment de poser $w(\Omega)^{-1} = q(\Omega)$), alors sa décomposition conjonctive est définie par la fonction de poids w suivante :

$$\forall B \subseteq \Omega, \quad w(B) = \prod_{\substack{A \subset \Omega \\ A \supseteq B}} q(A)^{(-1)^{|A|-|B|+1}} \quad (3)$$

Nous observons que cette fonction de poids w n'est pas directement basée sur m mais sur q qui ne possède aucune valeur fixe pour les éléments non-focaux. De plus, remplacer ces commonnalités par leur expression en masses ne simplifie pas l'expression dans le cas général.

Remarque. En résumé, trois choses empêchent un calcul basé information :

- le produit sur tous les sur-ensembles de A dans (2), pour tout $B \in 2^\Omega$,
- idem dans (3),
- l'ignorance concernant les éléments focaux de m si des modifications sont apportées aux décompositions (e.g. par une règle de combinaison) pour l'inverse de (1).

Si nous pouvions trouver un lien entre les éléments focaux de m et ceux de $\log \circ w$, nous pourrions être en mesure de réduire la complexité de ces transformations.

3 Calcul basé information des décompositions conjonctives et disjonctives

Dans cette section, nous détaillons notre méthode basée information pour le calcul de la décomposition conjonctive basée sur la notion de *point focal* que nous introduisons ici, une notion dérivée de celle d'ensemble focal et qui la contient. La méthode pour la décomposition disjonctive peut être déduite à partir de la méthode pour la décomposition conjonctive puisque, pour tout Ω , l'ensemble 2^Ω a une structure symétrique.

Nous prouvons notamment le *théorème du proxy* et son corollaire permettant de conclure que les points focaux sont suffisants à la définition de la fonction de poids conjonctif w . En conséquence, nous établissons la *formule récursive du point focal* qui nous permet de calculer efficacement la décomposition conjonctive en réutilisant les poids précédemment calculés.

Définition 5 (Point focal). Nous définissons un *point focal* comme l'ensemble parmi tous ceux associés à une même expression de commonalité (i.e. une sélection de sur-ensembles focaux) qui contient tous les autres. Formellement, en notant $\mathring{\mathcal{F}}$ l'ensemble des points focaux, ceux-ci sont définis par :

$$\forall A \in \mathring{\mathcal{F}}, \forall B \subseteq \Omega, \quad \mathcal{F}_{\supseteq A} = \mathcal{F}_{\supseteq B} \Rightarrow A \supseteq B$$

avec la notation évidente $\mathcal{F}_{\supseteq A} = \{F \in \mathcal{F} / F \supseteq A\}$.

Ainsi, un point focal est le plus grand ensemble contenu dans une sélection d'éléments focaux. En d'autres termes, c'est l'intersection de tous ces éléments. Donc, tout point focal A est défini par :

$$\exists \mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}, \mathcal{E} \neq \emptyset, \quad A = \bigcap_{F \in \mathcal{E}} F$$

Propriété 1 (Inclusion des éléments focaux). $\mathcal{F} \subseteq \mathring{\mathcal{F}}$ puisque $\forall A \in \mathcal{F}, \exists \mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$, tel que $|\mathcal{E}| = 1$ et $A = \bigcap_{F \in \mathcal{E}} F$.

Propriété 2 (Décomposition en autres points focaux). L'intersection de deux points focaux est un point focal défini par l'union de leurs sélections d'éléments focaux.

Remarque. Cela signifie notamment que tout point focal peut être décrit comme soit F , où $F \in \mathcal{F}$, soit $\mathring{F} \cap F$, où $\mathring{F} \in \mathring{\mathcal{F}}$. Nous pouvons donc trouver tous les points focaux en $O(|\mathring{\mathcal{F}}| \cdot |\mathcal{F}|)$.

Lemme 1 (Équilibre des exposants). Suivant le théorème du binôme de Newton, il est facile de prouver que :

$$\forall C \subseteq \Omega, \forall A \subset C, \quad \sum_{\substack{B \supseteq A \\ B \subseteq C}} (-1)^{|B|-|A|+1} = 0$$

Théorème 1 (Formule du point focal). $\forall A \subset \Omega$, $w(A)$ peut être décomposé en un produit de commonalités sur les points focaux sur-ensembles de A seuls comme suit :

$$w(A) = q(A)^{-1} \cdot \prod_{F \in \mathring{\mathcal{F}}_{\supseteq A}} q(F)^{e_{A,F}} \quad (4)$$

avec la notation évidente $\mathring{\mathcal{F}}_{\supseteq A} = \{F \in \mathring{\mathcal{F}} / F \supseteq A\}$, et

$$\forall F \in \mathring{\mathcal{F}}_{\supseteq A}, \quad e_{A,F} = 1 - \sum_{\substack{B \in \mathring{\mathcal{F}}_{\supseteq A} \\ B \subset F}} e_{A,B}.$$

Démonstration. En combinant la définition d'un point focal, l'équilibre des exposants du Lemme 1 et en posant $e_{A,B} = \sum_{\substack{X \supseteq A \\ X \subseteq B}} (-1)^{|X|-|A|+1}$, on obtient $\forall F \in \mathring{\mathcal{F}}_{\supseteq A}$:

$$\begin{aligned} \prod_{\substack{X \supseteq A \\ X \subseteq F}} q(X)^{(-1)^{|X|-|A|+1}} &= q(A)^{-1} \cdot \left[\prod_{\substack{B \in \mathring{\mathcal{F}}_{\supseteq A} \\ B \subset F}} q(B)^{e_{A,B}} \right] \cdot q(F)^{e_{A,F}} \\ \Rightarrow 0 &= -1 + \left[\sum_{\substack{B \in \mathring{\mathcal{F}}_{\supseteq A} \\ B \subset F}} e_{A,B} \right] + e_{A,F} \end{aligned}$$

■

Théorème 2 (Théorème du proxy). $\forall B \subset \Omega$, si $\exists P \in \mathring{\mathcal{F}}_{\supseteq B}$ tel que $\forall \mathring{F} \in \mathring{\mathcal{F}}_{\supseteq B}, P \subseteq \mathring{F}$, alors on a : $w(B) = q(B)^{-1} \cdot q(P)$.

Démonstration. Selon la formule du point focal (4), $\forall B \subset \Omega$, si $\exists P \in \mathring{\mathcal{F}}_{\supseteq B}$ tel que $\forall F \in \mathring{\mathcal{F}}_{\supseteq B}, P \subseteq F$, alors $e_{B,P} = 1$. Ainsi, $\forall F \in \mathring{\mathcal{F}}_{\supseteq P}$ où $\nexists F' \in \mathring{\mathcal{F}}_{\supseteq P, C \subset F}$, on a : $e_{B,F} = 1 - e_{B,P} = 0$. De même, $\forall F \in \mathring{\mathcal{F}}_{\supseteq P}$ tel que $\forall F' \in \mathring{\mathcal{F}}_{\supseteq P, C \subset F}, \nexists F'' \in \mathring{\mathcal{F}}_{\supseteq P, C \subset F'}$, on a : $e_{B,F} = 1 - (e_{B,P} + \sum_{F' \in \mathring{\mathcal{F}}_{\supseteq P, C \subset F}} e_{B,F'}) = 1 - (1 + \sum_{F' \in \mathring{\mathcal{F}}_{\supseteq P, C \subset F}} 0) = 0$. Par récurrence, $\forall F \in \mathring{\mathcal{F}}_{\supseteq P}$, on obtient : $e_{B,F} = 0$. ■

Corollaire 1 (Suffisance de $\mathring{\mathcal{F}}$ pour définir w). $\forall B \notin \mathring{\mathcal{F}}, \exists P \in \mathring{\mathcal{F}}_{\supseteq B}$ tel que $\forall \mathring{F} \in \mathring{\mathcal{F}}_{\supseteq B}, P \subseteq \mathring{F}$ et $q(B) = q(P)$. Selon le théorème du proxy, on a donc : $\forall B \notin \mathring{\mathcal{F}}, w(B) = 1$.

Démonstration. Nous savons de la Propriété 2 que $\forall B \subseteq \Omega$, si $\mathring{\mathcal{F}}_{\supseteq B} \neq \emptyset$, alors $\exists P \in \mathring{\mathcal{F}}$ tel que $P = \bigcap \mathring{\mathcal{F}}_{\supseteq B}$. Par définition de l'opérateur \bigcap , nous avons que $\forall F \in \mathring{\mathcal{F}}_{\supseteq B}, P \supseteq F$.

Ainsi, sachant que ces F contiennent B , P est nécessairement soit B , soit un superset de B . Si $P = B$, alors $B \in \mathring{\mathcal{F}}$. Si $P \supset B$, alors $P \in \mathring{\mathcal{F}}_{\supseteq B}$. Donc, si $B \notin \mathring{\mathcal{F}}$, alors $P \in \mathring{\mathcal{F}}_{\supseteq B}$.

De plus, sachant que Ω est toujours un élément focal pour que la décomposition conjonctive existe (cf. Définition 4) et que les éléments focaux sont aussi des points focaux (cf. Propriété 1), aucun élément $B \notin \mathring{\mathcal{F}}$ ne peut vérifier $\mathring{\mathcal{F}}_{\supseteq B} = \emptyset$.

Pour finir, si B n'est pas un point focal, alors il existe forcément un point focal le contenant et ayant la même valeur $q(B)$. Sachant que P est le plus petit point focal contenant B , nous avons nécessairement $q(B) = q(P)$. ■

Théorème 3 (*Formule récursive du point focal*). Grâce au corollaire 1 et en reprenant l'éq. (2), on obtient que $\forall A \subset \Omega$, $w(A)$ peut être décomposé en un produit de poids associés aux points focaux sur-ensembles de A seuls comme suit :

$$\forall A \subset \Omega, \quad w(A) = \frac{q(\Omega)}{q(A) \cdot \prod_{\substack{F \in \dot{\mathcal{F}} \supset A \\ F \neq \Omega}} w(F)} \quad (5)$$

Remarque. Une procédure basée directement sur cette formule aurait une complexité entre $O(|\dot{\mathcal{F}}|)$ et $O(|\dot{\mathcal{F}}|^2)$. Sa formule inverse (2) sur les points focaux amène à la même complexité.

En prenant les cas particuliers en compte (non traités dans cet article), cette méthode varie de $O(|\mathcal{F}|)$ à $O(|\dot{\mathcal{F}}|^2)$ où $|\dot{\mathcal{F}}| \in [|\mathcal{F}|, 2^{|\Omega|}]$, selon la structure de \mathcal{F} . Plus il existe d'ensembles focaux de haut cardinal non inclus les uns dans les autres, et plus $|\dot{\mathcal{F}}|$ a de chances d'être grand. Cependant, les structures les plus naturelles et interprétables (i.e. proches des structures quasi-Bayésiennes ou consonantes) ont la tendance inverse. De plus, notre approche peut bénéficier de méthodes d'approximation de \mathcal{F} , permettant de maintenir $|\dot{\mathcal{F}}|$ proche de $|\mathcal{F}|$.

Nous avons implémenté cette méthode au sein d'un framework open-source basé information pour la DST en C++ [16].

4 Conclusion

Nous avons présenté les difficultés liées à la conception d'algorithmes basés information pour la transformation d'une fonction de croyance en sa décomposition conjonctive ou disjonctive, ainsi que pour sa transformation de retour dans l'espace d'origine. Pour cela, nous avons proposé une nouvelle méthode basée sur une nouvelle notion mathématique que nous nommons *point focal*, dérivée de la notion d'ensemble focal.

Au-delà du cadre de cet article, la notion de point focal peut être utilisée en analyse d'information. Plus généralement, un article [17] bien plus large et contenant d'autres méthodes exactes corrigeant les faiblesses calculatoires de celle-ci, supplantant la FMT en toutes circonstances, sera bientôt disponible, et notre implémentation en C++ peut déjà être utilisée pour améliorer significativement la complexité de toute méthode basée sur ces décompositions, comme souligné en introduction. En particulier, nous projetons de l'utiliser pour calculer la règle Cautious pour la fusion d'information dans un réseau de véhicules.

Remerciements

Ce travail a été mené et co-financé dans le cadre du Labex MS2T et de la région Hauts-de-France. Il a été soutenu par le gouvernement français au travers du programme "Investissements d'avenir" géré par l'Agence Nationale de la Recherche (Référence ANR-11-IDEX-0004-02).

Références

[1] G. Shafer, *A Mathematical Theory of Evidence*. Princeton University Press, Princeton, 1976.

[2] A. Dempster, "A Generalization of Bayesian Inference," *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, vol. 30, 1968.

[3] R. Kennes, "Computational aspects of the Mobius transformation of graphs," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 22, no. 2, pp. 201–223, 1992.

[4] N. Wilson, "Algorithms for Dempster-Shafer Theory," in *Handbook of Defeasible Reasoning and Uncertainty Management Systems : Algorithms for Uncertainty and Defeasible Reasoning*. Springer Netherlands, 2000, pp. 421–475.

[5] A. Sarabi-Jamab and B. N. Araabi, "Information-Based Evaluation of Approximation Methods in Dempster-Shafer Theory," *IJUFKS*, vol. 24, no. 04, pp. 503–535, 2016.

[6] P. Smets, "The Canonical Decomposition of a Weighted Belief," *Proc. of IJCAI*, pp. 1896–1901, 1995.

[7] T. Denoeux, "Conjunctive and disjunctive combination of belief functions induced by nondistinct bodies of evidence," *Artificial Intelligence*, vol. 172, no. 2, pp. 234 – 264, 2008.

[8] A. Kallel and S. Le Hégarat-Masclé, "Combination of partially non-distinct beliefs : The cautious-adaptive rule," *IJAR*, vol. 50, no. 7, pp. 1000–1021, 2009.

[9] N. El Zoghby, V. Cherfaoui, B. Ducourthial, and T. Denoeux, "Distributed Data fusion for detecting Sybil attacks in VANETs," in *Belief Functions : Theory and Applications*. Springer, 2012, pp. 351–358.

[10] F. Pichon and T. Denoeux, "T-norm and uninorm-based combination of belief functions," *Proc. of NAFIPS*, 2008.

[11] A. Roquel, S. L. Hégarat-Masclé, I. Bloch, and B. Vincke, "Decomposition of conflict as a distribution on hypotheses in the framework on belief functions," *IJAR*, vol. 55, no. 5, pp. 1129 – 1146, 2014.

[12] J. Schubert, "Clustering decomposed belief functions using generalized weights of conflict," *IJAR*, vol. 48, no. 2, pp. 466–480, 2008.

[13] D. Mercier, F. Pichon, and É. Lefèvre, "Corrigendum to "Belief functions contextual discounting and canonical decomposition"[IJAR 53 (2012) 146–158]," *IJAR*, vol. 70, pp. 137–139, 2016.

[14] P. Smets, "The application of the matrix calculus to belief functions," *IJAR*, vol. 31, no. 1, 2002.

[15] P. Smets, "The Transferable Belief Model," *Artificial Intelligence*, vol. 66, no. 2, pp. 191–234, 1994.

[16] M. Chaverroche, "evidence-based-DST," <https://github.com/mchaverroche/evidence-based-DST>, 2019.

[17] M. Chaverroche, F. Davoine, and V. Cherfaoui, "Efficient Möbius Transformations and their applications to Dempster-Shafer Theory," *Manuscript in preparation*, 2019.