

Exposants d'Erreur Type-II Ultimes pour Tests d'Hypothèse Binaire dans un Réseau Multi-Sauts

Sadaf SALEHKALAIBAR^{1,2}, Michèle WIGGER², Ligong WANG³

¹Département d'ingénierie électrique et informatique, Collège de l'ingénierie, Université de Téhéran, Téhéran, Iran

² LTCI, Télécom ParisTech, Université Paris-Saclay, 75013 Paris, France

³ETIS – Université Paris Seine, Université de Cergy-Pontoise, ENSEA, CNRS

s.saleh@ut.ac.ir, michele.wigger@telecom-paristech.fr, ligong.wang@ensea.fr

Résumé – Cet article considère un problème de test d'hypothèse distribuée à trois terminaux où l'émetteur peut envoyer un message à un relais, qui envoie ensuite un message à un récepteur. Le relais et le récepteur souhaitent décider de l'hypothèse binaire qui détermine la distribution conjointe des observations aux trois terminaux. Les principales quantités d'intérêt dans cet article sont les plus grands exposants d'erreur de type II lorsque l'on exige que les erreurs de type I disparaissent asymptotiquement. L'article présente un schéma de codage général, dans lequel le codeur envoie une version quantifiée de son observation au relais, et le relais traite le vecteur de quantification obtenu avec sa propre observation et envoie le résultat de ce traitement avec sa propre décision au récepteur. Le récepteur prend une décision préliminaire en fonction du vecteur quantifié obtenu et de sa propre observation, et ne prend une décision pour l'hypothèse nulle que si le relais prend la même décision. L'exposant d'erreur de type II est analysé pour le schéma proposé. En outre, il est démontré que des versions simplifiées du schéma permettent d'obtenir les exposants d'erreur de type II maximaux dans des cas particuliers.

Abstract – This paper considers a three-terminal distributed hypothesis testing problem where the transmitter can send a message to a relay, which subsequently sends a message to a receiver, and where the relay and the receiver have to decide on the binary hypothesis underlying the joint distribution of the observations at the three terminals. The main quantity of interest in this paper are the maximum achievable type-II error exponents when one requires that the two type-I errors vanish asymptotically. The paper presents a coding strategy where the encoder sends a quantized version of its observation to the relay, and where the relay processes the obtained quantization vector with its own observation and sends the processed information together with its own decision to the receiver. The receiver makes a preliminary decision based on the obtained quantization information and its own observation, and keeps a decision for the null-hypothesis only if the relay takes the same decision. The type-II error exponents achieved by the proposed scheme are analysed. Moreover, it is shown that simplified versions of the general scheme achieve the largest possible type-II error exponents in some special cases.

1 Problématique

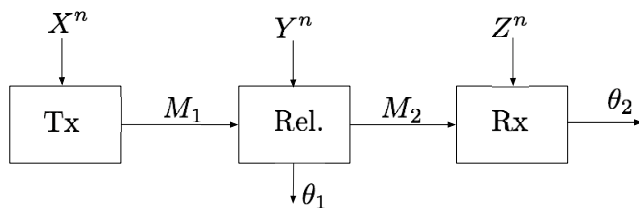


FIGURE 1 – Test d'hypothèse dans un réseau à deux sauts.

Un grand nombre de systèmes d'alerte et de surveillance futurs utiliseront de nombreux capteurs qui communiquent entre eux. La façon dont ils peuvent communiquer influence évidemment la performance de ces systèmes et il est important d'étudier cette influence. Dans cet article, nous proposons d'étudier un simple réseau à deux sauts, qui est illustré dans la Fig. 1. L'émetteur, observe la suite de symboles $X^n := (X_1, \dots, X_n)$ qui prennent des valeurs dans un alphabet fini \mathcal{X} . Se basant sur cette observation, l'émetteur envoie un mes-

sage $M_1 \in \{0, \dots, \lfloor 2^{nR_1} \rfloor\}$ au relais, où $M_1 = \phi^{(n)}(X^n)$ pour une fonction de codage $\phi^{(n)}: \mathcal{X}^n \rightarrow \{1, \dots, \lfloor 2^{nR_1} \rfloor\}$ et où R_1 indique le taux de transmission de l'émetteur au relais. Le relais observe une suite de symboles $Y^n := (Y_1, \dots, Y_n)$ qui prennent valeur dans un alphabet fini \mathcal{Y} . Se basant sur M_1 et Y^n , il envoie un message $M_2 \in \{0, \dots, \lfloor 2^{nR_2} \rfloor\}$ au récepteur, où $M_2 = \phi_y^{(n)}(M_1, Y^n)$ pour une fonction de codage $\phi_y^{(n)}: \{1, \dots, \lfloor 2^{nR_1} \rfloor\} \times \mathcal{Y}^n \rightarrow \{1, \dots, \lfloor 2^{nR_2} \rfloor\}$ et où R_2 indique le taux de transmission du relais au récepteur. Celui-ci observe une suite de symboles $Z^n := (Z_1, \dots, Z_n)$ qui prennent valeurs dans un alphabet fini \mathcal{Z} .

Les triplets $\{(X_t, Y_t, Z_t)\}_{t=1}^n$ sont indépendamment et identiquement distribués (i.i.d.) selon une loi conjointe. Il y a deux hypothèses possibles. Si $\mathcal{H} = 0$, la loi conjointe est P_{XYZ} et si $\mathcal{H} = 1$, la loi conjointe est Q_{XYZ} . Donc :

$$\mathcal{H} = 0: (X^n, Y^n, Z^n) \text{ i.i.d. } \sim P_{XYZ} \quad (1)$$

$$\mathcal{H} = 1: (X^n, Y^n, Z^n) \text{ i.i.d. } \sim Q_{XYZ}. \quad (2)$$

Le relais et le récepteur veulent décider laquelle des deux hy-

pothèses s'applique, $\mathcal{H} = 0$ ou $\mathcal{H} = 1$. En fait, se basant sur le message reçu M_1 et son observation Y^n , le relais produit

$$\hat{\mathcal{H}}_y = g_y^{(n)}(Y^n, M_1), \quad (3)$$

où $g_y^{(n)} : \mathcal{Y}^n \times \{0, \dots, \lfloor 2^{nR_1} \rfloor\} \rightarrow \{0, 1\}$. Se basant sur le message reçu M_2 et son observation Z^n , le récepteur produit

$$\hat{\mathcal{H}}_z = g_z^{(n)}(Z^n, M_2), \quad (4)$$

où $g_z^{(n)} : \mathcal{Z}^n \times \{0, \dots, \lfloor 2^{nR_2} \rfloor\} \rightarrow \{0, 1\}$.

Les probabilités d'erreur de type I sont alors

$$\alpha_{1,n} \triangleq \Pr[\hat{\mathcal{H}}_y = 1 | \mathcal{H} = 0], \quad (5)$$

$$\alpha_{2,n} \triangleq \Pr[\hat{\mathcal{H}}_z = 1 | \mathcal{H} = 0], \quad (6)$$

et les probabilités d'erreur de type II sont

$$\beta_{1,n} \triangleq \Pr[\hat{\mathcal{H}}_y = 0 | \mathcal{H} = 1], \quad (7)$$

$$\beta_{2,n} \triangleq \Pr[\hat{\mathcal{H}}_z = 0 | \mathcal{H} = 1]. \quad (8)$$

Pour tout $\epsilon \in (0, 1)$, le tuple $(\theta_1, \theta_2, R_1, R_2)$ est dit ϵ -atteignable, s'il existe une suite de fonctions $\{\phi^{(n)}, \phi_y^{(n)}, g_y^{(n)}, g_z^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ telle que pour $i \in \{1, 2\}$ et pour tout nombre entier n suffisamment large

$$\alpha_{i,n} \leq \epsilon \quad (9)$$

et

$$-\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \beta_{i,n} \geq \theta_i. \quad (10)$$

Nous nous intéressons aux plus grands exposants d'erreur de type II lorsque l'on exige que les probabilités d'erreur de type I disparaissent asymptotiquement.

Définition 1 On fixe les taux (R_1, R_2) . Soit $\mathcal{E}(R_1, R_2)$ la clôture de l'ensemble des paires $(\theta_1 \geq 0, \theta_2 \geq 0)$ telle que $(\theta_1, \theta_2, R_1, R_2)$ est ϵ -atteignable pour tout $\epsilon \in (0, 1)$.

Les limites fondamentales des exposants d'erreur de type II ont précédemment été étudiées dans [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8] mais pour des scénarios sans relais. Le travail le plus étroitement lié à cet article est [7]. Les principales différences entre [7] et le travail présent sont que, dans notre installation, il n'y a pas de lien de communication direct entre l'émetteur et le récepteur et que le relais souhaite également prendre une décision sur l'hypothèse.

Nous concluons cette section avec quelques remarques de notation. Par $P_X, P_Y, P_Z, P_{XY}, P_{YZ}, P_{Y|X}$ etc. nous nous référons aux lois marginales et conditionnelles obtenues de P_{XYZ} . Toutes les informations mutuelles $I(\cdot; \cdot)$ dans cet article sont calculées en supposant que X^n, Y^n, Z^n sont i.i.d. selon P_{XYZ} . Soit $D(\|\cdot\|)$ la divergence de Kullback-Leibler. Nous écrivons $A_\epsilon^{(n)}$ pour un ensemble typique.

2 Résultats

En premier, nous présentons la région $\mathcal{E}(R_1, R_2)$ pour des cas particuliers, pour lesquels nous mentionnons brièvement comment cette région peut être atteinte. Ensuite, nous présentons un résultat d'atteignabilité pour le cas général.

2.1 Résultats Exacts Pour Des Cas Particuliers

Les cas particuliers sont des tests d'indépendance. En fait, le premier cas particulier considère que :

$$P_{XYZ} = P_X \cdot P_{Y|X} \cdot P_{Z|Y}, \quad (11)$$

$$Q_{XYZ} = P_X \cdot P_Y \cdot P_Z, \quad (12)$$

$$R_2 \geq H(Y). \quad (13)$$

La stratégie optimale dans ce cas est que l'émetteur quantifie la source (quantification décrite par la variable auxiliaire U) et décrit le vecteur quantifié par le message M_1 au relais. Celui-ci vérifie si le vecteur quantifié est conjointement typique avec son observation. Si c'est le cas, il décide $\mathcal{H}_y = 0$, autrement il décide $\mathcal{H}_y = 1$. Le relais envoie le message M_2 suivant au récepteur. Le premier bit de M_2 indique si $\mathcal{H}_y = 0$ ou $\mathcal{H}_y = 1$. Le reste du message M_2 décrit l'observation Y^n au relais en utilisant une compression sans perte. Le récepteur décide $\mathcal{H}_z = 0$ si, et seulement si, $\mathcal{H}_y = 0$ et la suite Y^n décrite par la deuxième partie de M_2 est conjointement typique avec Z^n .

Théorème 1 Soient (11)–(13). Alors, $\mathcal{E}(R_1, R_2)$ est l'ensemble de toutes les paires (θ_1, θ_2) qui satisfont

$$0 \leq \theta_1 \leq I(U; Y), \quad (14)$$

$$0 \leq \theta_2 \leq I(U; Y) + I(Y; Z), \quad (15)$$

pour une variable auxiliaire U telle que la chaîne de Markov $U \rightarrow X \rightarrow (Y, Z)$ est vraie, ainsi que l'inégalité suivante :

$$R_1 \geq I(U; X). \quad (16)$$

Preuve : Les détails de la preuve d'atteignabilité sont omis. Pour la preuve du "converse" voir la section 3.

Le deuxième cas particulier suppose

$$P_{XYZ} = P_X \cdot P_{Z|X} \cdot P_{Y|Z}, \quad (17)$$

$$Q_{XYZ} = P_{XZ} \cdot P_Y \quad (18)$$

et la condition dans (13).

La stratégie optimale dans ce cas est quasiment la même que dans le premier cas. La seule différence est qu'il n'est pas nécessaire que le relais envoie sa décision \mathcal{H}_y au récepteur, car la connaissance de la suite Y^n est plus intéressante pour le récepteur que toute autre information sur la paire (X^n, Y^n) .

Théorème 2 Soient (13), (17) et (18). Alors, $\mathcal{E}(R_1, R_2)$ est l'ensemble des paires (θ_1, θ_2) qui satisfont

$$0 \leq \theta_1 \leq I(U; Y), \quad (19)$$

$$0 \leq \theta_2 \leq I(Y; Z), \quad (20)$$

Preuve : Omise.

Le troisième cas particulier suppose (17) et les deux conditions suivantes

$$Q_{XYZ} = P_X \cdot P_{YZ}, \quad (21)$$

$$R_2 \geq R_1. \quad (22)$$

La stratégie optimale dans ce cas est que l'émetteur quantifie la source (cette quantification est décrite par la variable auxiliaire S) et décrit le vecteur quantifié par le message M_1 au relais. Celui-ci vérifie si le vecteur quantifié est conjointement typique avec son observation Y^n . Si c'est le cas, il décide $\mathcal{H}_y = 0$, autrement $\mathcal{H}_y = 1$. Le relais envoie le message $M_2 = M_1$ au récepteur, qui décide $\mathcal{H}_z = 0$ si, et seulement si, le vecteur quantifié est conjointement typique avec Z^n .

Théorème 3 Soient (17), (21) et (22). Alors, $\mathcal{E}(R_1, R_2)$ est l'ensemble des paires (θ_1, θ_2) qui satisfont

$$0 \leq \theta_1 \leq I(S; Y), \quad (23)$$

$$0 \leq \theta_2 \leq I(S; Z), \quad (24)$$

pour une variable auxiliaire S telle que la chaîne de Markov $S \rightarrow X \rightarrow (Y, Z)$ est vraie, ainsi que l'inégalité suivante :

$$R_2 \geq R_1 \geq I(S; X). \quad (25)$$

Preuve : Omise.

2.2 Résultat d'Atteignabilité Général

Selon les résultats obtenus dans la sous-section précédente, pour certains cas particuliers la stratégie optimale au relais est de transférer directement le message reçu par l'émetteur au récepteur (voir Théorème 3). Dans d'autres cas particuliers, la stratégie optimale est que le relais envoie une version comprimée de son observation au récepteur. Dans d'autres cas encore, le relais doit envoyer au récepteur sa propre observation ainsi que sa propre décision sur l'hypothèse. Nous comptons unifier ces stratégies dans une seule stratégie pour le cas général. Plus précisément, nous proposons que l'émetteur envoie deux informations de quantifications au relais comme proposé pour la compression à multi-sauts dans [9, 10]. Une de ces informations est destinée uniquement au relais (celle-ci est indiquée par la variable U), et l'autre est destinée au relais ainsi qu'au récepteur (celle-ci est indiquée par S). Le relais envoie un message M_2 qui consiste en trois parties : le premier bit de M_2 indique la décision \mathcal{H}_y prise au relais ; une deuxième partie transfère l'information de quantification provenant de l'émetteur et destinée au relais *et* au récepteur ; et une troisième partie est obtenue après un traitement au relais de sa propre observation avec les quantifications reçues de l'émetteur.

Théorème 4 $\mathcal{E}(R_1, R_2)$ contient toutes les paires (θ_1, θ_2) qui satisfont les deux inégalités suivantes :

$$\theta_1 \leq \min_{\substack{\tilde{P}_{SUXY}: \\ \tilde{P}_{SUX} = P_{SUX} \\ \tilde{P}_{SUY} = P_{SUY}}} D(\tilde{P}_{SUXY} || P_{SU|X} Q_{XY}), \quad (26)$$

$$\theta_2 \leq \min_{\substack{\tilde{P}_{SUVXYZ}: \\ \tilde{P}_{SUX} = P_{SUX} \\ \tilde{P}_{SUVY} = P_{SUVY} \\ \tilde{P}_{SVZ} = P_{SVZ}}} D(\tilde{P}_{SUVXYZ} || P_{SU|X} P_{V|SUY} Q_{XYZ}) - I(U; V|S) \quad (27)$$

pour un triplet de variable auxiliaires (U, S, V) tel que les chaînes de Markov $(U, S) \rightarrow X \rightarrow (Y, Z)$ et $V \rightarrow (S, Y, U) \rightarrow Z$ et les deux inégalités suivantes sont vraies :

$$R_1 \geq I(U, S; X), \quad (28)$$

$$R_2 \geq I(X; S) + I(V; Y, U|S). \quad (29)$$

Esquisse de Preuve : Soient $\epsilon > 0$ un nombre réel proche de 0, n une taille de bloc, et $P_{U,S|X}$ et $P_{V|S,Y}$ des lois de probabilité conditionnelles. On choisit des taux $R_u, R_s, R_v \geq 0$ de façon à satisfaire

$$R_u + R_s > I(U, S; X), \quad (30)$$

$$R_s > I(X; S), \quad (31)$$

$$R_v > I(V; Y, U|S). \quad (32)$$

Soit $R_1 = R_u + R_s$ et $R_2 = R_s + R_v$.

Génération du Codebook : On construit aléatoirement un codebook $\mathcal{C}_S \triangleq \{S^n(j) : j \in \{1, \dots, \lfloor 2^{nR_s} \rfloor\}\}$ en choisissant chaque symbole de chaque mot de code de longueur n i.i.d. selon une loi de probabilité P_S . Pour chaque indice $j \in \{1, \dots, \lfloor 2^{nR_s} \rfloor\}$, on construit aléatoirement un codebook $\mathcal{C}_U(j) \triangleq \{U^n(i|j) : i \in \{1, \dots, \lfloor 2^{nR_u} \rfloor\}\}$ en choisissant le ℓ -ième symbole de chaque mot de code de longueur n selon une loi de probabilité $P_{U|S}(\cdot | S_\ell(j))$, où $S_\ell(j)$ est le ℓ -ième symbole du mot de code $S^n(j)$. De la même manière, pour chaque indice $j \in \{1, \dots, \lfloor 2^{nR_s} \rfloor\}$, on construit aléatoirement un codebook $\mathcal{C}_V(j) \triangleq \{V^n(k|j) : k \in \{1, \dots, \lfloor 2^{nR_v} \rfloor\}\}$, où on utilise $P_{V|S}$ au lieu de $P_{U|S}$.

Émetteur : L'émetteur cherche une paire (i, j) telle que

$$(X^n, S^n(j), U^n(i|j)) \in A_\epsilon^n(P_{XSU}). \quad (33)$$

S'il trouve une telle paire, il l'envoie au relais en utilisant le message M_1 . Il choisit donc $M_1 = (i, j)$. Autrement, il envoie $M_1 = 0$.

Relais : Le relais vérifie si $(U^n(i|j), S^n(j), Y^n) \in A_\epsilon^{(n)}(P_{USY})$. Si cette condition n'est pas vérifiée, il décide $\hat{\mathcal{H}}_y = 1$ et envoie $M_2 = 0$ au récepteur. Par contre, si la condition est vérifiée, il décide $\hat{\mathcal{H}}_y = 0$ et cherche un k tel que

$$(V^n(k|j), S^n(j), U^n(i|j), Y^n) \in A_\epsilon^{(n)}(P_{VSUY}). \quad (34)$$

Si un tel indice existe, le relais envoie $M_2 = (j, k)$ au récepteur. Sinon il envoie $M_2 = 0$.

Receiver : Si $M_2 = 0$, alors le récepteur décide $\hat{\mathcal{H}}_z = 1$. Autrement, il vérifie si

$$(V^n(k|j), S^n(j), Y^n) \in A_\epsilon^{(n)}(P_{VSY}). \quad (35)$$

Si cette condition est vérifiée, il déclare $\hat{\mathcal{H}}_z = 0$, sinon il déclare $\hat{\mathcal{H}}_z = 1$.

Analyse : Omise.

3 Preuve du Converse du Théorème 1

Soit $U_i \triangleq (M_1, X^{i-1})$. On considère en premier lieu

$$nR_1 = H(M_1) \geq I(M_1; X^n)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n I(M_1; X_i | X^{i-1}) \\
&\stackrel{(a)}{=} \sum_{i=1}^n I(M_1, X^{i-1}; X_i) \\
&= \sum_{i=1}^n I(U_i; X_i)
\end{aligned}$$

où (a) est vraie parce que la suite X^n est i.i.d. On considère ensuite l'exposant d'erreur de type II au relais :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{n} \log \beta_{1,n} &\leq \frac{1}{n} D(P_{M_1 Y^n | \mathcal{H}=0} \| P_{M_1 Y^n | \mathcal{H}=1}) + \epsilon \\
&\stackrel{(a)}{=} \frac{1}{n} I(M_1; Y^n) + \epsilon \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(M_1; Y_i | Y^{i-1}) + \epsilon \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(M_1, Y^{i-1}; Y_i) + \epsilon \\
&\stackrel{(b)}{\leq} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(M_1, X^{i-1}; Y_i) + \epsilon \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(U_i; Y_i) + \epsilon \tag{36}
\end{aligned}$$

où (a) est vraie parce que sous l'hypothèse $\mathcal{H} = 1$, les variables aléatoires M_1 et Y^n sont indépendantes ; (b) est vraie à cause de la chaîne de Markov $Y^{i-1} \rightarrow (M_1, X^{i-1}) \rightarrow Y_i$. Finalement, on considère l'exposant d'erreur du type II au récepteur :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{n} \log \beta_{2,n} &\leq \frac{1}{n} D(P_{M_2 Z^n | \mathcal{H}=0} \| P_{M_2 Z^n | \mathcal{H}=1}) + \epsilon \\
&\stackrel{(a)}{\leq} \frac{1}{n} D(P_{M_1 Y^n Z^n | \mathcal{H}=0} \| P_{M_1 Y^n Z^n | \mathcal{H}=1}) + \epsilon \\
&= \frac{1}{n} D(P_{M_1 Y^n | \mathcal{H}=0} \| P_{M_1 Y^n | \mathcal{H}=1}) \\
&+ \frac{1}{n} \mathbb{E}_{M_1 Y^n} [D(P_{Z^n | M_1 Y^n \mathcal{H}=0} \| P_{Z^n | M_1 Y^n \mathcal{H}=1})] \\
&+ \epsilon \\
&\stackrel{(b)}{=} \frac{1}{n} I(M_1; Y^n) + \frac{1}{n} I(M_1, Y^n; Z^n) + \epsilon \\
&= \frac{1}{n} I(M_1; Y^n) + \frac{1}{n} I(Y^n; Z^n) \\
&+ \frac{1}{n} I(M_1; Z^n | Y^n) + \epsilon \\
&\stackrel{(c)}{=} \frac{1}{n} I(M_1; Y^n) + \frac{1}{n} I(Y^n; Z^n) + \epsilon \\
&\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(U_i; Y_i) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(Y_i; Z_i) + \epsilon, \tag{37}
\end{aligned}$$

où (a) est vraie parce que M_2 est une fonction de (M_1, Y^n) ; (b) est vraie parce que sous $\mathcal{H} = 1$ les variables aléatoires (M_1, Y^n, Z^n) sont mutuellement indépendantes ; (c) est vraie à cause de la chaîne de Markov $M_1 \rightarrow X^n \rightarrow Y^n \rightarrow Z^n$. L'inégalité (37) est vraie pour les mêmes raisons que l'inégalité

(36) et parce que (Y^n, Z^n) sont i.i.d. Des étapes standard, comme l'introduction d'une variable du division de temps, concluent la preuve.

4 Conclusion

Nous avons considéré un problème de test d'hypothèse binaire à trois terminaux où la communication s'effectue sur deux sauts. Nous avons proposé un schéma de codage général qui combine l'idée de quantification de Han [5] avec des techniques de codage source et avec une stratégie où le destinataire décide uniquement de l'hypothèse nulle si le relais en a décidé. Nous avons montré que différentes versions simplifiées de ce schéma général sont optimales pour certains cas spéciaux.

Références

- [1] A. Ahlswede and I. Csiszar, "Hypothesis testing with communication constraints," *IEEE Trans. on Info. Theory*, vol. 32, no. 4, pp. 533–542, Jul. 1986.
- [2] H. Shimokawa, T. Han and S. I. Amari, "Error bound for hypothesis testing with data compression," in *Proc. IEEE Int. Symp. on Info. Theory*, Jul. 1994, pp. 114.
- [3] T. Han and S. I. Amari, "Statistical inference under multi-terminal data compression," *IEEE Trans. on Info. Theory*, vol. 44, no. 6, pp. 2300–2324, Oct. 1998.
- [4] C. Tian and J. Chen, "Successive refinement for hypothesis testing and lossless one-helper problem," *IEEE Trans. on Info. Theory*, vol. 54, no. 10, pp. 4666–4681, Oct. 2008.
- [5] T. S. Han, "Hypothesis testing with multiterminal data compression," *IEEE Trans. on Info. Theory*, vol. 33, no. 6, pp. 759–772, Nov. 1987.
- [6] Y. Xiang and Y. H. Kim, "Interactive hypothesis testing against independence," in *Proc. IEEE Int. Symp. on Info. Theory*, Istanbul, Turkey, pp. 2840–2844, Jun. 2013.
- [7] W. Zhao and L. Lai, "Distributed testing against independence with multiple terminals," in *Proc. 52nd Allerton Conf. Comm. Cont. and Comp.*, IL, USA, pp. 1246–1251, Oct. 2014.
- [8] M. S. Rahman and A. B. Wagner, "On the Optimality of binning for distributed hypothesis testing," *IEEE Trans. on Info. Theory*, vol. 58, no. 10, pp. 6282–6303, Oct. 2012.
- [9] P. Cuff, H. I. Su and A. El Gamal, "Cascade multiterminal source coding," in *Proc. IEEE Int. Symp. on Info. Theory*, Seoul, Korea, Jun.-Jul. 2009, pp. 1199–1203.
- [10] H. H. Permuter and T. Weissman, "Cascade and triangular source coding with side information at the first two nodes," in *Proc. IEEE Int. Symp. on Info. Theory*, Austin, Texas, USA, Jun. 2010, pp. 31–35.