

Espaces de Hilbert pour les Modulations Numériques d’Enveloppe*

Simon BICAÏS, Jean-Baptiste DORÉ

CEA-Leti, Minatec Campus,
17 Avenue des Martyrs, 38054 Grenoble, France

simon.bicais@cea.fr, jean-baptiste.dore@cea.fr

Résumé – Cet article propose un cadre algébrique pour les modulations numériques d’enveloppe. Les formes d’ondes à valeurs non-négatives sont représentées dans un espace de Hilbert défini par transport de structure de l’espace usuel \mathcal{L}^2 . Ainsi, les méthodes classiques de traitement du signal pour les formes d’ondes réelles peuvent être exploitées pour les modulations d’enveloppe. Afin d’illustrer la pertinence du cadre proposé, nous montrons que les contraintes liées aux convertisseurs analogique-numérique dans le cadre de communications sub-THz peuvent être assouplies par l’utilisation de forme d’ondes non-négatives orthogonales.

Abstract – This paper proposes an algebraic framework for digital envelope modulation. We represent waveforms with non-negative real values on a Hilbert space defined by transport of structure of the usual signal-space \mathcal{L}^2 . Therefore, existing schemes developed for real-valued signals can be exploited upon envelope modulation. To illustrate the relevance of the proposed framework, we show that constraints on embedded analog-to-digital converters in sub-THz communications can be relaxed with the use of non-negative orthogonal waveforms.

1 Introduction

Les plusieurs GHz de bande disponibles dans les fréquences *sub-THz*, entre 100 et 300 GHz, pourraient permettre des communications sans-fil de débits de l’ordre du Tbits/s. Pour atteindre ces débits, il peut être envisagé de transposer les architectures connues, *i.e.* modulation et démodulation cohérentes. Néanmoins, des difficultés technologiques existent. Il a été montré que les communications sub-THz souffrent de fortes imperfections de phase dues aux oscillateurs : bruit de phase, décalage de la fréquence porteuse [1]. Aujourd’hui, les axes de recherches portent soit sur la compensation de ces imperfections, soit sur l’optimisation du traitement du signal, pour permettre le développement de systèmes sub-THz cohérents [2]. En revanche, les modulations non cohérentes sont utilisées depuis longtemps, *e.g.* On-Off Keying (OOK) à 260 GHz en 2012 [3], pour leur robustesse et leur faible complexité. En effet, la détection d’enveloppe permet une conversion en bande de base intrinsèquement robuste au bruit de phase. Il est ainsi pertinent d’envisager le développement des systèmes sub-THz à partir de modulations basés sur des formes d’ondes non-négatives autorisant un récepteur à détection d’enveloppe.

Les espaces \mathcal{L}^2 et ℓ^2 sont généralement utilisés pour la conception des systèmes de communication [4] et fournissent de puissants outils d’analyse pour les signaux réels. Ces espaces ont également été exploités pour développer des modulations d’enveloppe. Par exemple, les modulations numériques utilisées pour les communications en lumière visible (Li-Fi pour Light Fidelity) utilisent des formes d’ondes non-négatives : *e.g.* OOK, Pulse Position Modulation (PPM), *etc* [5]. À notre connaissance, le développement d’un cadre algébrique dédié aux modulations numériques d’enveloppe n’a pas été abordé dans la littérature. La définition d’un tel cadre permettrait la conception de nouvelles modulations d’enveloppe adaptées aux communications sub-THz. Cela nous incite à introduire un espace de Hilbert approprié pour représenter les

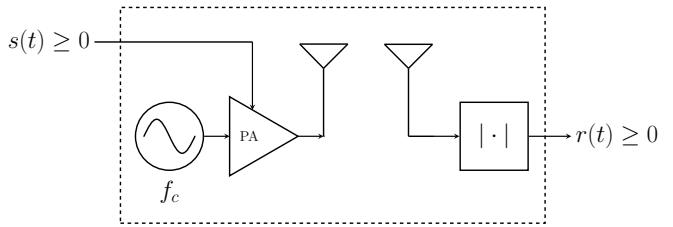


FIGURE 1: Conversions entre bande de base et bande passante réalisées par modulation et détection d’enveloppe.

formes d’ondes à valeurs non-négatives.

Cet article propose un cadre algébrique pour les modulations numériques d’enveloppe. Dans un premier temps, les formes d’ondes à valeurs réelles non-négatives sont représentées dans un espace de Hilbert, ce qui nous permet de redéfinir les propriétés et les opérateurs fondamentaux : orthogonalité, projection, *etc.* Nous souhaitons également pouvoir exploiter les techniques classiques de traitement du signal pour les formes d’ondes réelles. Par conséquent, l’espace de Hilbert proposé est défini par transport de structure de l’espace \mathcal{L}^2 . Dans un second temps, afin d’illustrer la pertinence du cadre introduit pour le développement des communications sub-THz, nous montrons que les contraintes liées aux Convertisseurs Analogique-Numérique (CAN) peuvent être assouplies par l’utilisation de formes d’ondes non-négatives orthogonales.

2 Modèle du système

Les systèmes de communication sub-THz basés sur des récepteurs cohérents sont sujets à d’importantes perturbations de phase dues aux oscillateurs [1]. En revanche, la détection d’enveloppe permet une conversion du signal reçu de la bande passante à la bande de base sans ces perturbations. De plus, moduler directement l’enveloppe du signal à l’émetteur permet une utilisation efficace des amplificateurs de puissance [6]. Pour ces raisons, nous considérons un système de communication basé sur la modulation et la détection d’enveloppe comme illustré par la figure 1. À l’émetteur, le signal modulant de bande-limité

*Les recherches qui ont abouti à ces résultats ont été financées par l’Agence Nationale de la Recherche (ANR-17-CE25-0013) dans le cadre du projet BRAVE.

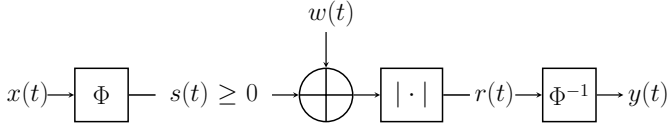


FIGURE 2: Illustration du canal non-négatif

est noté s et appartient à $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{s(t) \in \mathbb{R}, s(t) \geq 0\}$. Le signal transmis à la fréquence porteuse f_c est ainsi exprimé par :

$$s_{f_c}(t) = s(t) \cos(2\pi f_c t + \phi(t)), \quad (1)$$

où ϕ représente le bruit de phase de l'oscillateur. Au récepteur, la conversion en bande de base est réalisée par un détecteur d'enveloppe. Les détails de la mise en œuvre de tels détecteurs dépassent le cadre de cette étude. Il est donc supposé que le détecteur démodule parfaitement l'enveloppe s du signal reçu s_{f_c} sans impact du bruit de phase ϕ .

Par ailleurs, les récentes campagnes de mesure [2] ont montré que pour des transmissions dans les bandes sub-THz, le trajet direct est dominant. Le canal peut donc être considéré comme plat. Nous supposons de plus que le récepteur est synchronisé et que l'effet du canal est égalisé¹. Nous étudions donc un canal corrompu par un bruit blanc additif gaussien. Le signal reçu, en bande de base, est donné par :

$$r(t) = |s(t) + w(t)|, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

où w est un bruit gaussien réel de moyenne nulle et de densité spectrale $2\sigma_w^2$. Le bruit w est filtré à l'entrée du détecteur d'enveloppe et est donc de bande limitée. Par la suite, nous nous référons à l'équation (2) comme le Canal Non-Négatif (CNN). Il est également utile d'introduire le modèle discret du CNN, où le symbole reçu à l'instant k est donné par :

$$r_k = |s_k + w_k|, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (3)$$

où s_k est le symbole modulé de durée T et de valeur positive réelle et $w_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma_w^2/T)$.

3 Cadre algébrique

3.1 Enjeux

Les espaces de Hilbert fournissent un cadre théorique utile au développement des télécommunications. Les méthodes linéaires de traitement de signal reposent entièrement sur les propriétés des espaces de Hilbert. Par exemple, le théorème de projection orthogonale est utilisé dans les problèmes d'approximation. Néanmoins, les structures algébriques conventionnelles sont principalement conçues pour les signaux à valeurs réelles ou complexes. Nous avons pour objectif de définir un cadre algébrique dédié aux formes d'ondes non-négatives, ce qui permettrait de concevoir des modulations d'enveloppe adaptées aux communications sub-THz. Pour ce faire, les formes d'ondes non-négatives, à valeurs dans $\mathbb{R}_{\geq 0}$, sont représentées dans un espace de Hilbert. Cet espace est noté H_ρ pour les formes d'ondes continues et h_ρ pour les signaux discrets. Nous souhaitons également que les techniques classiques de traitement du signal développées pour les signaux réels puissent être

utilisées. Par conséquent, l'espace de Hilbert H_ρ est défini par *transport de structure* de l'espace \mathcal{L}^2 – ou ℓ^2 dans le cas discret. Le transport de structure $\Phi : \mathcal{L}^2 \rightarrow H_\rho$ repose sur l'application Φ afin de lier les formes d'ondes réelles aux formes d'ondes non-négatives. L'utilisation de Φ dans le CNN est représentée dans la figure 2. Par la suite, nous écrivons \mathcal{L}^2 l'espace de Hilbert $(\mathcal{L}^2([0, T]), \langle \cdot, \cdot \rangle)$, désignant l'ensemble des fonctions réelles de domaine $[0, T]$ et de carré intégrable équipé du produit scalaire usuel de fonctions réelles $\langle \cdot, \cdot \rangle$. De même, ℓ^2 indique l'espace de Hilbert des suites réelles de carré sommable. Nous présentons en premier le transport de structure des espaces de Hilbert avant de définir H_ρ .

3.2 Transport de structure et espaces de Hilbert

3.2.1 De l'espace vectoriel V_1 à V_2 .

Nous considérons d'abord deux ensembles S_1, S_2 et un homéomorphisme $\Phi : S_1 \rightarrow S_2$. L'ensemble S_1 , muni de l'addition vectorielle $+$ et de la multiplication scalaire \times sur le corps F , définit un espace vectoriel $V_1 = (S_1, +, \times)$. Nous nous intéressons ensuite à $V_2 = (S_2, \oplus, \otimes)$, l'ensemble S_2 muni de l'addition vectorielle \oplus et la multiplication scalaire \otimes sur le corps F définies comme suit. Prenons $u_1, v_1 \in V_1$ et $\lambda \in F$ et dénotons $u_2 = \Phi(u_1), v_2 = \Phi(v_1) \in V_2$, alors l'addition vectorielle est définie par :

$$u_2 \oplus v_2 = \Phi(\Phi^{-1}(u_2) + \Phi^{-1}(v_2)) = \Phi(u_1 + v_1), \quad (4)$$

et la multiplication scalaire par :

$$\lambda \otimes u_2 = \Phi(\lambda \times \Phi^{-1}(u_2)) = \Phi(\lambda \times u_1). \quad (5)$$

Proposition 1. $V_2 = (S_2, \oplus, \otimes)$ est un espace vectoriel sur le corps F .

Démonstration. La proposition 1 peut être aisément démontrée en s'assurant que V_2 vérifie les huit axiomes d'un espace vectoriel. \square

3.2.2 De l'espace de Hilbert H_1 à H_2

Le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_1 : V_1 \times V_1 \rightarrow F$ confère à $H_1 = (V_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ une structure d'espace de Hilbert. Ainsi, l'ensemble S_1 est un espace métrique complet lorsqu'il est équipé de la distance induite du produit scalaire $d_1(u_1, v_1) = \sqrt{\langle u_1 - v_1, u_1 - v_1 \rangle_1}$. Nous étudions ensuite $H_2 = (V_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ dont l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle_2 : V_2 \times V_2 \rightarrow F$ est définie par :

$$\langle u_2, v_2 \rangle_2 = \langle \Phi^{-1}(u_2), \Phi^{-1}(v_2) \rangle_1 = \langle u_1, v_1 \rangle_1. \quad (6)$$

On note d_2 la fonction suivante :

$$d_2(u_2, v_2) = \sqrt{\langle u_2 \oplus \neg v_2, u_2 \oplus \neg v_2 \rangle_2}, \quad (7)$$

où $\neg v_2$ désigne l'opposé du vecteur v_2 .

Proposition 2. $H_2 = (V_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ est un espace de Hilbert.

Démonstration. Pour démontrer que H_2 est un espace de Hilbert, il suffit de montrer que $(V_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ est un espace pré-hilbertien et que (S_2, d_2) est un espace métrique complet. Par manque de place, la preuve est laissée au lecteur. \square

1. Le gain du canal est normalisé.

3.2.3 Propriétés du transport de structure

Une telle définition de H_2 à partir H_1 correspond au transport de structure dont les propriétés sont énumérées ci-dessous.

Théorème 1. *Soit le transport de structure $\Phi : H_1 \rightarrow H_2$, alors les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. Φ est surjectif et préserve le produit scalaire.
2. Φ est surjectif et isométrique.
3. Φ transforme une base orthonormale de H_1 en une base orthonormale de H_2 .

Démonstration. Il est possible de démontrer ce théorème en s'appuyant sur le fait que $\Phi : H_1 \rightarrow H_2$ est, par définition de H_2 , un opérateur linéaire borné. La suite de la preuve est un résultat connu des opérateurs sur les espaces de Hilbert [7]. \square

3.3 Définition de H_ρ

Nous utilisons maintenant les résultats précédemment introduits sur le transport de structure des espaces de Hilbert afin de définir un cadre algébrique pour les modulations d'enveloppe. Comme mentionné, nous souhaitons nous appuyer sur l'espace de Hilbert \mathcal{L}^2 , par conséquent :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{L}^2 &\rightarrow H_\rho, \\ &: x(t) \mapsto s(t). \end{aligned} \quad (8)$$

où x est une forme d'onde réelle. Pour assurer l'intégrité de la modulation d'enveloppe, l'application Φ est contrainte de la manière suivante : l'image de x doit être non-négative *i.e.* $\Phi : x(t) \mapsto s(t) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. L'espace de Hilbert $H_\rho = (V_\rho, \langle \cdot, \cdot \rangle_\rho)$ est défini par l'espace vectoriel V_ρ et le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_\rho$. L'espace vectoriel V_ρ désigne l'ensemble $\Phi(\mathcal{L}^2([0, T]))$ muni de l'addition vectorielle \oplus et de la multiplication scalaire \otimes sur le corps \mathbb{R} définies par les équation (4) et (5). Le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_\rho$ sur V_ρ est défini à partir de Φ et du produit scalaire usuel de fonctions réelles $\langle \cdot, \cdot \rangle$ par l'équation (6). Il est pertinent de mentionner que l'espace de Hilbert H_ρ peut être étendu aux dimensions supérieures par produit cartésien. Il suffit de définir les opérations vectorielles par composante et le produit scalaire comme la somme des produits scalaires associés à chaque composante. Comme illustré dans la figure 2, le CNN peut également être exprimé par :

$$y(t) = \Phi^{-1} (|\Phi(x(t)) + w(t)|), \quad (9)$$

où x et y sont des signaux réels. Par conséquent, les modulations numériques existantes, *e.g.* une modulation d'amplitude en quadrature, peuvent être transposées dans l'espace des signaux non-négatifs par une application Φ appropriée afin de réaliser des modulations d'enveloppe.

De manière similaire à la définition de H_ρ à partir de \mathcal{L}^2 pour les formes d'ondes continues, il est possible de définir l'espace de Hilbert h_ρ pour les signaux discrets à partir de ℓ^2 . Au regard du nombre limité de pages, cette définition n'est pas détaillée.

3.4 Suites orthonormales dans H_ρ

Les suites orthonormales jouent un rôle important dans les systèmes de communication, en permettant d'implémenter des méthodes de multiplexage et des modulations orthogonales. Nous les présentons ici dans le contexte de H_ρ . Un ensemble

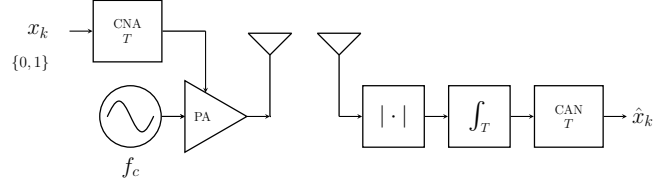


FIGURE 3: Illustration d'un émetteur-récepteur OOK série.

$\psi = \{\psi_n\}_{1 \leq n \leq N}$ de N vecteurs dans H_ρ est orthonormal s'il satisfait $\forall n_1, n_2, \langle \psi_{n_1}, \psi_{n_2} \rangle_\rho = \delta_{n_1, n_2}$. Alors, l'opérateur de synthèse désigne l'isomorphisme linéaire de \mathbb{R}^N sur H_ρ défini par :

$$\varphi : \boldsymbol{\lambda} \mapsto u = \lambda_1 \otimes \psi_1 \oplus \dots \oplus \lambda_N \otimes \psi_N, \quad (10)$$

où $u \in H_\rho$ et $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^N$. Nous pouvons ainsi utiliser la notation $u = (\boldsymbol{\lambda})_\psi$ pour définir le vecteur u par ses coordonnées $\boldsymbol{\lambda}$ relativement à ψ . À l'inverse, étant donné un vecteur $u \in H_\rho$, l'opérateur d'analyse est l'application $\varphi^{-1} : H_\rho \rightarrow \mathbb{R}^N$ qui évalue les coordonnées $\boldsymbol{\lambda}$ de u par rapport à ψ . Par orthonormalité de ψ , nous avons :

$$\lambda_n = \langle u, \psi_n \rangle_\rho. \quad (11)$$

Nous pouvons déduire du Théorème 1 qu'une suite ψ est orthonormale dans H_ρ si et seulement si la suite $\bar{\psi} = \Phi^{-1}(\psi)$ est orthonormale dans \mathcal{L}^2 . Par conséquent, les suites orthonormales connues dans \mathcal{L}^2 peuvent être utilisées pour les modulations d'enveloppe afin de concevoir des modulations orthogonales ou des méthodes de multiplexage.

4 Application aux systèmes sub-THz

L'objectif de cette partie est de donner au lecteur un exemple d'application. Il s'agit en particulier d'illustrer le fait que le cadre algébrique proposé permet de concevoir des modulations d'enveloppe adaptées aux communications sub-THz. Pour cela, l'accent n'est mis ni sur l'évaluation des performances des systèmes décrits ni sur les détails de leur mise en œuvre.

L'une des applications envisagées pour les communications sub-THz est le scénario *kiosque* [2] dans lequel une station base de courte portée fournit aux utilisateurs proches une liaison descendante de très haut-débit. Les architectures des récepteurs se doivent donc de rester simples pour être intégrées dans les terminaux. Même lorsque des modulations de faible complexité sont utilisées, telle une OOK, il reste néanmoins difficile pour un CAN embarqué d'échantillonner plusieurs GHz de bande. Notre objectif est par conséquent de relâcher les contraintes liées aux CAN. Nous montrons qu'il est possible de diviser le taux d'échantillonnage des CAN par deux en multiplexant les symboles à transmettre sur deux formes d'ondes non-négatives orthogonales.

Dans un premier temps, nous décrivons un émetteur-récepteur OOK conventionnel dont l'architecture série est représentée en figure 3. La modulation étudiée est une OOK tels que les symboles $x_k \in \{0, 1\}$ sont transmis sur le CNN décrit par l'équation (2) avec une mise en forme rectangulaire, *i.e.* $s(t) = \sum_k x_k \cdot \Pi(t - kT)$. Le récepteur estime les symboles \hat{x}_k en échantillonnant tous les kT instants le signal $r(t) * \Pi(t)$ comme illustré dans la figure 3. Dans le cas présent, le taux d'échantillonnage des CAN est l'inverse du temps symbole.

Dans un deuxième temps, nous présentons une architecture où le récepteur est parallélisé. La figure 4 illustre le système décrit. Les symboles modulés $\mathbf{x} = (x_{2k}, x_{2k+1}) \in \{0, 1\}^2$ sont multiplexés sur ψ , composé des vecteurs $\psi_1, \psi_2 \in \mathbb{R}^2$. Les symboles transmis $\mathbf{s} = (s_{2k}, s_{2k+1})$ sont ainsi définis par $\mathbf{s} = (\mathbf{x})_\psi$. À titre d'exemple, nous considérons ψ comme étant l'image du code de Hadamard $\bar{\psi} = \{(1, 1), (1, -1)\}$ par l'application $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + 1$. À l'émetteur, le multiplexage de \mathbf{x} vers \mathbf{s} est réalisé par l'opérateur de synthèse introduit dans l'équation (10) :

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= x_{2k} \otimes \psi_1 \oplus x_{2k+1} \otimes \psi_2, \\ &= \Phi(x_{2k} + x_{2k+1}, x_{2k} - x_{2k+1}). \end{aligned} \quad (12)$$

L'émetteur converse une architecture série, cependant, il ne transmet plus $x_k \in \{0, 1\}$ mais $s_k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Au regard du scénario considéré, la complexité de l'émetteur (la station de base) n'est pas un problème. Au récepteur, les symboles peuvent être estimés à partir de la séquence reçue \mathbf{r} par l'opérateur d'analyse défini dans l'équation (11) :

$$\hat{x}_{2k} = \langle \mathbf{r}, \psi_1 \rangle_\rho, \quad \hat{x}_{2k+1} = \langle \mathbf{r}, \psi_2 \rangle_\rho. \quad (13)$$

Néanmoins, la démodulation peut aussi être réalisée dans le domaine analogique puisqu'un code de Hadamard peut être interprété comme la transformée de Fourier discrète sur le groupe additif à deux éléments $\mathbb{Z}/(2)$. Ceci nécessite d'abord d'évaluer $y(t) = \Phi^{-1}(r(t))$ puis de projeter y sur deux signaux, l'un constant et l'autre de fréquence $1/2T$. Illustrée par la figure 4, cette projection est exprimée par :

$$y_1(t) = \int_{2T} y(t) dt, \quad (14)$$

$$y_2(t) = \int_{2T} y(t) \cdot \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{2T}t\right) dt. \quad (15)$$

Le récepteur obtient l'estimation des symboles en échantillonnant ces signaux tous les $2kT$ instants :

$$\hat{x}_{2k} = y_1(2kT), \quad \hat{x}_{2k+1} = y_2(2kT). \quad (16)$$

Notre objectif est atteint. Pour un débit fixé, les symboles sont démodulés par le récepteur à partir de CAN dont le taux d'échantillonnage est deux fois plus lent. Ce raisonnement peut être étendu à N formes d'ondes non-négatives orthogonales pour relâcher davantage les contraintes sur les CAN. Il peut être montré que le multiplexage présenté ci-dessus entraîne une perte de performance, pour atteindre un même taux d'erreur que le système série, le rapport signal sur bruit du système parallèle doit être augmenté d'environ 4.77 dB. Toutefois, ce système n'est pas optimisé et pourrait être amélioré. Nous l'avons présenté ici afin d'illustrer les applications potentielles du cadre introduit aux communications sub-THz. Cet article est un travail d'introduction proposant un cadre analytique pour les modulations numériques d'enveloppe. Il doit donc être suivi d'une étude consacrée à la conception de modulations d'enveloppe performantes. En outre, le cadre introduit représente également un premier pas vers la description analytique des émetteurs-récepteurs polaires [6].

5 Conclusion

Dans cet article, un cadre algébrique a été proposé pour décrire les modulations numériques d'enveloppe. Dans un premier temps, nous avons introduit un espace de Hilbert pour

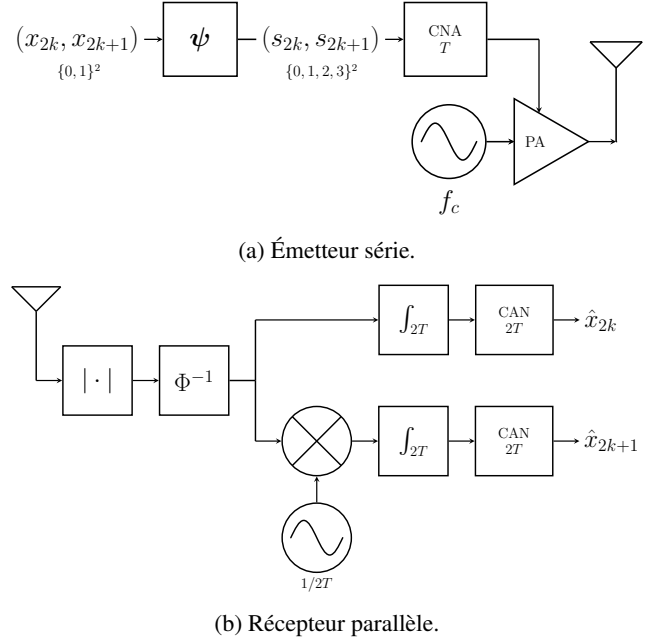


FIGURE 4: Illustration d'un émetteur-récepteur OOK parallèle.

représenter les formes d'ondes non-négatives. Cet espace est défini par transport de structure de l'espace usuel \mathcal{L}^2 , nous permettant ainsi d'exploiter les méthodes classiques de traitement du signal développées pour les formes d'onde réelles. Dans un second temps, nous avons montré que le cadre introduit peut être utilisé pour la conception de modulation d'enveloppe adaptées aux communications sub-THz.

Références

- [1] M. Voicu, D. Pepe, and D. Zito, "Performance and Trends in Millimetre-Wave CMOS Oscillators for Emerging Wireless Applications," *International Journal of Microwave Science and Technology*, vol. 2013, p. 6, 2013.
- [2] J.-B. Doré, Y. Corre, S. Bicaïs, J. Palicot, E. Faussurier, D. Ktésas, and F. Bader, "Above-90GHz Spectrum and Single-Carrier Waveform as Enablers for Efficient Tbit/s Wireless Communications," in *25th International Conference on Telecommunications (ICT'2018)*, Saint-Malo, France, Jun. 2018.
- [3] J. Park, S. Kang, S. V. Thyagarajan, E. Alon, and A. M. Niknejad, "A 260 GHz fully integrated CMOS transceiver for wireless chip-to-chip communication," in *2012 Symposium on VLSI Circuits (VLSIC)*, June 2012, pp. 48–49.
- [4] J. Proakis, *Digital Communications 5th Edition*, ser. McGraw-Hill series in electrical and computer engineering : communications and signal processing. McGraw-Hill, 2007.
- [5] M. S. Islim and H. Haas, "Modulation Techniques for Li-Fi," *ZTE Communications*, vol. 14, pp. 29–40, 04 2016.
- [6] J. Groe, "Polar transmitters for wireless communications," *IEEE Communications Magazine*, vol. 45, no. 9, pp. 58–63, September 2007.
- [7] K. Zhu, *Operator theory in function spaces*. New York etc. : Marcel Dekker, Inc., 1990, vol. 139.