

Modulation GMSK codée spatialement couplée

Tarik BENADDI¹, Charly POUILLIAT²

¹IMT Atlantique, ISAE-DEOS, LabSTICC UMR 6285

²ENSEEIH, IRIT UMR 5505

tarik.benaddi@imt-atlantique.fr, charly.poulliat@enseeiht.fr

Résumé – Nous proposons une méthode pour coupler spatialement une modulation GMSK concaténée en série avec un code convolutif en assurant la continuité de la phase. Nous montrons ensuite que ce schéma démontre des seuils asymptotiques très compétitifs par rapport à des codes LDPC optimisés. Ensuite, au vu des résultats obtenus, nous observons que le seuil du schéma obtenu sature vers une valeur très proche du seuil donné par le théorème de l’aire sous la courbe EXIT.

Abstract – We propose a method to spatially couple a concatenated serial scheme composed of an external convolutional code and a GMSK modulation respecting the phase continuity. Through asymptotic analysis, we show that this scheme shows very competitive thresholds compared to carefully optimized codes such as LDPC codes. Finally, in view of the obtained results, we observe that the threshold of our scheme saturates to a value very close to the threshold given by the area under the EXIT curve theorem

1 Introduction

La modulation à déplacement minimum Gaussien (GMSK) est une modulation de phase non linéaire à enveloppe constante [1]. Grâce à son enveloppe constante, elle peut être utilisée avec des amplificateurs intégrés qui fonctionnent à proximité du régime de saturation ou dans des canaux de propagation non linéaires. La GMSK peut être vue comme une variante de la modulation à déplacement minimum (MSK), où une version filtrée gaussienne de la séquence d’information est appliquée à un modulateur MSK. Le filtre gaussien permet d’augmenter l’efficacité spectrale de la MSK. En raison de ces caractéristiques intéressantes, la GMSK a été considérée dans divers applications et standards : GSM [2], Bluetooth[3], l’AIS [4] et candidate pour la 5G [5].

Les codes Low Density Parity check (LDPC) spatialement couplés sont des codes relativement récents qui sont obtenus en couplant des codes blocs LDPC. Ils présentent de très bons seuils dans différents canaux grâce au phénomène dit de saturation. Pour le canal d’effacement binaire (BEC), [6] a prouvé que le seuil d’un décodeur de type propagation de croyance (BP) converge vers le seuil du décodeur maximum *a posteriori* (MAP) du code sous-jacent. Récemment, différents articles ont étendu le couplage aux turbo-codes. Dans [7], les auteurs ont étudié les codes convolutifs tressés et concaténés et ont montré que la distance minimale de l’ensemble couplé est limitée par la distance minimale de l’ensemble sous-jacent. Dans [8], les auteurs ont examiné les résultats de la littérature et ont présenté une description unifiée. Récemment, [9] a fait remarquer que le couplage de schémas concaténés peut être considéré comme le couplage spatial d’un code LDPC généralisé de type multi-edge.

Coupler une GMSK codée n’est pas directe car il faut conserver la continuité de la phase. Nous proposons une

méthode pour coupler spatialement une GMSK codée en assurant cette continuité. Puis, afin de permettre une exécution parallélisable du décodage par l’algorithme BP, nous proposons une initialisation adéquate du décodage au niveau du treillis de la GMSK. Nous étudierons également la performance asymptotique du système obtenu. Enfin, nous montrerons que le seuil de décodage de la GMSK codée spatialement couplée (SC-GMSK) s’approche du seuil donné par le théorème de l’aire sous la courbe EXIT [10]. Enfin, nous montrerons que, asymptotiquement, des résultats similaires aux codes LDPC peuvent être obtenus avec le simple code convolutif (5, 7).

2 Description du système

L’étude proposée dans cet article s’applique à une GMSK codée (C-GMSK) avec un code convolutif tel que décrit dans fig. 1. Au début, une séquence de k -bits $s \in \{0, 1\}^k$ est codée avec un code convolutif \mathcal{CC} , en un mot de code $\mathbf{u} \in \{0, 1\}^n$ (son rendement est $R = k/n$). Sans perte de généralité, nous considérons dans cet article une GMSK binaire de mémoire 1 et un code convolutif de rendement 1/2 donné par la représentation octale (5, 7). La séquence obtenue \mathbf{u} est alors entrelacée par π pour obtenir \mathbf{v} . Cette dernière est ensuite modulée par le modulateur GMSK pour obtenir :

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cos \left(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{2} \sum_{i=0}^{N-1} v_i q(t - iT) + \theta_0 \right)$$

où $q(t) = \int_0^t \frac{1}{T} \left[Q \left(2\pi \mathcal{B} \frac{\tau - T/2}{\sqrt{\ln(2)}} \right) - Q \left(2\pi \mathcal{B} \frac{\tau + T/2}{\sqrt{\ln(2)}} \right) \right] d\tau$ avec $Q(t) = \frac{1}{2\pi} \int_t^{+\infty} \exp \left(-\frac{\tau^2}{2} \right) d\tau$, θ_0 est la phase initiale, T la

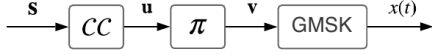


FIGURE 1 – Emetteur GMSK codée

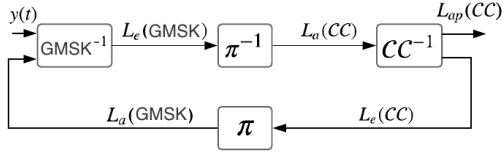


FIGURE 2 – Turbo-récepteur GMSK

période symbole, E_s l'énergie d'un symbole, l'impulsion de fréquence gaussienne, f_0 la fréquence porteuse et \mathcal{B} un paramètre de la modulation (vaut $0.3/T$ pour le GSM).

À la réception, un turbo-récepteur est envisagé. Le décodeur GMSK, vu comme une modulation à phase continue [11], à entrée et sortie souple (SISO) peut être dérivé suivant la décomposition de Rimoldi [1]. En effet, cette décomposition divise le modulateur de la GMSK en une concaténation série d'un treillis et d'un banc de filtres. En ce qui concerne la GMSK considérée ici, le treillis de Rimoldi est formé par 2 états et le banc de filtres se compose de 4 impulsions différentes (cf. [1, Fig. 7] pour plus de détails). Le signal transmis $x(t)$ traverse un canal de bruit blanc gaussien additif (AWGN) ayant une densité spectrale de puissance $N_0/2$.

Au niveau du récepteur, le décodage turbo se déroule comme suit : d'abord, les sorties du banc de filtre adaptés sont échantillonnées tous les T . Ces sorties constituent une statistique suffisante [12] pour estimer les bits envoyés via un algorithme de type BCJR [13] effectué sur le treillis de Rimoldi. Ensuite, les logarithmes de vraisemblance (LLRs) obtenus des bits démodulés, $L_e(\mathcal{G}MSK)$ sont utilisés, après désentrelacement, comme LLRs *a priori*, $L_a(CC)$, par le décodeur externe CC^{-1} . En exécutant à nouveau un algorithme BCJR sur le treillis du code CC , on obtient les LLR correspondant aux bits codés, désignés ici par $L_e(CC)$. Enfin, ces derniers forment les LLRs *a priori* des bits démodulés, dénotés $L_a(\mathcal{G}MSK)$ du SISO $\mathcal{G}MSK^{-1}$. Ceci conclut une itération turbo. Après un nombre fixe d'itérations, les bits d'information décodés sont estimés à partir des LLRs *a posteriori* des bits décodés $L_{ap}(CC)$. Le turbo-récepteur avec les messages LLR échangés est représenté dans fig. 2.

3 GMSK spatialement couplée

3.1 Couplage spatial

Ici nous montrons comment on peut coupler fig. 1. Bien que la méthode proposée ici soit dans l'esprit équivalente à [9], cette dernière ne peut être appliquée directement dans notre cas. Une plus grande prudence s'impose tant au niveau de l'émetteur que du récepteur, faute de quoi la modulation ne conservera pas l'une de ses principales caractéristiques :

la continuité de phase.

Les turbo-codes spatialement couplés sont obtenus en exécutant la règle suivante : (1) les bits encodés \mathbf{u} sont divisés en $m_s + 1$ paquets, (2) le graphe obtenu est ensuite dupliqué L fois et enfin (3) on interconnecte les graphes L en permutant les paquets de même type. Cette permutation est décrite par la matrice de couplage $B = [b_0, b_1, \dots, b_{m_s}]$, où b_i ($\sum_{i=0}^{m_s} b_i = 1$) représente la fraction de bits (largeur des paquets) reliant la copie ℓ à la copie $(\ell + i)$. L désigne la longueur de couplage et m_s la mémoire du syndrome. Un exemple de cette construction est illustré dans fig. 3.

3.2 Couplage de la GMSK

Comme indiqué précédemment, l'application de [9] à la GMSK ne garantit pas la continuité de la phase. Les encodages effectués par les treillis de phase des différentes étapes se font indépendamment : ils commencent tous à partir du même état σ_0 mais terminent à des états différents selon la séquence \mathbf{v} à leur entrée. Pour palier ce problème, le modulateur de l'étage ℓ doit communiquer son état final à son prochain voisin $(\ell + 1)$, afin que ce dernier puisse encoder à partir de ce dernier, et ainsi garder une phase continue. Le schéma obtenu est représenté dans fig. 3.

Cette procédure n'entraîne pas d'augmentation de la complexité par rapport aux modulateurs GMSK classiques, car nous ne faisons que modifier l'état de démarrage du treillis GMSK en fonction de l'état final du précédent. Cependant, cette procédure, implémentée sous cette forme, entraînera un délai d'encodage supplémentaire, puisque le modulateur ℓ doit attendre que l'encodage de l'étape précédente soit terminé avant d'obtenir l'état dans lequel il doit commencer. Afin de minimiser ce délai, l'état communiqué peut en effet être déduit *a priori* à partir des bits d'information $\{\mathbf{v}_n\}$ uniquement avant que les modulateurs GMSK des différents étages ne commencent à encoder. Ceci est atteint en utilisant la définition d'état du treillis de la GMSK [1]. Ainsi, l'état final du modulateur GMSK de chaque étage est donné par $\sigma_f = \left[\sum_{i=0}^{n-1} v_i \right] \bmod 2$.

Au niveau du récepteur, il est bien connu que, pour l'algorithme BCJR, la probabilité de la transition, au niveau du treillis de la GMSK, ($\sigma_{n-1} = \sigma_1, \sigma_n = \sigma_2$) peut être factorisée comme $p(\sigma_1, \sigma_2, y(t)) = \alpha_{n-1}(\sigma_1) \gamma_n(\sigma_1, \sigma_2) \beta(\sigma_2)$ [13]. Dans notre schéma, les états de début et de fin de chaque étage ne sont pas connus par le récepteur (à l'exception de l'état de début du premier étage) et doivent donc être estimés par le décodeur. Pour en tenir compte, les récursions avant et arrière doivent être initialisées avec la même probabilité $\alpha_0(\sigma_i) = \beta_N(\sigma_i) = \frac{1}{2}$, $\forall i \in \{0, 1\}$.

3.3 Terminaison

Dans fig. 3, nous nous retrouvons avec des connexions non connectées aux deux extrémités du graphe. On peut envisager du *tail-biting* en liant les paquets non connectés de la droite aux connexions vacantes de la gauche. Le rendement du système obtenu vaut exactement R , cependant, il

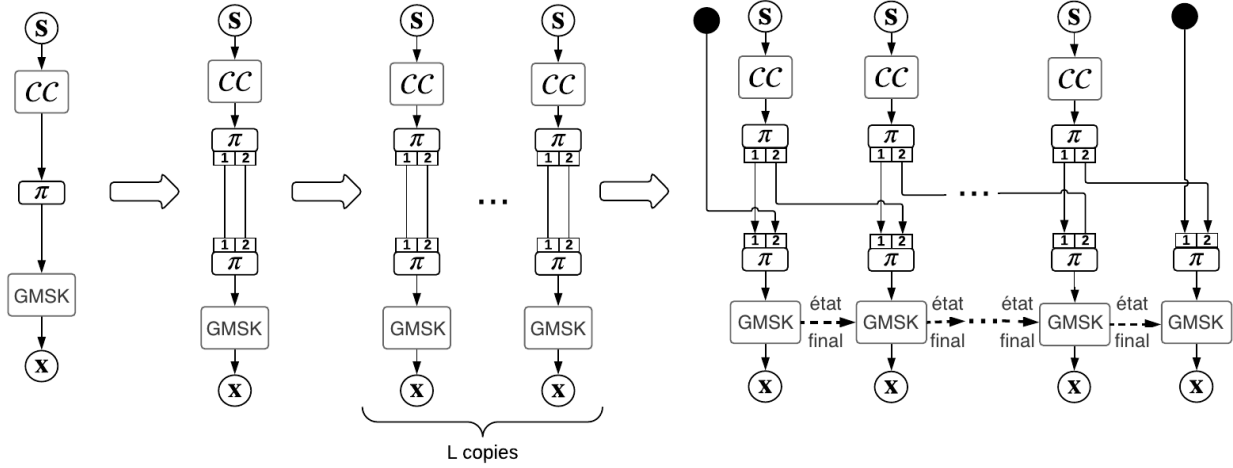


FIGURE 3 – Schéma de l'émetteur. Le couplage est suivant la matrice $B = [0.5, 0.5]$.

n'y aura pas de gain de couplage [9]. L'autre solution est :

- ajouter m_s modulateurs GMSK à la fin pour relier les paquets non connectés à droite
- ajouter des bits de *padding* aux m_s premiers et aux m_s derniers modulateurs GMSK pour compléter les connexions vacantes.

Le graphe obtenu est illustré dans fig. 3. Les cercles noirs m_s représentent les bits de *padding*. Le rendement de code global est donné par $R_L = R - \frac{m_s}{L+m_s}R$.

4 Convergence asymptotique

La courbe EXIT est un outil asymptotique utilisé pour analyser la convergence des systèmes itératifs. Il est discuté dans [10] que le décodage itératif utilisant le BP peut être bien approché en utilisant une approximation gaussienne consistante des LLR échangés. Ainsi, nous pouvons évaluer les LLRs échangés en suivant uniquement leur moyenne. Les fonctions de transfert entrée-sortie des composants SISO peuvent ainsi être calculées. Ces fonctions représentent l'information mutuelle (MI) associée aux LLRs extrinsèques à la sortie des composants SISO en fonction de la MI associée aux LLRs *a priori*. Comme indiqué dans fig. 2, la fonction de transfert du démodulateur GMSK $T_{\mathcal{GMSK}}(\cdot)$ ¹ calcule la MI extrinsèque $I_e(\mathcal{GMSK})$ (des LLRs $L_e(\mathcal{GMSK})$ et les bits correspondants) en fonction de la MI *a priori* $I_a(\mathcal{GMSK})$ (de $L_a(\mathcal{GMSK})$ et les bits correspondants). De même, la fonction de transfert de décodeur externe $T_{CC}(\cdot)$ calcule à la fois la MI extrinsèque $I_e(CC)$ (de $L_e(CC)$ et les bits correspondants) et la MI *a posteriori* $I_{ap}(CC)$ (entre les LLRs $L_{ap}(CC)$ des bits correspondants). Des mises à jour successives sont ainsi effectuées jusqu'à obtenir $I_{ap}(CC) = 1, \forall i$ (convergence) ou atteindre le nombre maximum d'itérations (pas de convergence). Les expressions analytiques de $T_{CC}(\cdot)$ et $T_{\mathcal{GMSK}}(\cdot)$ ne sont généralement pas disponibles, elles sont donc approximées par Monte Carlo.

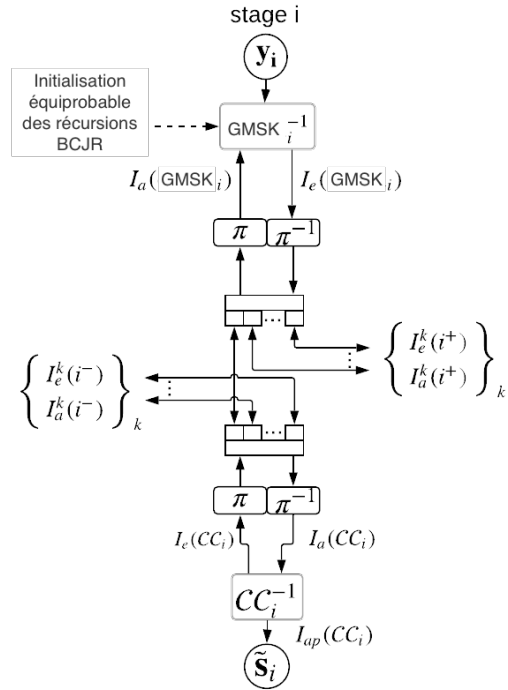


FIGURE 4 – L' i ème étage du graphe couplé

Figure 4 résume les principales notations :

- $I_e^k(i^+)$ (resp. $I_a^k(i^+)$) est le MI extrinsèque (resp. *a priori*) entre les LLR transmis depuis \mathcal{GMSK}_i^{-1} (resp. de CC_{i+k}^{-1}) vers CC_{i-1}^{-1} (respectivement vers \mathcal{GMSK}_i^{-1});
- idem pour $I_e^k(i^-)$ et $I_a^k(i^-)$ par rapport à CC_i^{-1} et $\mathcal{GMSK}_{i-k}^{-1}$.

Les équations de mise à jour sont effectuées sont [9] :

- $I_e(\mathcal{GMSK}_i) = T_{\mathcal{GMSK}}(I_a(\mathcal{GMSK}_i), \mathbf{y}_i)$
- $I_e(CC_i) = T_{CC}(I_a(CC_i))$
- $I_e^k(i^+) = I_e(\mathcal{I}_i).b_k$ et $I_a(\mathcal{I}_i) = \sum I_a^k(i^+).b_k$
- $I_e^k(i^-) = I_e(\mathcal{O}_i).b_k$ et $I_a(\mathcal{O}_i) = \sum I_a^k(i^-).b_k$
- La MI *a priori* des noeuds de *padding* vaut 1.

1. $T_{\mathcal{GMSK}}(\cdot)$ dépend implicitement de la puissance de bruit

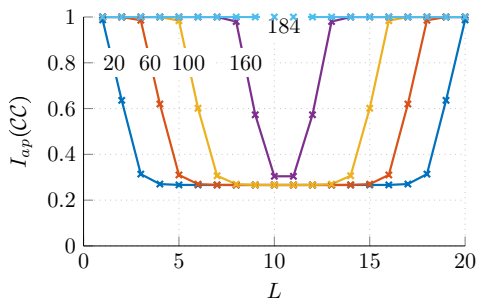


FIGURE 5 – Convergence des étages de la SC-GMSK en fonction des itérations BP. Ici $L = 20$.

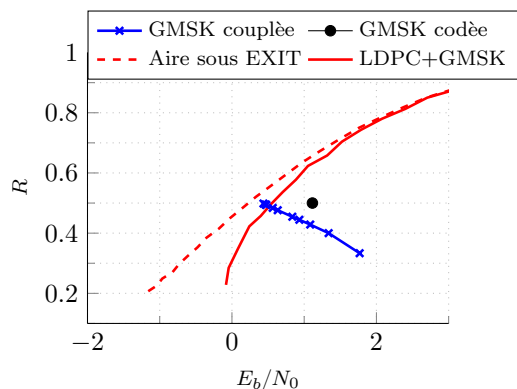


FIGURE 6 – Seuil de décodage des schémas couplé et non couplé et comparaison avec le seuil donné par l'aire sous la courbe EXIT

	codée	couplée	LDPC	Aire EXIT
GMSK	1.11	0.43	0.56	0.24

TABLE 1 – Seuil de décodage E_b/N_0 pour des rendement proche de $1/2$ et le couplage $B = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

5 Résultats

Considérons le code systématique [5, 7]. Pour illustrer le gain de couplage, fig. 5 montre l'évolution de la MI $a posteriori$ en fonction des itérations turbo. Le seuil du système non couplé est $E_s/N_0 = -1.86$ dB. Grâce au couplage, le schéma SC-GMSK arrive à converger à $E_s/N_0 = -2.58$ dB.

Figure 6 représente les résultats du systèmes lorsque $m_s = 1$ et $B = [1/2, 1/2]$. On peut voir que le couplage spatial permet de gagner 0,68dB par rapport à la famille non couplée et le seuil de décodage n'est plus qu'à 0,18dB du seuil donné par le théorème de l'aire sous la courbe EXIT. Notons que ceci a été obtenu sans aucun design du code externe. Lorsque L augmente, R_L tend vers $R = 1/2$ et on observe que le seuil sature à une valeur très proche du seuil donné par le théorème de l'aire sous la courbe EXIT. À titre de référence, nous traçons les seuils obtenus en optimisant un code LDPC non structuré à différents rendement avec un degré de nœuds de variables maximal égal à 7. Nous utilisons la même procédure d'optimisation que dans [14]. Pour le rendement $1/2$, le seuil asymptotique de la SC-GMSK est meilleur que celui du LDPC de 0.13dB. Table 1 résume ces observations.

6 Conclusion

Nous avons proposé une méthode pour coupler spatialement une GMSK codée. En utilisant une analyse EXIT, ce schéma montre des seuils très compétitifs par rapport à un code LDPC soigneusement optimisé. Les résultats de simulation montre que le schéma obtenu converge vers une valeur très proche de celle donnée par le théorème de l'aire sous la courbe EXIT. Les travaux futurs porteront sur la performance à longueur finie et l'optimisation de la matrice de couplage.

Références

- [1] B. E. Rimoldi, "A decomposition approach to CPM," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 34, no. 2, pp. 260–270, 1988.
- [2] M. Mouly, M.-B. Pautet, and T. Foreword By-Haug, "The gsm system for mobile communications," Telecom publishing, 1992.
- [3] L.-J. Lampe, R. Tzschoppe, J. B. Huber, and R. Schober, "Noncoherent continuous-phase modulation for ds-cdma," in *IEEE International Conference on Communications, 2003. ICC'03*, vol. 5, pp. 3282–3286, 2003.
- [4] A. Scorzolini, V. De Perini, E. Razzano, G. Colavolpe, S. Mendes, P. Fiori, and A. Sorbo, "European enhanced space-based ais system study," in *Advanced satellite multimedia systems conference (ASMA) and the 11th signal processing for space communications workshop (SPSC), 2010 5th*, pp. 9–16, 2010.
- [5] Qualcomm, "Waveform candidates," *3GPP TSG-RAN WG1, R1-162199*, April 2016.
- [6] S. Kudekar, T. Richardson, and R. Urbanke, "Threshold saturation via spatial coupling : Why convolutional LDPC ensembles perform so well over the BEC," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 57, no. 2, pp. 803–834, 2011.
- [7] S. Moloudi, M. Lentmaier, and A. G. Amat, "Finite length weight enumerator analysis of braided convolutional codes," in *International Symposium on Inf. Theory and Its Applications (ISITA)*, pp. 488–492, 2016.
- [8] D. J. Costello, M. Lentmaier, and D. G. Mitchell, "New perspectives on braided convolutional codes," in *9th International Symposium on Turbo Codes and Iterative Information Processing (ISTC), 2016*, pp. 400–405, IEEE, 2016.
- [9] T. Benaddi, C. Poulliat, and R. Tajan, "A general framework and optimization for spatially-coupled serially concatenated systems," in *GLOBECOM 2017-2017 IEEE Global Communications Conference*, pp. 1–6, 2017.
- [10] S. ten Brink, "Convergence behavior of iteratively decoded parallel concatenated codes," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 49, pp. 1727–1737, 2001.
- [11] J. B. Anderson, T. Aulin, and C.-E. Sundberg, "Digital phase modulation," Springer, 1986.
- [12] P. Moqvist and T. M. Aulin, "Serially concatenated continuous phase modulation with iterative decoding," in *IEEE Trans. Commun.*, vol. 49, pp. 1901–1915, 2001.
- [13] L. Bahl, J. Cocke, F. Jelinek, and J. Raviv, "Optimal decoding of linear codes for minimizing symbol error rate (corresp.)," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 20, pp. 284–287, 1974.
- [14] T. Benaddi, C. Poulliat, M.-L. Boucheret, B. Gadat, and G. Lesthievant, "Design of unstructured and protograph-based LDPC coded continuous phase modulation," in *2014 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT)*, pp. 1982–1986, 2014.