

# Une approche statistique de l'optimisation de la fonction d'ambiguïté en radar

Zouhair BEN JEMAA<sup>1</sup>, Sylvie MARCOS<sup>2</sup>, Safya BELGHITH<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire RISC, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis,  
Campus Universitaire Farhat Hached el Manar, Le Belvédère 1002 Tunis, Tunisie

<sup>2</sup>Laboratoire L2S, CNRS UMR8506  
CentraleSupélec, bt. Bréguet, 3 rue Joliot-Curie, 91192 Gif-sur-Yvette cedex, France

`zouhair.benjemmaa@enit.rnu.tn`, `sylvie.marcos@l2s.centralesupelec.fr`, `safya.belghith@enit.utm.tn`

**Résumé** – Dans cette communication nous présentons une analyse statistique pour l'optimisation des codes de phase utilisés en radar. Nous considérons, en effet, chaque code comme étant la réalisation d'une variable aléatoire et nous déterminons la densité de probabilité qui permet d'avoir la meilleure fonction d'ambiguïté possible. Nous montrons donc quelles propriétés statistiques doivent vérifier les codes et nous analysons plus particulièrement quelques exemples. Enfin, des simulations montrent l'accord entre les propriétés statistiques établies et le bon comportement de la fonction d'ambiguïté.

**Abstract** – In this paper we present a statistical analysis for the optimization of the phased codes used in radar. Indeed, we consider each code as being the realization of a random variable and we determine the probability density which makes it possible to have the best possible ambiguity function. We therefore show which statistical properties must check the codes and we analyze more particularly some examples. Finally, simulations show the agreement between the established statistical properties and the good behavior of the ambiguity function.

## 1 Introduction

La recherche de codes conduisant à la "meilleure" fonction d'ambiguïté (FA) possible, en particulier en termes de lobes secondaires bas, a déjà fait l'objet de nombreux travaux dans la littérature mais reste un problème non totalement résolu et toujours d'actualité notamment en radar MIMO [1]. Certains travaux s'inspirent du domaine des communications multi-utilisateurs [2], d'autres visent à synthétiser des séquences en optimisant certains critères concernant leurs fonctions d'auto- et d'inter-corrélation [3], [4], [5]. Cependant, la FA dépend également de paramètres concernant l'impulsion de mise en forme, le diagramme d'émission, les fréquences et distances d'analyse et de cibles potentielles. De plus, les codes générés par les méthodes existantes présentent des inconvénients. Soit ils sont de longueur limitée, soit ils nécessitent des calculs importants.

Dans cette communication, nous proposons une approche statistique pour la recherche de codes. Pour cela nous considérons chaque code comme la réalisation d'une variable aléatoire et nous établissons les densités de probabilité (ddp) qui permettent d'aboutir à une bonne FA. Les résultats trouvés par le calcul sont ensuite validés par simulations. Dans la section 2, nous introduisons brièvement

la fonction à optimiser dont dépend la FA. Notons que cette étude peut-être vue comme une première étape en attendant de traiter le cas plus général et plus difficile du MIMO dans un travail ultérieur. La section 3 est consacrée à l'analyse de l'influence de la distribution de la variable aléatoire générant les séquences sur la FA à Doppler nul. Dans la section 4 nous expliquons comment le résultat précédent peut être étendu à la FA pour une fréquence Doppler quelconque. La section 5 illustre à travers des simulations les résultats obtenus. Nous concluons et donnons quelques perspectives dans la section 6.

## 2 Rappel sur la fonction d'ambiguïté

La FA d'un système radar est la sortie bidimensionnelle, pour un temps d'arrivée  $\tau$  et une fréquence Doppler  $\nu$ , d'un filtre adapté au signal émis et s'écrit :

$$A(\tau, \nu) = \int s(t) s^*(t + \tau) e^{j2\pi\nu t} dt \quad (1)$$

où la forme d'onde d'émission  $s(t)$  est donnée par :

$$s(t) = \sum_{p=1}^{N_c} w_p u(t - (p-1)T_c) \quad (2)$$

$N_c$  est la longueur de la séquence codée  $\{w_p\}_{p=1, N_c}$  et  $u(t)$  est la fonction de mise en forme de support  $[0, T_c]$ .

(1) devient donc :

$$A(\tau, \nu) = \sum_{p=1}^{N_c} \sum_{l=1}^{N_c} w_p w_l^* \tilde{\gamma}_{p,l}^u(\tau, \nu) \quad (3)$$

$$\tilde{\gamma}_{p,l}^u(\tau, \nu) = \int u(t - (p-1)T_c) u(t - (l-1)T_c + \tau) e^{j2\pi\nu t} dt \quad (4)$$

Après calculs, la FA pour  $\tau = kT_c$  devient :

$$A(kT_c, \nu) = R_w(\nu, k) \alpha(\nu) \quad (5)$$

$$\alpha(\nu) = \int_0^{T_c} |u(t)|^2 e^{j2\pi\nu t} dt \quad (6)$$

En supposant  $u(t)$  impulsion rectangulaire et  $\nu$  plus petite que la largeur de bande de la forme d'onde, on peut supposer que  $|\frac{\sin \pi\nu T_c}{\pi\nu}| \simeq T_c$ . On en déduit que l'optimisation de la FA revient à analyser :

$$|R(k, \nu)| = \left| \sum_{p=1}^{N_c-k} \omega_p \omega_{p+k}^* e^{j\pi\nu(p-1)T_c} \right| \quad (7)$$

où  $\omega_p = e^{j\pi x_p}$ ,  $x_p$  étant une variable aléatoire prenant des valeurs dans l'intervalle  $[-1, 1]$ . L'expression (7) devient

$$|R(k, \nu)| = \left| \sum_{p=1}^{N_c-k} e^{j\pi z_p(k)} \right| \quad (8)$$

avec

$$z_p(k) = x_p - x_{p+k} + \nu(p-1)T_c \quad (9)$$

Ainsi  $|R(k, \nu)|$  pour  $k \neq 0$  contient l'information sur les lobes secondaires de la FA. Optimiser les codes d'émission  $\{x_p\}$  consiste donc à minimiser  $|R(k, \nu)|$ ,  $\forall \nu$  et  $\forall k \neq 0$ .

Dans la section suivante nous commençons par étudier les propriétés statistiques de la variable aléatoire

$$R = |Z_k| = \left| \sum_{p=1}^{N_c-k} e^{j\pi y_p} \right| \quad (10)$$

en fonction de la distribution de la variable aléatoire  $y_k$ . Ensuite, dans la section 4, nous étudierons l'influence sur la variable  $R$  de (10) du terme déterministe  $\nu$  dans (9).

### 3 Propriétés statistiques de $|Z_k|$

Supposons les  $y_p$  *i.i.d*; soient  $\alpha$  (resp  $\beta$ ) la moyenne de la partie réelle (resp imaginaire) de  $Z_k$ ,  $s_1$  et  $s_2$  leurs variances respectives. La distribution de  $y_p$  est supposée symétrique par rapport à 0 et donc  $\beta = 0$ ; soit

$$\begin{cases} X = \frac{R}{\sqrt{s_1+s_2}} \\ B = \frac{\alpha}{\sqrt{s_1+s_2}} \\ K = \sqrt{\frac{s_2}{s_1}} \end{cases} \quad (11)$$

Il a été montré dans [6] que la ddp de la variable aléatoire normalisée  $X$  dépend légèrement de  $K$  et dépend fortement de  $B$ . Pour  $K = 1$  cette ddp est

$$f_X(x) = 2xe^{-(B^2+x^2)} I_0(2Bx) \quad (12)$$

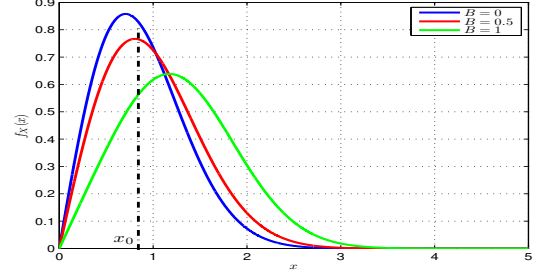


FIGURE 1 – Distribution  $f_X(x)$  pour  $K = 1$  et pour différentes valeurs de  $B$

où  $I_0(\cdot)$  est la première fonction de Bessel modifiée de première espèce. Nous avons représenté sur la figure 1 la ddp (12) pour  $B = 0; 0.5; 1$ ; on peut voir que pour  $B = 0$  la ddp est la meilleure dans le sens où pour  $x_0$  fixé la probabilité  $X < x_0$  est la plus grande pour  $B = 0$ . Cette ddp est appelée la distribution de Rayleigh et sera considérée comme la référence dans ce travail; l'optimalité de notre problème consistant à rendre la ddp de  $R$  la plus proche possible d'une loi de Rayleigh.

#### 3.1 Cas où $y_p$ est uniformément répartie dans $[-a, a]$ avec $a \leq 1$

On obtient la distribution de Rayleigh pour  $a = 1$ ; en effet dans ce cas seulement,  $\alpha = 0$  et  $s_1 = s_2 = (N_c - k)/2$  et donc  $B = 0$ . Dans ce cas il est facile de montrer que la moyenne et la variance de  $R = |Z_k|$  sont :

$$\begin{cases} E = \frac{\sqrt{(s_1+s_2)\pi}}{2} \\ V = (1 - \frac{\pi}{4})(s_1 + s_2) \end{cases} \quad (13)$$

#### 3.2 Cas où $y_p$ est uniformément répartie dans $[-a, a]$ avec $a > 1$

Dans ce cas et du fait de la périodicité de  $e^{j\pi y_p}$ , on définit sur  $[-1, 1]$  la variable aléatoire enroulée  $\tilde{y}_p$  correspondant à  $y_p$  et vérifiant  $e^{j\pi y_p} = e^{j\pi \tilde{y}_p}$ , comme par exemple celle représentée par la courbe rouge sur la Figure 2. Ainsi les propriétés statistiques de  $|Z_k|$  seront les mêmes pour  $y_p$  et  $\tilde{y}_p$ . Soit  $[a]$  la partie entière de  $a$ ;  $y_p$  étant uniformément répartie sur  $[-a, a]$  avec  $a > 1$ , on montre que  $f_{\tilde{y}_p(y)}$  peut avoir deux expressions suivant  $[a]$ .

– si  $[a]$  est pair,  $[a] = 2l$

$$f_{\tilde{y}_p(y)} = \begin{cases} \frac{l}{a} & \text{si } a - 2l \leq |y| \leq 1 \\ \frac{2l+1}{2a} & \text{si } 0 \leq |y| \leq a - 2l \end{cases} \quad (14)$$

– si  $[a]$  est impair,  $[a] = 2l + 1$

$$f_{\tilde{y}_p(y)} = \begin{cases} \frac{2l+1}{2a} & \text{si } 0 \leq |y| \leq -a + 2l + 2 \\ \frac{l+1}{a} & \text{si } -a + 2l + 2 \leq |y| \leq 1 \end{cases} \quad (15)$$

Sur la Figure 2, nous avons représenté les ddp de  $f_y(y)$  et  $f_{\tilde{y}}(y)$  dans les deux cas  $[a]$  pair et impair. Dans les deux cas la ddp uniforme est obtenue lorsque  $a$  est un entier.

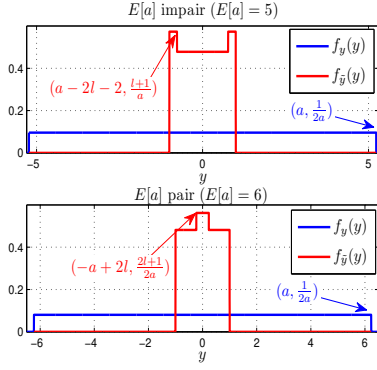


FIGURE 2 –  $f_y(y)$  et  $f_{\tilde{y}}(y)$  dans le cas d'une distribution uniforme

### 3.3 Distribution de $y_p$ triangulaire sur $[-a, a]$

Une telle distribution est obtenue lorsque  $x_p$  et  $x_{p+k}$  dans (9) sont uniformément réparties et  $\nu = 0$ . On montre que la distribution  $f_{\tilde{y}}(y)$  de la variable aléatoire enroulée correspondant à  $y_p$  peut avoir deux expressions suivant  $[a]$  :

— si  $[a]$  est pair,  $[a] = 2l$

$$f_{\tilde{y}}(y) = \begin{cases} \frac{(2l+1)a-2l(l+1)-|y|}{a^2} & \text{si } 0 \leq |y| \leq a-2l \\ \frac{2la-2l^2}{a^2} & \text{si } a-2l \leq |y| \leq 1 \end{cases} \quad (16)$$

— si  $[a]$  est impair,  $[a] = 2l+1$

$$f_{\tilde{y}}(y) = \begin{cases} \frac{(2l+1)a-2l(l+1)-|y|}{a^2} & \text{si } 0 \leq |y| \leq 2l+2-a \\ \frac{2(l+1)a-2(l+1)^2}{a^2} & \text{si } 2l+2-a \leq |y| \leq 1 \end{cases} \quad (17)$$

Dans les deux cas, la ddp de  $\tilde{y}$  admet l'allure de la Figure 3 et on obtient la loi uniforme lorsque  $a$  est un entier  $> 1$ .

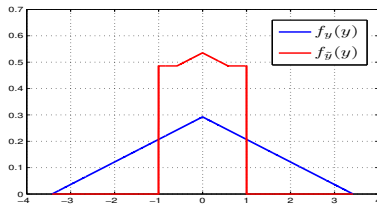


FIGURE 3 –  $f_y(y)$  et  $f_{\tilde{y}}(y)$  dans le cas d'une distribution triangulaire

### 3.4 Distribution de $y_p$ gaussienne centrée

Une telle distribution est obtenue lorsque  $x_p$  et  $x_{p+k}$  dans (9) sont aussi gaussiennes centrées et  $\nu = 0$ . Lorsque  $f_y(y)$  est gaussienne,  $f_{\tilde{y}}(y)$  a une des deux allures représentées sur la Figure 4, suivant la variance  $\sigma^2$  :

—  $\sigma^2 < 1$  on obtient une ddp qui diffère beaucoup de la ddp uniforme, (Figure 4 pour  $\sigma^2 = \frac{1}{3}$ ).

—  $\sigma^2 \geq 1$ , la ddp est proche de la ddp uniforme sur  $[-1, 1]$ .

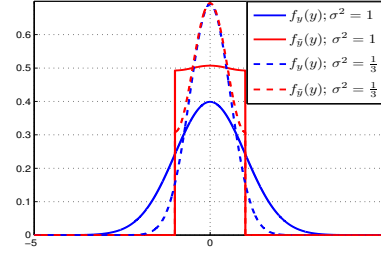


FIGURE 4 –  $f_y(y)$  et  $f_{\tilde{y}}(y)$  dans le cas d'une distribution gaussienne centrée

### 3.5 Histogrammes de $|Z_k|$

Sur la Figure 5, nous avons représenté les histogrammes normalisés de  $|Z_k|$  dans le cas  $N_c = 1023$  et pour les distributions considérées; nous avons représenté aussi en rouge la distribution de Rayleigh. Ils sont calculés à partir de 10000 réalisations de  $y_p$ . Notons que d'après (13) la moyenne et la variance sont  $E \cong 28$  and  $V \cong 219$ . On retrouve que :

- les distributions uniformes sur  $[-n, n]$ ,  $n$  étant un entier non nul et triangulaires sur  $[-n, n]$ ,  $n \geq 2$  permettent d'avoir un  $|Z_k|$  qui suit la loi de Rayleigh ;
- même chose pour les distributions gaussiennes centrées de variance supérieure ou égale à 1 ;
- dans les autres cas, on obtient une distribution très différente de celle de Rayleigh.

Il s'ensuit que pour espérer avoir  $|Z_k|$  petit, ce qui correspondrait à avoir des lobes secondaires faibles, il vaut mieux être dans les deux premiers cas.

## 4 Fonction d'ambiguïté

La présence du terme déterministe  $\nu(p-1)T_c$  dans l'expression (9) rend difficile l'analyse des statistiques de  $|Z_k|$  (8) mais on peut quand même faire l'analyse suivante. Soit  $A$  la moyenne  $E[e^{j\pi y_p}]$ ,  $y_p$  étant *i.i.d.*, alors

$$E[Z_k(\nu)] = A \sum_{p=1}^{N_c-k} e^{j\pi(p-1)\nu T_c} \quad (18)$$

Si  $\nu T_c = 2q$ ,  $q$  entier,  $E[Z_k(\nu)] = A(N_c - k)$ . Si  $A = 0$  la partie réelle de  $Z_k(\nu)$  est nulle et donc  $\alpha = 0$  et  $B = 0$ , condition pour que  $|Z_k|$  suive la loi de Rayleigh [6].

Dans le cas  $\nu T_c \neq 2q$  :

$$E[Z_k(\nu)] = A \frac{e^{j\pi(N_c-k)\nu T_c/2} \sin[\pi(N_c - k)\nu T_c/2]}{e^{j\pi\nu T_c/2} \sin[\pi\nu T_c/2]} \quad (19)$$

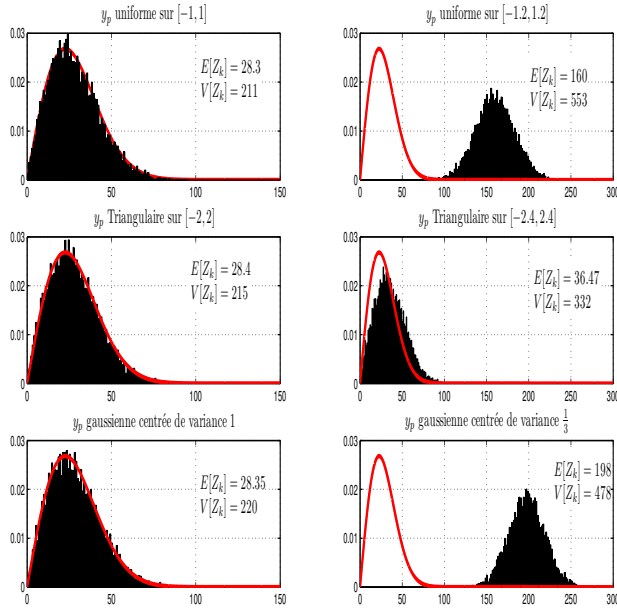


FIGURE 5 – Histogrammes de  $Z_k$

Puisque  $|\sin[\pi(N_c - k)\nu T_c/2]| \leq (N_c - k)|\sin[\pi\nu T_c/2]|$ ,

$$|Re(E[Z_k(\nu)])| \leq |A|(N_c - k) \quad (20)$$

Dans ce cas aussi si  $A = 0$ ,  $Re(E[Z_k(\nu)])$  est nulle, d'où  $\alpha = 0$  et  $B = 0$  et  $|Z_k|$  suit encore la loi de Rayleigh. Il s'ensuit que pour optimiser (8) il suffit de l'optimiser pour  $\nu = 0$  et donc d'optimiser  $|Z_k|$  de (10).

## 5 Simulation

Pour le calcul de la FA nous avons pris  $N_c = 1023$ . Une séquence  $x_p$  uniformément répartie sur  $[-a, a]$  donne une séquence  $y_p = x_{p+k} - x_p$  triangulaire sur  $[-2a, 2a]$ , ce cas correspond à  $f_{\tilde{y}(y)}$  de la Figure 3; ainsi le cas triangulaire sur  $[-2, 2]$  (resp sur  $[-2.4, 2.4]$ ) de la figure 5 est obtenu par  $x_p$  uniformément répartie sur  $[-1, 1]$  (resp sur  $[-1.2, 1.2]$ ). De même  $x_p$  gaussienne centrée de variance  $\sigma^2$  donne une  $y_p$  gaussienne de variance  $2\sigma^2$ ; le cas gaussien de variance 1 (resp  $\frac{1}{3}$ ) de la figure 5 est obtenu par  $x_p$  gaussienne de variance  $\frac{1}{2}$  (resp  $\frac{1}{6}$ ). Pour ces cas nous avons calculé la moyenne sur 50 réalisations du pic maximal des lobes secondaires de la FA noté P (la FA est normalisée pour que le maximum de son lobe principal soit égal à 1). Les résultats sont donnés sur le tableau suivant.

$x_p$	$U_{[-1,1]}$	$U_{[-1.2,1.2]}$	$G_{\sigma^2=1}$	$G_{\sigma^2=\frac{1}{6}}$
$y_p$	$T_{[-2,2]}$	$T_{[-2.4,2.4]}$	$G_{\sigma^2=2}$	$G_{\sigma^2=\frac{1}{3}}$
$\tilde{y}_p$	$U_{[-1,1]}$	Fig.3	Fig.4	Fig.4
P(dB)	-10.15	-10.02	-9.914	-6.23

On peut voir que les trois premiers cas du tableau qui correspondent ou sont très proches de la loi uniforme donnent de faibles pics maximaux, alors que le dernier cas correspondant à la loi gaussienne en pointillés sur la Figure 4 et qui diffère beaucoup de la loi uniforme donne un pic maximal élevé.

## 6 Conclusion

Dans ce travail nous avons adopté une approche statistique pour la recherche de séquences permettant d'optimiser la FA radar. En considérant les séquences comme étant des réalisations d'une variable aléatoire, nous avons pu trouver une condition sur la ddp de cette variable aléatoire permettant de minimiser le pic maximal des lobes secondaires de la FA du système radar. Notons que l'analyse réalisée dans ce papier constitue une première étape d'un travail plus complet sur le cas du radar MIMO qui sera fait ultérieurement et où il s'agira de rechercher avec une approche statistique des familles de séquences. Un travail concernant la construction de séquences ayant les propriétés établies ici à partir de séquences chaotiques est également en cours.

## Références

- [1] J. Li and P. Stoica, MIMO radar signal processing. John Wiley and Sons Inc., New Jersey, 2009.
- [2] H. Sun, F. Brigui and M. Lesturgie, "Analysis and comparison of MIMO radar waveforms," 2014 International Radar Conference, Lille, France, August 13-17 october 2014.
- [3] H. He, P. Stoica and J. Li, "Designing unimodular sequence sets with good correlations - including an application to MIMO radar," IEEE Trans. on signal processing, vol. 57, N11 pp. 4391-4405, November 2009.
- [4] F. Arlery, R. Kassab, U. Tan and F. Lehmann, "Efficient gradient method for locally optimizing the periodic/apperiodic ambiguity function", Proceedings of IEEE Radar Conference (RadarConf), Philadelphia, PA, USA, 2016.
- [5] U. Tan, C. Adnet, O. Rabaste, F. Arlery, J-P. Ovarlez and J-P. Guyvarch, "Phase code optimization for coherent MIMO radar via a gradient descent," 2016 IEEE Radar Conference (RadarConf), Philadelphia, PA, United States, May 2016.
- [6] P. Beckmann, "Statistical Distribution of the Amplitude and the Phase of a Multiply Scattered Field," Journal of Research of the National Bureau of Standards-Radio Propagation, vol. 66D, No. 3, pp. 231-240, Mai-Juin 1962.