

Interpréter les Fonctions de Fluctuation du DFA et du DMA comme le Résultat d'un Filtrage

Bastien BERTHELOT^{1,2}, Éric GRIVEL³, Pierrick LEGRAND²,
Jean-Marc ANDRÉ³, Patrick MAZOYER¹, Thierry FERREIRA¹

¹THALES AVS France, Campus THALES Merignac

²Université de Bordeaux - IMB UMR CNRS 5251 - INRIA, FRANCE

³Université de Bordeaux - INP Bordeaux - IMS - UMR CNRS 5218, FRANCE

Résumé – Le DFA, acronyme de detrended fluctuation analysis, et le DMA, pour detrending moving average, sont des méthodes largement utilisées pour estimer la régularité d'un signal, car elles ne nécessitent pas d'une expertise avancée en traitement du signal tout en fournissant des résultats acceptables. Dans cet article, notre contribution est double. Nous présentons un cadre d'analyse permettant de comparer ces approches, reposant sur une formulation matricielle du carré de la fonction de fluctuation. De plus, dans le cas de signaux stationnaires au sens large, nous montrons que la moyenne statistique du carré de la fonction de fluctuation peut s'exprimer sans approximation en fonction de la corrélation du signal et par voie de conséquence en fonction de la densité spectrale de puissance du signal (DSP). Cela permet de mettre en lumière les différences entre ces deux méthodes tout en confirmant le fait qu'elles peuvent être vues comme des approches *ad hoc* par ondelettes d'estimation du coefficient de Hurst.

Abstract – The detrended fluctuation analysis (DFA) and the detrending moving average (DMA) are often used to estimate the regularity of the signal, since they do not require a strong expertise in the field of signal processing while providing good results. In this paper, our contribution is twofold. We propose a framework that allows these approaches to be compared. It is based on a matrix form of the square of the fluctuation function. Using the above representation for wide-sense-stationary processes, we show that the statistical mean of the square of the fluctuation function can be expressed from the correlation function of the signal and consequently from its power spectral density, without any approximation. The differences between both methods can be highlighted. It also confirms that they can be seen as *ad hoc* wavelet based techniques to estimate the Hurst exponent.

1 Introduction

Les techniques d'analyse de systèmes dynamiques non-linéaires sont utilisées dans de nombreux champs applicatifs [10]. Elles comprennent les méthodes d'estimation de la régularité d'un signal, qui s'organisent en deux familles :

1. Les estimateurs opérant dans le domaine fréquentiel [14] incluant l'estimateur local de Whittle, la méthode du périodogramme, des approches fondées sur les ondelettes [1] et des techniques semi-paramétriques [3] [9].
2. Les estimateurs opérant dans le domaine temporel dont l'analyse des étendues normalisées (rescaled range analysis), l'analyse des fluctuations (fluctuation analysis) [11] mais aussi l'analyse des fluctuations redressées (detrended fluctuation analysis, DFA) [12]. Cette approche, bien que s'avérant moins performante que les approches par ondelettes, est très souvent utilisée car elle ne requiert pas de connaissances avancées en traitement du signal et en statistiques. De plus, elle a une complexité calculatoire limitée. Elle repose sur le calcul d'une tendance du signal intégré. Dans sa version classique, cette dernière est construite comme la succession de segments le plus souvent

discontinus et de longueur N_{DFA} . Or, il existe de nombreuses manières de déduire des tendances globales, ce qui explique les différentes variantes du DFA présentes dans la littérature. On peut par exemple citer le DFA d'ordre supérieur où les tendances locales sont modélisées par des polynômes d'ordre supérieur à 1, l'analyse fractale adaptative (adaptive fractal analysis, AFA) [13] dont le but est de corriger les discontinuités *a posteriori*, mais aussi la méthode proposée dans [15] qui repose sur un critère des moindres carrés régularisé. Enfin, l'approche appelée "detrended moving average" (DMA) se ramène à effectuer un filtrage passe-bas du signal intégré. Le filtre qu'elle fait intervenir peut être causal ou non, et à réponse impulsionnelle finie ou infinie. Cela donne lieu aux approches dites à moyenne ajustée centrée (centered moving average, CDMA), ou pondérées d'ordre l (weighted moving average of order l , WDMA- l) [17].

Outre de nombreuses publications dans lesquelles ils sont utilisés afin de caractériser des signaux de différents types (biomédical, etc.), le DFA et le DMA sont toujours au cœur de nombreuses études, tant pour le développement de versions rapides [16] que pour des analyses compara-

tives [4–7]. Ainsi, en supposant que le nombre de segments est suffisamment grand et que le signal est stationnaire au sens large et ergodique, puis en effectuant plusieurs approximations, Höll *et al.* [4] expriment le carré de la fonction de fluctuation en fonction d’une estimation de la fonction de covariance normalisée. Kiyono, quant à lui, analyse dans le cas d’une sinusoïde, les réponses en fréquence du DFA [6] et du DMA [7].

Cette communication est complémentaire de ces travaux. Nous proposons une formulation matricielle du carré de la fonction de fluctuation dans le cas du DFA et du DMA. Son espérance mathématique peut alors s’exprimer à partir de la fonction d’autocorrélation du signal s’il est stationnaire au sens large, et ce sans approximation. Cette démarche permet de considérer ces méthodes comme des approches *ad hoc* par ondelettes pour estimer le coefficient de Hurst et offre de nouveaux moyens de comparaison.

2 Rappels sur le DFA et le DMA

2.1 Étapes du DFA et du DMA

Appliquons le DFA comme le DMA sur M échantillons du signal, notés $\{y(m)\}_{m=1,\dots,M}$ [12] [2]. La méthode comprend quatre étapes :

1. Définition du profil, noté $y_{int}(m) = \sum_{i=1}^m (y(i) - \mu_y)$, avec $\mu_y = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M y(m)$ la moyenne de y .

2. Estimation de la tendance du profil.

- Dans le cas du DFA, le profil est décomposé en L segments sans recouvrement et de taille N_{DFA} . Ils sont notés $\{y_{int,l}(n)\}_{l=1,\dots,L}$ avec $n \in \llbracket 1; N_{DFA} \rrbracket$. Puisque M n’est pas nécessairement un multiple de N_{DFA} , les $M - LN_{DFA}$ derniers échantillons du profil ne sont pas considérés. La $l^{\text{ème}}$ tendance locale $x_l(n)$, qui est la tendance associée au $l^{\text{ème}}$ segment $y_{int,l}(n)$, est un segment de droite $\forall l \in \llbracket 1; L \rrbracket$ et $\forall n \in \llbracket 1; N_{DFA} \rrbracket$:

$$x_l(n) = a_{l,1}[(l-1)N_{DFA} + n] + a_{l,0} \quad (1)$$

Puis, $\forall l \in \llbracket 1; L \rrbracket$, le vecteur de paramètres $\theta_l = [a_{l,0} \ a_{l,1}]^T$ est estimé au sens des moindres carrés à partir du profil.

- Dans le cas du DMA, le profil est filtré par un filtre passe-bas. La réponse impulsionnelle de ce filtre est donnée par $h_{DMA}(n) = \frac{1}{N_{DMA}}$ pour $n = 0, \dots, N_{DMA} - 1$. Sa fonction de transfert $H_{DMA}(z)$ est définie par :

$$H_{DMA}(z) = \begin{cases} \frac{1}{N_{DMA}} \frac{1-z^{-N_{DMA}}}{1-z^{-1}} & \text{pour } z \neq 1 \\ 1 & \text{pour } z = 1 \end{cases} \quad (2)$$

La réponse impulsionnelle étant symétrique, il s’agit d’un filtre linéaire à retard de groupe constant correspondant à $N' = \frac{N_{DMA}-1}{2}$ échantillons. Dans la suite, N_{DMA} est pris impair afin que N' soit entier. De plus, bien que N_{DFA} et N_{DMA} n’aient pas le même sens physique, ils sont pris égaux N .

3. Soustraction de la tendance et calcul de la fonction de fluctuation qui est la racine carrée de la puissance du résidu [8]. Elle est notée $F_{\bullet}(N)$, où \bullet désigne la méthode appliquée (DFA ou DMA).

4. Répétition des étapes 2. et 3. pour différentes valeurs de N . En effet, puisque $F_{\bullet}(N) \propto N^{\alpha}$ [11], $\log(F_{\bullet}(N))$ est une fonction affine de $\log(N)$. Cela induit alors la **recherche de la droite de régression et de sa pente** α estimée au sens des moindres carrés. Il suffit de retirer 1 à α pour obtenir le coefficient de Hurst puisque l’intégration du signal ajoute 1.

2.2 Forme matricielle du carré de la fonction de fluctuation

2.2.1 Notations

I_j est la matrice identité de taille j . $\mathbb{1}_{j \times k}$ et $\mathbb{0}_{j \times k}$ sont des matrices de taille $j \times k$ remplies de 1 et de 0 respectivement. $J_j = I_j - \frac{1}{j} \mathbb{1}_{j \times j}$. $diag([\cdot], j)$ est une matrice dont la $j^{\text{ème}}$ diagonale est égale à $[\cdot]$. $diag(\mathbb{1}_{1 \times N-1}, 1)$ est donc une matrice carrée de taille N dont la 1^{ère} diagonale secondaire au dessus de la principale a ses éléments égaux à 1. X_l est un vecteur colonne concaténant les valeurs $\{x_l(n)\}_{n=1,\dots,N}$. Y et Y_{int} sont deux vecteurs colonnes stockant respectivement les échantillons $\{y(n)\}_{n=1,\dots,M}$ et $\{y_{int}(n)\}_{n=1,\dots,M}$. Soit $H_M = \sum_{r=0}^{M-1} diag(\mathbb{1}_{1 \times M-r}, -r)$ la matrice triangulaire inférieure remplie de 1. On a :

$$Y_{int} = [y_{int}(1), y_{int}(2), \dots, y_{int}(M)]^T = H_M J_M Y \quad (3)$$

De plus, $C_{j,k}$ est une matrice de taille (j, M) :

$$C_{j,k} = [\mathbb{0}_{j \times k} \quad I_j \quad \mathbb{0}_{j \times (M-(j+k))}] \quad (4)$$

Les LN premiers éléments de Y_{int} vérifient donc :

$$\begin{aligned} Y_{int}(1 : LN) &= [y_{int}(1), y_{int}(2), \dots, y_{int}(LN)]^T \\ &= C_{LN,0} Y_{int} \stackrel{(3)}{=} C_{LN,0} H_M J_M Y \end{aligned} \quad (5)$$

2.2.2 Forme matricielle : cas du DFA

Sous forme matricielle, $\forall l \in \llbracket 1; L \rrbracket$, la tendance locale (1) s’écrit comme suit :

$$X_l = A_l \theta_l \quad (6)$$

où A_l est une matrice de taille $N \times 2$ dont la première colonne correspond au vecteur $\mathbb{1}_{N \times 1}$ et la seconde est définie par les valeurs $\{(l-1)N + n\}_{n=1,\dots,N}$. Soit le vecteur de paramètres $\Theta_{DFA} = [\theta_1 \dots \theta_L]^T$ de taille $(2L \times 1)$, et A_{DFA} qui est une matrice de taille $(LN \times 2L)$ et bloc-diagonale construite à partir des $\{A_l\}_{l=1,\dots,L}$. Les paramètres définissant les tendances locales vérifient :

$$\arg \min_{\Theta_{DFA}} \left\| C_{LN,0} Y_{int} - A_{DFA} \Theta_{DFA} \right\|^2 \quad (7)$$

Le vecteur des paramètres estimés et le vecteur tendance $T_{DFA} = A_{DFA} \hat{\Theta}_{DFA}$ s’expriment alors ainsi :

$$\begin{cases} \hat{\Theta}_{DFA} = (A_{DFA}^T A_{DFA})^{-1} A_{DFA}^T C_{LN,0} Y_{int} \\ T_{DFA} = A_{DFA} (A_{DFA}^T A_{DFA})^{-1} A_{DFA}^T C_{LN,0} Y_{int} \end{cases} \quad (8)$$

2.2.3 Forme matricielle : cas du DMA

L'application du DMA repose sur un filtrage du profil contenant M échantillons. Au lieu d'utiliser la convolution, nous proposons de pré-multiplier Y_{int} par :

$$M_{filt} = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} \text{diag}(\mathbf{1}_{1 \times M-r}, -r) \quad (9)$$

De plus, le retard de groupe de N' échantillons doit être compensé en introduisant une pré-multiplication par la matrice $M \times M$ suivante :

$$M_{comp} = \text{diag}(\mathbf{1}_{1 \times (M-N')}, N') \quad (10)$$

Le vecteur de tendance est ainsi égal à $M_{comp}M_{filt}Y_{int}$. Cependant, ses N' derniers échantillons sont nuls. De plus, de par le comportement transitoire du filtre, qui correspond aux $N-1$ premiers échantillons, et la compensation du retard introduite ci-dessus, les $N-1-N' = N'$ premiers échantillons ne doivent pas être pris en compte. De ce fait, cela revient à définir un vecteur tendance de taille $M-N+1$ comme suit :

$$\begin{aligned} T_{DMA} &= C_{M-N+1, N'} M_{comp} M_{filt} Y_{int} \quad (11) \\ &\stackrel{(3)}{=} C_{M-N+1, N'} M_{comp} M_{filt} H_M J_M Y \end{aligned}$$

3 Étude comparative

3.1 Lien entre la puissance du résidu et la DSP du processus analysé

Dans la suite, \bullet désigne DFA ou DMA , et S_\bullet la taille du vecteur T_\bullet est définie par $S_{DFA} = LN$ et $S_{DMA} = M - N + 1$. Étant donné (8) et (11), le vecteur résidu vérifie :

$$R_\bullet = C_{S_\bullet, 0} Y - T_\bullet = B_\bullet Y \quad (12)$$

Puis, en posant $\Gamma_\bullet = \frac{1}{S_\bullet} B_\bullet^T B_\bullet$, la puissance du résidu satisfait :

$$\begin{aligned} F_\bullet^2(N) &= \text{Tr}(\Gamma_\bullet Y Y^T) = \sum_{k=1}^{S_\bullet} \Gamma_\bullet(k, k) y^2(k) \quad (13) \\ &+ \sum_{r=1}^{S_\bullet-1} \sum_{k=1}^{S_\bullet-r} [\Gamma_\bullet(k, k+r) + \Gamma_\bullet(k+r, k)] y(k) y(k+r) \end{aligned}$$

En supposant que y est stationnaire au sens large et en prenant l'espérance mathématique de (13), il vient :

$$E[F_\bullet^2(N)] = \sum_{r=-S_\bullet+1}^{S_\bullet-1} \text{Tr}(\Gamma_\bullet, r) R_{y,y}(r) \quad (14)$$

où $R_{y,y}(r)$ désigne la fonction d'autocorrélation du processus y et $\text{Tr}(\Gamma_\bullet, r)$ la trace de la $r^{\text{ème}}$ diagonale de la matrice Γ_\bullet .

A partir du théorème de Wiener-Khintchine et des propriétés de la transformée de Fourier inverse (TF^{-1}),

$E[F_\bullet^2(N)]$ peut s'exprimer en fonction de la DSP de y , notée $S_{yy}(f)$:

$$\begin{aligned} E[F_\bullet^2(N)] &= TF^{-1} \left(\left(\sum_{r=-S_\bullet+1}^{S_\bullet-1} \text{Tr}(\Gamma_\bullet, r) e^{-j2\pi f_n r} \right) S_{yy}(f) \right) \Big|_{\tau=0} \\ &= TF^{-1} \left(\Psi_\bullet(f) S_{yy}(f) \right) \Big|_{\tau=0} \quad (15) \end{aligned}$$

Dans (15), $\Psi_\bullet(f) = \sum_{r=-S_\bullet+1}^{S_\bullet-1} \text{Tr}(\Gamma_\bullet, r) e^{-j2\pi f_n r}$ correspond à la transformée de Fourier de la séquence $\{\text{Tr}(\Gamma_\bullet, r)\}_{r=-S_\bullet+1, \dots, S_\bullet-1}$, et f_n la fréquence normalisée. Regardons les propriétés de cette dernière. Comme elle est réelle et paire, $\Psi_\bullet(f)$ l'est aussi. De plus, puisque Γ_\bullet est une matrice de Gram par construction¹, l'élément $\Gamma_\bullet(i, j)$ situé sur la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de Γ_\bullet correspond au produit scalaire entre la $i^{\text{ème}}$ et la $j^{\text{ème}}$ ligne de $\frac{1}{\sqrt{S_\bullet}} B_\bullet$. En exploitant les propriétés du produit scalaire, il vient :

$$|\Gamma_\bullet(i, j)| \leq |\Gamma_\bullet(i, i)| \quad (16)$$

En corollaire, au regard de (16), on aboutit à :

$$\begin{aligned} |\text{Tr}(\Gamma_\bullet, r)| &\leq \sum_{k=1}^{S_\bullet-r} |\Gamma_\bullet(k, k+r)| \leq \sum_{k=1}^{S_\bullet-r} \Gamma_\bullet(k, k) \\ &\leq \sum_{k=1}^{S_\bullet-1} \Gamma_\bullet(k, k) = \text{Tr}(\Gamma_\bullet, 0) = \text{Tr}(\Gamma_\bullet) \end{aligned}$$

$\text{Tr}(\Gamma_\bullet)$ correspond au carré de la norme de Froebenius de la matrice Γ_\bullet . Elle est nécessairement positive. C'est aussi la valeur maximale de la séquence des traces. Cette séquence peut donc être vue comme la convolution entre un vecteur et sa version retournée. De plus, sa transformée de Fourier $\Psi_\bullet(f)$ est nécessairement positive. Cela revient à dire que le signal y a été filtré par un filtre dont la fonction de transfert $H_{filter}(z)$ vérifie $\Psi_\bullet(f) = |H_{filter}(z)|_{z=\exp(j\theta)}^2$, avec θ la pulsation normalisée.

$E[F_\bullet^2(N)]$ correspond donc à la puissance du signal filtré.

3.2 Illustrations et commentaires

Pour un nombre d'échantillons M donné, intéressons-nous à l'influence de N . En utilisant (15) et les expressions de Γ_{DFA} and Γ_{DMA} déduites dans 3.1, on observe que :

1. La fréquence nulle est systématiquement rejetée, ce qui est cohérent avec l'objectif de retirer la tendance. D'après nos simulations, les ordres de grandeur de $\Psi_{DFA}(0)$ et $\Psi_{DMA}(0)$ sont respectivement de 10^{-14} et 10^{-13} .
2. Les filtres sont passe-haut pour $N=3$ et deviennent passe-bande pour de plus grandes valeurs. Voir Fig. 1.
3. Plus N est grand, plus les résonances des réponses fréquentielles sont aiguës et se déplacent vers les basses fréquences. D'après Fig. 2, les fréquences de résonance et la largeur des bandes passantes à -3 dB, notées $f_{N,\bullet}$ et bw_{\bullet}^2 , tendent à être égales lorsque N augmente.

¹c'est le produit de $\frac{1}{\sqrt{S_\bullet}} B_\bullet$ avec sa transposée

²qui contient les fréquences f telles que $20 \log \frac{\Psi_\bullet(f)}{\Psi_\bullet(f_{N,\bullet})} > -3$

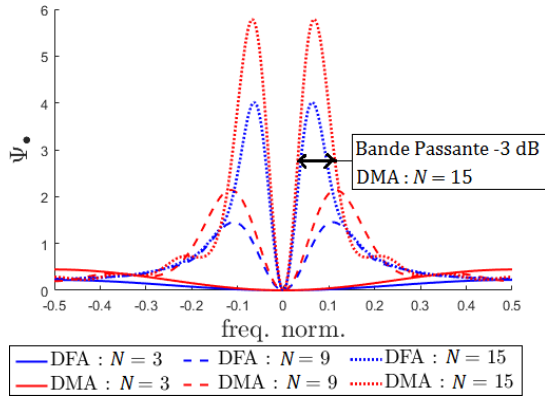


FIG. 1: Comparaison du filtrage induit par le DFA et le DMA pour $N = 3$, $N = 9$ et $N = 15$.

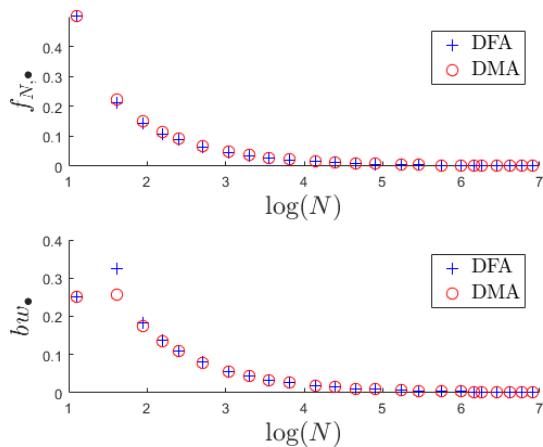


FIG. 2: Fréquences de résonance et largeurs de bande passante à -3 dB des filtres en fonction de $\log(N)$.

4. Pour tout N , $\Psi_{DMA}(f)$ est plus aigu et grand que $\Psi_{DFA}(f)$ pour la plupart de fréquences. Voir Fig. 1 où trois valeurs de N sont présentées pour un souci de clarté. De plus, la distance log-spectrale entre $\Psi_{DMA}(f)$ et $\Psi_{DFA}(f)$ fondée sur une FFT avec complétion de zéros, décroît vers une limite lorsque N augmente. Voir Fig. 3.

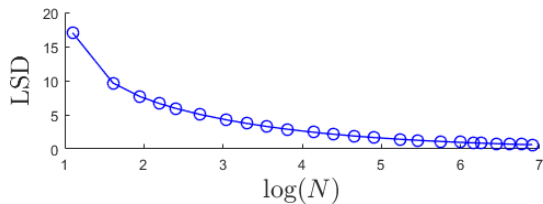


FIG. 3: Évolution de la distance log-spectrale (LSD) entre $\Psi_{DFA}(f)$ and $\Psi_{DMA}(f)$ en fonction de $\log(N)$.

4 Conclusions et perspectives

Le formalisme matriciel présenté permet une étude conjointe des méthodes DFA et DMA. Lorsque les valeurs

de N sont prises grandes, ces méthodes tendent à agir de la même manière sur un signal stationnaire au sens large. Nous préparons actuellement une étude complète intégrant l'AFA et [15], tout en traitant le cas de signaux non-stationnaires, et des applications sur données biomédicales réelles collectées lors de protocoles visant à évaluer la charge cognitive d'un individu.

References

- [1] P. Abry, P. Flandrin, M. S. Taqqu, and D. Veitch. Self-similarity and long-range dependence through the wavelet lens. *Theory and Applications of Long-range Dependence*, pages 527–556, 2003.
- [2] E. Alessio, A. Carbone, G. Castelli, and V. Frappietro. Second-order moving average and scaling of stochastic time series. *The European Physical Journal B*, 27, 2:197–200, 2002.
- [3] J.-M. Bardet. Testing for the presence of self-similarity of gaussian time series having stationary increments. *J. of Time Series Analysis*, 21:497–515, 2000.
- [4] M. Höll and H. Kantz. The relationship between the detrended fluctuation analysis and the autocorrelation function of a signal. *The European Physical Journal B*, 88:327, 2015.
- [5] M. Höll, H. Kantz, and Y. Zhou. Detrended fluctuation analysis and the difference between external drifts and intrinsic diffusionlike nonstationarity. *Physical Review E*, 94:042201, 2016.
- [6] K. Kiyono. Establishing a direct connection between detrended fluctuation analysis and fourier analysis. *Physical Review E*, 92:042925, 2015.
- [7] K. Kiyono. Theory and applications of detrending -operation -based fractal-scaling analysis. *International Conference on Noise and Fluctuations (ICNF)*, pages 1–4, 2017.
- [8] K. Kiyono and Y. Tsujimoto. Nonlinear filtering properties of detrended fluctuation analysis. *Physica A*, 462:807–815, 2016.
- [9] E. Moulines, F. Roueff, and M. S. Taqqu. Central limit theorem for the log-regression wavelet estimation of the memory parameter in the gaussian semi-parametric context. *Fractals*, 15:301–313, 2007.
- [10] S. K. Nayak, A. Bit, A. Dey, B. Mohapatra, and K. Pal. A review on the nonlinear dynamical system analysis of electrocardiogram signal. *J. of Healthcare Engineering*, (2):1–19, 2018.
- [11] C. K. Peng, S. V. Buldyrev, A. L. Goldberger, S. Havlin, F. Sciortino, M. Simons, and H. E. Stanley. Long-range correlations in nucleotide sequences. *Nature*, 356:168–170, 1992.
- [12] C. K. Peng, S. V. Buldyrev, S. Havlin, M. Simons, H. E. Stanley, and A. L. Goldberger. Mosaic organization of DNA nucleotides. *Physical Review E*, 49, (2):1685–1689, 1994.
- [13] M. A. Riley, S. Bonnette, N. Kuznetsov, S. Wallot, and J. Gao. A tutorial introduction to adaptive fractal analysis. *Frontiers in Physiology*, 3:371, 2012.
- [14] R. Sun. Fractional order signal processing: techniques and applications. *Thesis of Master of science in electrical Engineering, Utah State University*, 2007.
- [15] M. P. Tarvainen, P. O. Ranta-aho, and Pasi A. Karjalainen. An advanced detrending method with application to hrv analysis. *IEEE Trans. on Biomedical Engineering*, 49, 2:172–175, 2002.
- [16] Y. Tsujimoto, Y. Miki, S. Shimatani, and K. Kiyono. Fast algorithm for scaling analysis with higher-order detrending moving average method. *Physical Review E*, 93 (5):053304, 2016.
- [17] L. Xu, P. Ch. Ivanov, K. Hu, Z. Chen, A. Carbone, and H. E. Stanley. Quantifying signals with power-law correlations: A comparative study of detrended fluctuation analysis and detrended moving average techniques. *Physical Review E*, 71, 5:051101, 2005.