

Détection et localisation en imagerie de particules par approximation de Taylor de dictionnaires continus

Soufiane AIT TILAT¹, Cédric HERZET², Frédéric CHAMPAGNAT¹

¹Office National d’Etudes et de Recherches Aérospatiales ONERA, 8 Chemin de la Hunière, 91120, Palaiseau

²INRIA Rennes-Bretagne Atlantique, Campus de Beaulieu, 35000, Rennes

soufiane.ait_tilat@onera.fr, cedric.herzet@inria.fr, frederic.champagnat@onera.fr

Résumé – Ce papier présente une extension des techniques de détection et localisation par Continuous Basis Pursuit au cas de l’imagerie de particules. Nous nous concentrons sur les dictionnaires obtenus par approximation de Taylor d’ordre 1, nous résolvons les problèmes algorithmiques associés et montrons empiriquement que les dictionnaires obtenus sont plus compacts et tout aussi performants. Dans le contexte récent de l’imagerie PIV, où l’on considère des pas de grille très fins, cette approche promet des gains mémoire et calculatoires importants. Nous proposons également une simplification des méthodes Continuous Orthogonal Matching Pursuit dans ce même contexte et montrons empiriquement que ces méthodes sont compétitives pour des pas de grille grossiers mais qu’elles se détériorent avec des pas plus fins.

Abstract – This paper presents an extension of Continuous Basis Pursuit detection and localization techniques to particle imaging. We focus on dictionaries obtained via a first-order Taylor approximation. We solve the associated algorithmic problems and show empirically that the obtained dictionaries are more compact and equally performant. In the recent context of PIV, where very small grid sizes are considered, this approach promises significant gains in memory and computation time. We also suggest a simplification of Continuous Orthogonal Matching Pursuit methods in the same context. We show empirically that these methods are competitive for coarse grid sizes but deteriorate when used with small grid sizes.

1 Introduction

L’imagerie de particules intéresse plusieurs secteurs allant de l’aérodynamique au biomédical, citons la vélocimétrie par image de particules (PIV) [1][2], l’holographie en ligne [3] et la microscopie en fluorescence [4]. L’objectif de ces méthodes est de détecter et localiser les particules en s’appuyant sur des clichés acquis par des caméras dédiées. Lorsque la densité de particules augmente, l’occurrence du chevauchement des particules dans les images s’accroît et rend difficile la séparation de celles-ci. Un modèle classique d’image tenant compte de ce chevauchement s’appuie sur la fonction d’étalement de point (FEP) de l’imageur $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$. La FEP décrit la réponse de l’imageur à une source ponctuelle. Comme les particules sont très fines, le motif d’image généré est donné par la FEP. Ainsi l’intensité $i(\mathbf{n})$ mesurée au pixel $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^2$ s’exprime comme la somme des images de chaque particule [1] :

$$i(\mathbf{n}) = \sum_{p=1}^P h(\mathbf{n} - \mathbf{x}_p) e_p, \quad (1)$$

où P est le nombre de particules dans l’image, $\mathbf{x}_p \in \mathbb{R}^2$ la position continue de chaque particule et $e_p \in \mathbb{R}$ son intensité. Les méthodes qui visent à résoudre ces problèmes de chevauchement combinent généralement un critère sur l’écart entre le modèle (1) et les observations acquises à une pénalisation sur l’ordre P du modèle. Ce problème est difficile en raison de la dépendance non linéaire entre la position \mathbf{x}_p de la particule

et son image, de plus l’ordre du modèle est inconnu. Il existe deux catégories de méthodes pour le résoudre selon que l’on considère ou non une approximation de (1) : la première préserve l’aspect continu de la position des particules, au prix de difficultés d’implémentation. Par exemple la méthode Sliding Frank-Wolfe de Denoyelle [4] requiert la résolution d’un sous problème non convexe afin de déplacer continuellement les particules reconstruites à chaque itération. La seconde s’appuie sur une grille discrète : la position des particules est discrétisée sur une grille fixe de nœuds, on aboutit ainsi à une relation linéaire entre l’image et une distribution d’intensité de particules indexée sur la même grille, via un dictionnaire. Les atomes sont les images de particules localisées sur les nœuds et d’intensité unité. En pratique cette linéarisation aboutit à un problème quadratique sous contrainte de positivité [2] ou à une pénalisation l_1 [5], approche dite Basis Pursuit (BP). Dans tous les cas, cette linéarisation présente plusieurs limitations notamment la présence de détections multiples liées à l’erreur de discrétisation [4] et l’incapacité de séparer les chevauchements quand le pas de la grille est de l’ordre du pixel. Des travaux récents [2] indiquent que ces limitations peuvent être surmontées avec des pas extrêmement fins de l’ordre du vingtième de pixel et en ne gardant que les maxima locaux de la solution sur la grille fine pour éliminer les détections multiples. Cependant, dans ce cas, le problème requiert la manipulation d’un dictionnaire de très grande taille et par conséquent un coût de calcul et un en-

Ce travail est financé par le projet ANR BECOSE (ANR-15-CE23-0021).

combement mémoire très importants. Ce papier propose des techniques de discrétisation alternatives, adaptées au cas 2D et préservant l'information de localisation subpixel tout en limitant la taille des grilles de discrétisation. Il est organisé comme suit : la section 2 explique le principe général de cette discrétisation qui conduit à une extension du dictionnaire par rapport au cas BP et à l'introduction de contraintes d'inégalité sur les coefficients associés. La section 3 développe le mode de résolution des problèmes d'optimisation l_1 sous contraintes d'inégalité associées à la discrétisation proposée. La section 4 traite de la résolution du problème l_0 associé. Enfin la section 5 compare les performances des différentes techniques proposées et montre en particulier la meilleure efficacité de l'approche C-BP par rapport à l'approche BP.

2 Approximation de Taylor des dictionnaires continus

Nous rappelons ici brièvement l'approximation de Taylor (AT) des dictionnaires continus, initialement introduite par [6] dans le cas d'un signal 1D. Le principe est une linéarisation par morceau de l'image d'une particule en un point continu de l'espace image. Comme représenté à la Figure 1, l'image de la particule localisée en x_p peut être approchée par une combinaison linéaire de deux atomes, l'un associé à l'image d'une particule localisée en $m\Delta$ et l'autre associé à sa dérivée au même point de la grille

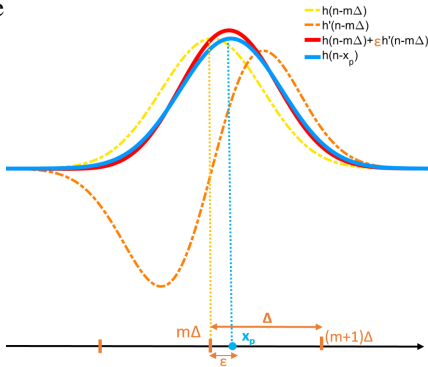


FIGURE 1 – L'approximation de Taylor dans le cas 1D de l'image d'une particule h située entre deux points de la grille.

Nous généralisons au cas 2D l'AT. Cela fait intervenir deux dictionnaires "dérivées" associés aux deux variables d'espace. Les coefficients associés à ces dictionnaires sont contraints dans un intervalle dépendant du pas de discrétisation et de l'intensité de la particule. Considérons une grille à M nœuds avec Δ comme pas de discrétisation. Pour une particule p donnée, localisée en x_p , on associe le nœud le plus proche de la grille, indicé m . La position de ce dernier est dénotée $m\Delta$, $m \in \mathbb{Z}^2$. Ainsi, $\epsilon_m = (\epsilon_{1m}, \epsilon_{2m})^t = x_p - m\Delta$ est l'erreur de discrétisation. Par construction, $|\epsilon_{1m}| \leq \frac{\Delta}{2}$ et $|\epsilon_{2m}| \leq \frac{\Delta}{2}$. Notons $x_{nm} = n - m\Delta$, alors l'AT dans le cas 2D s'écrit :

$$\begin{aligned} h(n - x_p) &= h(n - (m\Delta + \epsilon_m)) \\ &\simeq h(x_{nm}) - \epsilon_{1m} \cdot \frac{\partial h}{\partial x}(x_{nm}) - \epsilon_{2m} \cdot \frac{\partial h}{\partial y}(x_{nm}) \end{aligned}$$

En notant $d_{km} = \epsilon_{km} e_m$, (1) se réécrit :

$$i(n) \simeq \sum_{m=1}^M e_m h(x_{nm}) - d_{1m} \frac{\partial h}{\partial x}(x_{nm}) - d_{2m} \frac{\partial h}{\partial y}(x_{nm}).$$

On en déduit une relation matricielle entre l'image observée i et trois vecteurs de \mathbb{R}^M qui sont l'intensité e et les décalages d_1 et d_2 :

$$i \simeq He + H_1 d_1 + H_2 d_2, \quad \begin{cases} H = (h(n - m\Delta))_{nm} \\ H_1 = (-\frac{\partial h}{\partial x}(n - m\Delta))_{nm} \\ H_2 = (-\frac{\partial h}{\partial y}(n - m\Delta))_{nm} \end{cases} \quad (2)$$

De plus, la contrainte sur ϵ_m et la contrainte de positivité de l'intensité e_m , conduisent à la contrainte $(e_m, d_{1m}, d_{2m}) \in \mathcal{C}$ où

$$\mathcal{C} \triangleq \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |y| \leq \alpha x, |z| \leq \alpha x, \alpha = \Delta/2\}. \quad (3)$$

La contrainte sur d_{km} est essentielle et a deux objectifs : garantir que l'AT ne soit utilisée que lorsque celle-ci est précise et éviter d'expliquer l'image d'une même particule par des jeux de coefficients associés à des nœuds de grille voisins.

La discrétisation (2) est généralement conduite sur des tailles de grilles très supérieures au nombre effectif de particules, d'où l'utilisation de technique de parcimonie pour inverser (2). Nous étudions les cas où la parcimonie de la solution est induite par une pénalisation l_1 dans la section suivante, et une pénalisation l_0 dans la section 4.

3 Pénalisation l_1

Nous formulons le problème comme la minimisation sous contrainte d'un critère quadratique basé sur (2) avec une pénalisation l_1 . Cette approche est appelé C-BP :

$$\begin{aligned} \arg \min_{e, d_1, d_2 \in \mathcal{E}_1} & \|i - (He + H_1 d_1 + H_2 d_2)\|_2^2 + \lambda \|e\|_1 \\ \mathcal{E}_1 &= \{(e, d_1, d_2) \mid (e_m, d_{1m}, d_{2m}) \in \mathcal{C}, m \in \{1..M\}\} \end{aligned} \quad (4)$$

Nous résolvons le problème (4) par une approche de gradient proximal FISTA (Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm) [7]. Cette dernière peut être vue comme une extension de l'algorithme du gradient classique. Elle est attrayante en raison de sa simplicité et sa capacité à traiter des problèmes de grande taille. Posons f la partie quadratique de ce problème et g la fonction de pénalité qui représente toutes les contraintes :

$$\begin{aligned} f &= \|i - (He + H_1 d_1 + H_2 d_2)\|_2^2 \\ g &= \lambda \|e\|_1 + I_{\mathcal{E}_1}, \end{aligned} \quad (5)$$

avec $I_{\mathcal{E}_1}$ la fonction indicatrice de l'ensemble \mathcal{E}_1 . Une itération principale j de FISTA consiste à appliquer d'abord la méthode du gradient sur la partie quadratique f puis l'opérateur proximal de g sur le résultat obtenu. L'opérateur proximal peut être évalué très efficacement dans le cas présent, ce qui permet de traiter des problèmes de grande taille.

Pour un point $y = (a^t, b^t, c^t)^t$, $prox_{\gamma g}(y)$ est défini par :

$$\arg \min_{(e, d_1, d_2) \in \mathcal{E}_1} \lambda \|e\|_1 + \frac{1}{2\gamma} (\|e - a\|_2^2 + \|d_1 - b\|_2^2 + \|d_2 - c\|_2^2).$$

L'optimisation est indépendante en m et se ramène à :

$$(e_m, d_{1m}, d_{2m}) = \text{proj}_{\mathcal{C}}(a_m - \lambda\gamma, b_m, c_m),$$

avec $\text{proj}_{\mathcal{C}}$ la projection d'un point de \mathbb{R}^3 sur le cône \mathcal{C} défini par (3), son expression est donnée en Annexe.

4 Pénalisation l_0

Une fonction de pénalité alternative pour exprimer la parcimonie du signal est la norme l_0 . Le problème de reconstruction 2D avec l'AT s'écrit :

$$\begin{aligned} \arg \min_{e, d_1, d_2 \in \mathcal{E}_0} & \|i - (He + H_1 d_1 + H_2 d_2)\|_2^2 \\ \mathcal{E}_0 = & \{(e, d_1, d_2) \in \mathcal{E}_1 \mid \|e\|_0 \leq K\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Knudson [8] a abordé ce type de problème en utilisant une logique Orthogonal Matching Pursuit (OMP). On est confronté à chaque itération à la résolution d'un problème quadratique sous contraintes linéaires d'inégalité. A l'instar du cas l_1 , la gestion de ces contraintes n'est pas évidente et constitue la principale difficulté de résolution. Nous proposons de reparamétriser le problème pour faire apparaître uniquement des contraintes de positivité. Cela est possible car \mathcal{E}_1 est un cône convexe et on peut en déduire une description générative avec des coefficients positifs, cf. [9] dans le cas 1D. L'extension au cas 2D est obtenue en posant $\alpha = \Delta/2$ et

$$G = [HH_1H_2]P_\alpha, \text{ où } P_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & -\alpha & \alpha & -\alpha \\ \alpha & \alpha & -\alpha & -\alpha \end{pmatrix} \otimes \mathbb{I}_M,$$

\otimes le produit de Kronecker et \mathbb{I}_M la matrice identité d'ordre M . Ceci permet d'identifier (6) à un problème l_0 sous contrainte de positivité, noter que le dictionnaire G est redondant :

$$\begin{aligned} \arg \min_{u \in \tilde{\mathcal{E}}_0} & \|i - Gu\|_2 \\ \tilde{\mathcal{E}}_0 = & \{u \in \mathbb{R}_+^{4M}, \|\mathbb{I}_M \mathbb{I}_M \mathbb{I}_M \mathbb{I}_M u\|_0 \leq K\}. \end{aligned} \quad (7)$$

On peut alors s'appuyer sur des algorithmes de type OMP sous contraintes de positivité comme NNOMP de [10]. Le déroulement de ce dernier est comme suit : on cherche l'indice de l'atome qui réalise le maximum de corrélation avec le dictionnaire utilisé. On ajoute l'atome sélectionné au support, puis on résout un problème de moindres carrés sous contrainte de positivité sur le support courant. Notre méthode de résolution qu'on a appelé C-NNOMP se différencie légèrement de NNOMP dans la façon d'ajout d'atomes. Une image de particule est décrite par 4 atomes liés de la matrice G . L'ajout d'atomes à chaque itération se fait donc par un bloc de 4 : Le premier atome est choisi comme décrit dans [10] et les 3 autres sont les atomes qui lui sont liés.

5 Simulations numériques

5.1 Conditions de simulation

Les simulations correspondent à un contexte PIV. On a généré 30 images synthétiques 32×32 selon le modèle (1). La

densité de particules dans l'image est contrôlée par le nombre de particules par pixel N_{ppp} . Toutes les particules ont une intensité de 1 et sont localisées aléatoirement selon une distribution uniforme dans les images. La FEP est la convolution d'une gaussienne et une fonction rectangle, dont une expression est donnée dans [1]. Sa largeur est contrôlée par l'écart type σ de la composante gaussienne. Dans toutes nos simulations $\sigma = 0.6$ ce qui correspond à un motif d'image de taille 4×4 pixels. Un bruit gaussien a été ajouté, son écart-type est égal à 5% de l'intensité maximale de l'image d'une particule. Les performances de détection sont quantifiées par deux métriques : Précision et Rappel. La Précision est le pourcentage de vrais positifs parmi toutes les détections obtenues et le Rappel est défini par le nombre de vrais positifs sur le nombre total de particules. Les méthodes testées sont C-NNOMP, BP, C-BP et NNLS qui consiste à minimiser l'écart $\|i - He\|_2^2$ sous contrainte de positivité [2]. Un seuillage à 20%(resp. 30%) de l'intensité est appliqué à la méthode l_1 (resp. NNLS), suivi d'une étape d'agrégation par détection de maxima locaux en vue d'éliminer les détections multiples. Le coefficient de régularisation λ de C-BP et BP vaut 0,08 pour les deux pas de discrétisation utilisés. Quant au C-NNOMP, le paramètre de parcimonie K est fixé au nombre total de vraies particules.

5.2 Résultats

La Figure 2 présente d'une part un NNLS à pas $\Delta = 0.05$ qui constitue l'état de l'art des performances de détection en PIV [2]. On constate l'apport d'une régularisation l_1 (courbes BP) qui améliore nettement la Précision au prix d'une légère détérioration du Rappel. On constate également le gain en Précision qu'il y a à affiner le pas d'un facteur 4 dans le cas BP. Le résultat le plus marquant est qu'avec C-BP on peut se contenter d'un pas 4 fois plus grossier qu'avec BP et obtenir exactement les mêmes performances de détection. Ceci correspond à un dictionnaire de taille 5 fois plus faible, donc à un gain conséquent en mémoire et en temps de calcul.

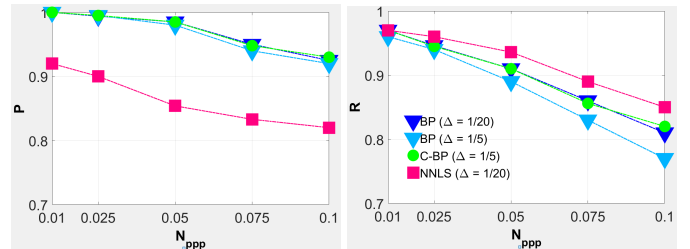


FIGURE 2 – Comparaison de performances de détection entre NNLS (Rose), BP (Bleu) et C-BP (Vert) pour différentes densités N_{ppp} et différents pas de grille Δ . Précision à gauche et Rappel à droite.

La Figure 3 compare les performances de détection de C-NNOMP et C-BP en fonction de la densité des particules N_{ppp} et des pas de discrétisation ($\Delta = 1$) et ($\Delta = 0.2$). Le comportement de C-BP vis à vis de Δ confirme l'observation de la Figure 2 : plus le pas est fin, meilleures sont les performances. Cette tendance est inverse avec C-NNOMP, le cas $\Delta = 1$ rivalise en Rappel avec le meilleur C-BP ($\Delta = 0.2$) pour une

Précision inférieure, tandis que C-NNOMP à $\Delta = 0.2$ est nettement moins performant. Une analyse détaillée montre que le cas de chevauchement de particules conduit systématiquement à des détections multiples lorsque le pas est fin. Schématiquement, l'algorithme glouton va commencer à détecter une particule au milieu des deux vraies particules, laissant deux pics secondaires dans le résidu qui vont générer ultérieurement deux nouvelles détections. C'est un défaut d'algorithme glouton purement incrémental. Le fait de travailler à un pas grossier va mitiger ce phénomène et produira moins de détections multiples.

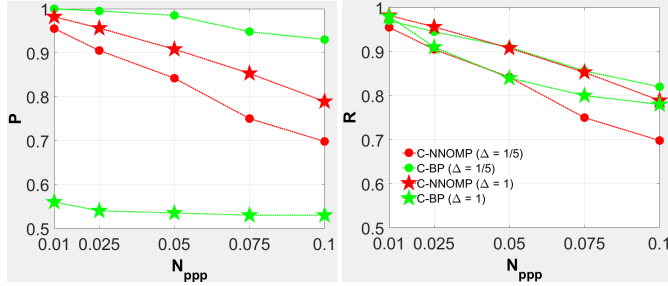


FIGURE 3 – Performances de détection de C-NNOMP (Rouge) et C-BP (Vert) pour 2 pas de discrétisation en fonction de la densité N_{ppp} .

6 Conclusion

Nous avons étendu les techniques de détection et localisation par Continuous Basis Pursuit [6] au cas de l'imagerie de particules et montré empiriquement que les dictionnaires obtenus sont plus compacts que les dictionnaires requis par BP pour garantir la même qualité de détection. Dans le contexte récent de la PIV où l'on considère des pas de grille très fins, cette approche promet des gains mémoire et calculatoires importants. Nous avons également proposé une simplification des méthodes Continuous OMP [8] dans ce même contexte et avons montré empiriquement que ces méthodes sont compétitives pour des pas de grille grossiers mais qu'elles se détériorent avec des pas plus fins. En termes de perspectives, l'accent sera mis sur les approches C-BP et la réduction du temps de calcul. Nous envisagerons en particulier de combiner ce type d'approches avec des techniques de screening [11]. Cette dernière consiste à appliquer des tests simples et sûrs, dérivés des conditions d'optimalité pour éliminer au préalable les points de la grille inutiles.

Références

- [1] F. Champagnat, P. Cornic, A. Cheminet, B. Leclaire, G. Le Besnais et A. Plyer. *Tomographic PIV particles versus blobs*. Measurement Science and Technology, 2014.
- [2] A. Cheminet, J. Krawczynski, P. Druault, *Particle image reconstruction for particle detection in PTV*. Measurement Science and Technology, 2018
- [3] N. Verrier, C. Fournier et T. Fournel. *3D tracking the Brownian motion of colloidal particles using digital holographic microscopy and joint reconstruction*. App. Optics, 2015
- [4] Q. Denoyelle, *Theoretical and numerical analysis of super-resolution without grid*. Thèse de l'université Paris Dauphine, 2018.

- [5] S. Chen, D. Donoho et M. Saunders. *Atomic decomposition by basis pursuit*. SIAM journal on scientific computing, 1998.
- [6] C. Ekanadham, D. Tranchina et P. Simoncelli. *Recovery of sparse translation-invariant signals with continuous basis pursuit*. IEEE Trans Signal Process, 2011
- [7] N. Parikh et S. Boyd. *Proximal algorithms Foundations and trends in optimization*, 2014
- [8] J. K. Knudson, J. Yates, A. Huk, et J. Pillow, *Inferring sparse representations of continuous signals with continuous orthogonal matching pursuit*. Adv Neural Inf Process Syst, 2014
- [9] V. Duval et G. Peyré, *Sparse spikes super-resolution on thin grids II : the continuous basis pursuit*. Inverse Problems, 2017.
- [10] T. Nguyen, C. Soussen, J. Idier et E. Jarmoune, *Optimized version of non-negative OMP*. GretsI, 2017
- [11] C. Herzet, A. Drémeau, *Joint screening tests for LASSO*. ICASSP, 2018
- [12] D. P. Bertsekas, *Nonlinear programming*. 1999

7 Annexe

Pour tout $\alpha > 0$ on définit le cône

$$\mathcal{C} \triangleq \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |y| \leq \alpha x, |z| \leq \alpha x\}.$$

Pour tout $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$, on définit sa projection sur \mathcal{C}

$$\text{proj}_{\mathcal{C}}(u, v, w) = \arg \min_{(x, y, z) \in \mathcal{C}} (x - u)^2 + (y - v)^2 + (z - w)^2$$

Ce problème admet un minimum global (x^*, y^*, z^*) qui est linéaire par morceau. La Table 1 donne son expression explicite déduite des conditions d'optimalité [12] :

Cas	x^*	y^*	z^*
\mathcal{C}	u	v	w
\mathcal{C}^*	0	0	0
\mathcal{F}_1	$\frac{u+\alpha v}{1+\alpha^2}$	αx^*	w
\mathcal{F}_2	$\frac{u+\alpha w}{1+\alpha^2}$	v	αx^*
\mathcal{F}_3	$\frac{u-\alpha v}{1+\alpha^2}$	$-\alpha x^*$	w
\mathcal{F}_4	$\frac{u-\alpha w}{1+\alpha^2}$	v	$-\alpha x^*$
\mathcal{A}_1	$\frac{u+\alpha v+\alpha w}{1+2\alpha^2}$	αx^*	αx^*
\mathcal{A}_2	$\frac{u-\alpha v+\alpha w}{1+2\alpha^2}$	$-\alpha x^*$	αx^*
\mathcal{A}_3	$\frac{u-\alpha v-\alpha w}{1+2\alpha^2}$	$-\alpha x^*$	$-\alpha x^*$
\mathcal{A}_4	$\frac{u+\alpha v-\alpha w}{1+2\alpha^2}$	αx^*	$-\alpha x^*$

TABLE 1 – Solutions du problème de projection sur le cône \mathcal{C} . La première colonne correspond à l'ensemble auquel appartient (u, v, w)

Les ensembles \mathcal{C}^* , \mathcal{F}_i et \mathcal{A}_i sont définis par :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^* &\triangleq \{(x, y, z) \mid |y+z| \leq -\frac{x}{\alpha}, |y-z| \leq -\frac{x}{\alpha}\} \\ \mathcal{F}_1 &\triangleq \{(x, y, z) \mid y \geq \alpha x, |z| \leq \alpha \frac{x+\alpha y}{1+\alpha^2}\} \\ \mathcal{F}_2 &\triangleq \{(x, y, z) \mid z \geq \alpha x, |y| \leq \alpha \frac{x+\alpha z}{1+\alpha^2}\} \\ \mathcal{F}_3 &\triangleq \{(x, y, z) \mid y \leq -\alpha x, |z| \leq \alpha \frac{x-\alpha y}{1+\alpha^2}\} \\ \mathcal{F}_4 &\triangleq \{(x, y, z) \mid c \leq -\alpha x, |y| \leq \alpha \frac{x-\alpha z}{1+\alpha^2}\} \\ \mathcal{A}_1 &\triangleq \{(x, y, z) \mid y+z \geq -\frac{x}{\alpha}, z \geq \alpha \frac{x+\alpha y}{1+\alpha^2}, y \geq \alpha \frac{x+\alpha z}{1+\alpha^2}\} \\ \mathcal{A}_2 &\triangleq \{(x, y, z) \mid z-y \geq -\frac{x}{\alpha}, z \geq \alpha \frac{x-\alpha y}{1+\alpha^2}, y \leq -\alpha \frac{x+\alpha z}{1+\alpha^2}\} \\ \mathcal{A}_3 &\triangleq \{(x, y, z) \mid y+z \leq \frac{x}{\alpha}, z \leq -\alpha \frac{x+\alpha y}{1+\alpha^2}, y \leq -\alpha \frac{x+\alpha z}{1+\alpha^2}\} \\ \mathcal{A}_4 &\triangleq \{(x, y, z) \mid z-y \leq \frac{x}{\alpha}, z \leq -\alpha \frac{x+\alpha y}{1+\alpha^2}, y \geq \alpha \frac{x-\alpha z}{1+\alpha^2}\}. \end{aligned}$$