

Échantillonnage de signaux sur graphes via des processus déterminantaux

Nicolas TREMBLAY, Simon BARTHELMÉ, Pierre-Olivier AMBLARD

GIPSA-LAB, CNRS, Grenoble, France
prenom.nom@gipsa-lab.fr

Résumé – Nous considérons l'échantillonnage de signaux sur graphe à bande limitée k , *i.e.*, les combinaisons linéaires des k premiers modes de Fourier du graphe. Il existe k nœuds du graphe qui permettent leur reconstruction parfaite, les trouver nécessite cependant une diagonalisation partielle de la matrice laplacienne, trop coûteuse à grande dimension. Nous proposons une nouvelle méthode rapide d'échantillonnage basée sur des processus déterminantaux qui permet la reconstruction à partir d'un nombre d'échantillons de l'ordre de k .

Abstract – We consider the problem of sampling k -bandlimited graph signals, *i.e.*, linear combinations of the first k graph Fourier modes. We know that a set of k nodes embedding all k -bandlimited signals always exists, thereby enabling their perfect reconstruction after sampling. Unfortunately, to exhibit such a set, one needs to partially diagonalize the graph Laplacian, which becomes prohibitive at large scale. We propose a novel strategy based on determinantal point processes that side-steps partial diagonalisation and enables reconstruction with only $O(k)$ samples.

1 Introduction

Étant donnée une certaine classe de signaux, échantillonner consiste à mesurer un signal un nombre de fois suffisant pour une certaine tâche, *e.g.* à des fins de reconstruction. Pour les signaux définis sur des graphes, une classe de régularité souvent utilisée est celle des signaux à bande limitée k (cf la définition 1). Dans ce contexte, il existe deux types de méthodes d'échantillonnage : i) celles qui calculent les k premiers modes de Fourier du graphe et cherchent via des heuristiques k nœuds qui les discriminent tous [2], ii) celles qui s'affranchissent de ce calcul, et qui soit cherchent un nombre de nœuds proche de k et résolvent des problèmes combinatoires qui ne passent pas à l'échelle [3], soit s'autorisent un nombre de nœuds de l'ordre de $O(k \log k)$ et permettent de passer à l'échelle via un échantillonnage iid adapté au graphe [4], soit via des marches aléatoires sur graphe spécifiques [5].

Contributions. Nous proposons une méthode basée sur les processus ponctuels déterminantaux (PPD) [6], des processus aléatoires connus pour favoriser la diversité des échantillons. Nous adaptons un algorithme d'échantillonnage de PPD, et montrons comment cet algorithme peut être utilisé dans le cadre de l'échantillonnage des signaux à bande limitée sur graphe.

2 Notations et objectif

Les matrices sont en majuscule, *e.g.* K ; les vecteurs en minuscules et en gras, *e.g.* \mathbf{x} ; les ensembles en cursive, *e.g.* \mathcal{A} ; $K_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ est la restriction de K aux lignes (resp. colonnes) indexées par les éléments de \mathcal{A} (resp. \mathcal{B}); enfin : $K_{\mathcal{A}} = K_{\mathcal{A},\mathcal{A}}$. On note δ_s le vecteur dont les entrées sont nulles sauf en s , et I_n la matrice identité de dimension n . Soit \mathcal{G} un graphe composé de N nœuds interconnectés selon la matrice d'adjacence $W \in$

$\mathbb{R}^{N \times N}$ tel que $W_{ij} = W_{ji} \geq 0$ représente le poids associé au lien connectant i à j . Notons D la matrice diagonale des degrés : on a $D_{ii} = \sum_j W_{ij}$. Le laplacien associé à \mathcal{G} s'écrit $L = D - W \in \mathbb{R}^{N \times N}$, il est semi-défini positif et se diagonalise en $L = U\Lambda U^T$, où $U = (\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2 | \dots | \mathbf{u}_N) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ est la matrice de ses vecteurs propres et $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ la matrice diagonale de ses valeurs propres, rangées dans l'ordre croissant $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$. Par analogie au traitement du signal discret classique, \mathbf{u}_i est considéré comme le i -ème mode de Fourier du graphe [7]. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on définit $U_k = (\mathbf{u}_1 | \dots | \mathbf{u}_k) \in \mathbb{R}^{N \times k}$ la concaténation des k premiers modes de Fourier du graphe. Un signal à bande limitée se définit alors :

Définition 1 (Signal à bande limitée k). *Un signal $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ défini sur les nœuds d'un graphe \mathcal{G} est à bande limitée $k \in \mathbb{N}^*$ si $\mathbf{x} \in \text{span}(U_k)$, *i.e.*, $\exists \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^k$ tel que $\mathbf{x} = U_k \boldsymbol{\alpha}$.*

En notant m le nombre de mesures, échantillonner consiste à choisir un ensemble de m nœuds $\mathcal{A} = \{s_1, \dots, s_m\}$. Notons $M = (\delta_{s_1} | \delta_{s_2} | \dots | \delta_{s_m})^T \in \mathbb{R}^{m \times N}$ la matrice de mesure associée : le signal $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ mesuré en \mathcal{A} s'écrit

$$\mathbf{y} = M\mathbf{x} + \mathbf{n} \in \mathbb{R}^m, \quad (1)$$

où $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^m$ est un bruit de mesure. Étant donné que \mathbf{x} est supposé être à bande limitée k , on le reconstruit à partir de sa mesure \mathbf{y} en calculant $\mathbf{x}_{\text{rec}} = U_k(MU_k)^{\dagger} \mathbf{y}$, où $(MU_k)^{\dagger}$ est le pseudo-inverse de Moore-Penrose de $MU_k \in \mathbb{R}^{m \times k}$. Notons $\sigma_1 \leq \dots \leq \sigma_k$ les valeurs singulières de MU_k . Le signal \mathbf{x} est parfaitement reconstitué (au bruit près) à partir de \mathbf{y} si $U_k^T M^T M U_k$ est inversible, *i.e.*, si $\sigma_1^2 > 0$. Dans ce cas :

$$\mathbf{x}_{\text{rec}} = U_k (U_k^T M^T M U_k)^{-1} U_k^T M^T \mathbf{y} \quad (2)$$

$$= \mathbf{x} + U_k (U_k^T M^T M U_k)^{-1} U_k^T M^T \mathbf{n}. \quad (3)$$

Algorithm 1 Échantillonner un m -PPD à noyau K [8, Sec 2.4]

Entrée : K, m
 $\mathcal{S} \leftarrow \emptyset$, définir $p_0 = \text{diag}(K) \in \mathbb{R}^N$
 $p \leftarrow p_0$
for $n = 1, \dots, m$ **do** :
• Tirer s_n avec probabilité $\mathbb{P}(s) = p(s) / \sum_i p(i)$
• $\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S} \cup \{s_n\}$
• Mettre à jour $p : \forall i \quad p(i) = p_0(i) - K_{\mathcal{S},i}^T K_{\mathcal{S}}^{-1} K_{\mathcal{S},i}$
end for
Sortie : $\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{S}$.

Parmi tous les choix possibles de \mathcal{A} (et donc de M) qui vérifient $\sigma_1^2 > 0$, lesquels sont optimaux ? Il existe plusieurs définitions d’optimalité [5], nous nous intéressons ici à la suivante :

$$\mathcal{A}^{\text{MV}} = \arg \max_{\mathcal{A} \text{ s.t. } |\mathcal{A}|=k} \prod_{i=1}^k \sigma_i^2, \quad (4)$$

où “MV” signifie “volume maximal” : en effet, en maximisant le produit des valeurs singulières, on maximise le déterminant de $U_k^T M^T M U_k$, c’est-à-dire le volume formé par les k lignes échantillonnées de U_k . Trouver \mathcal{A}^{MV} est NP-complet [1]. Notre objectif est de s’en approcher, c’est-à-dire : trouver un ensemble de taille k (comme \mathcal{A}^{MV}) ou proche de k tel qu’on ait la meilleure reconstruction possible des signaux à bande limitée k .

3 Processus déterminantaux

Notons $[N]$ l’ensemble des sous-ensembles de $\{1, \dots, N\}$ et $K \in \mathbb{R}^{N \times N}$ une matrice semi-définie positive (SDP). On convient que $\det(\emptyset) = 1$.

Définition 2 (m -PPD). *Considérons un processus ponctuel, i.e., un processus qui tire aléatoirement un ensemble $\mathcal{A} \in [N]$. Ce processus est un m -PPD à noyau K si :*

- i) $\mathbb{P}(\mathcal{A}) = 0$, pour tout \mathcal{A} tel que $|\mathcal{A}| \neq m$.
- ii) $\mathbb{P}(\mathcal{A}) = \frac{1}{Z} \det(K_{\mathcal{A}})$, pour tout \mathcal{A} tel que $|\mathcal{A}| = m$, où Z est la constante de normalisation.

Proposition 1. *Si K est un noyau de projection, i.e., $K = XX^T$ avec $X \in \mathbb{R}^{N \times d}$ et $X^T X = I_d$, et si $d \geq m$, alors l’algorithme 1 échantillonne un m -PPD à noyau K .*

Démonstration. Notons \mathcal{S}_n (resp. $p_n(i)$) l’ensemble des n échantillons obtenus (resp. la valeur de $p(i)$) à l’issue de l’étape n de la boucle de l’algorithme 1. On a : $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_{n-1} \cup \{s_n\}$. En utilisant le complément de Schur, on a : $\forall n \in [1, m], \forall i$,

$$\begin{aligned} \det(K_{\mathcal{S}_{n-1} \cup \{i\}}) &= \left(K_{i,i} - K_{\mathcal{S}_{n-1},i}^T K_{\mathcal{S}_{n-1}}^{-1} K_{\mathcal{S}_{n-1},i} \right) \det(K_{\mathcal{S}_{n-1}}) \\ &= p_{n-1}(i) \det(K_{\mathcal{S}_{n-1}}). \end{aligned} \quad (5)$$

À partir de (5), et sachant que i) K est SDP : $\forall \mathcal{S}, \det(K_{\mathcal{S}}) \geq 0$, ii) $d \geq m$, on peut montrer que $p_n(i) \geq 0$ et $\sum_i p_n(i) \neq 0$, c’est-à-dire qu’à chaque itération de la boucle, la probabilité $\mathbb{P}(s)$ est bien définie. La boucle étant répétée m fois, la sortie de l’algorithme, notée \mathcal{A} , est nécessairement de taille m , en accord avec le point i) de la Déf. 2. Enfin, montrons que $\mathbb{P}(\mathcal{A})$ est conforme au point ii). Par construction de \mathcal{A} :

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}) = \prod_{l=1}^m \mathbb{P}(s_l | s_1, s_2, \dots, s_{l-1}) = \prod_{l=1}^m \frac{p_{l-1}(s_l)}{\sum_{i=1}^N p_{l-1}(i)}. \quad (6)$$

Algorithm 2 Échantillonner un m -PPD, algorithme équivalent

Entrée : $K = [k_1, \dots, k_N], m$
 $\mathcal{S} \leftarrow \emptyset$, définir $p = \text{diag}(K) \in \mathbb{R}^N$
for $n = 1, \dots, m$ **do** :
• Tirer s_n avec probabilité $\mathbb{P}(s) = p(s) / \sum_i p(i)$
• $\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S} \cup \{s_n\}$
• Calculer $f_n = k_{s_n} - \sum_{l=1}^{n-1} f_l f_l(s_n)$
• Normaliser $f_n \leftarrow f_n / \sqrt{f_n(s_n)}$
• Mettre à jour $p : \forall i \quad p(i) \leftarrow p(i) - f_n(i)^2$
end for
Sortie : $\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{S}$.

Or, en écrivant (5) pour $i = s_n$, et en itérant, on obtient : $\prod_{l=1}^m p_{l-1}(s_l) = \det(K_{\mathcal{A}})$. Reste à montrer que le dénominateur de (6) ne dépend pas des échantillons choisis. C’est là où l’hypothèse d’un noyau de projection est essentielle. On a :

$$\forall l \in [1, m], \sum_{i=1}^N p_{l-1}(i) = \sum_{i=1}^N p_0(i) - \sum_{i=1}^N K_{\mathcal{S}_{l-1},i}^T K_{\mathcal{S}_{l-1}}^{-1} K_{\mathcal{S}_{l-1},i}$$

On a $\sum_{i=1}^N p_0(i) = \text{Tr}(XX^T) = \text{Tr}(X^T X) = d$. De plus, soit M la matrice de mesure associée à \mathcal{S}_{l-1} :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N K_{\mathcal{S}_{l-1},i}^T K_{\mathcal{S}_{l-1}}^{-1} K_{\mathcal{S}_{l-1},i} &= \text{Tr}(XX^T M^T (MXX^T M^T)^{-1} MXX^T) \\ &= \text{Tr}((MXX^T M^T)^{-1} MXX^T X^T M) = \text{Tr}(I_{l-1}) = l-1, \end{aligned}$$

par invariance de la trace aux permutations circulaires. Ainsi :

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}) = \frac{1}{Z} \det(K_{\mathcal{A}}) \quad \text{avec } Z = \prod_{l=1}^m d - l + 1, \quad (7)$$

ce qui termine la preuve. \square

\mathcal{A}^{MV} , l’ensemble à approcher, est l’ensemble le plus probable du m -PPD (avec $m = k$) à noyau $K_k = U_k U_k^T$. Si nous avons les ressources pour calculer U_k , une première stratégie d’échantillonnage est donc l’Alg. 1 appliqué à K_k . Dans le cas contraire, nous proposons dans la suite un nouvel algorithme d’échantillonnage de m -PPD, de complexité inférieure d’un facteur m , qui permet d’appliquer des techniques d’approximation polynomiale, évitant ainsi toute étape de diagonalisation.

4 Approximation via des filtres sur graphe

4.1 Réécriture de l’algorithme d’échantillonnage

Proposition 2. *L’algorithme 2 est équivalent à l’algorithme 1 : il échantillonne aussi un m -PPD à noyau de projection K .*

Démonstration. Considérons $\mathcal{S}_n, \mathcal{S}_{n-1}, p_n(i)$ définis comme précédemment et montrons que les $p_n(i)$ dans les boucles des deux algorithmes sont égaux. Dans l’Alg. 2 : $p_n(i) = p_{n-1}(i) - f_n(i)^2 = p_0(i) - \sum_{l=1}^n f_l(i)^2$ (où les $\{f_l\}$ sont définis dans l’algorithme ; notamment : $f_1 = k_{s_1}$). En comparant avec $p_n(i)$ obtenu dans l’Alg. 1, il suffit de montrer que :

$$\forall n \forall i \quad \sum_{l=1}^n f_l(i)^2 = K_{\mathcal{S}_n,i}^T K_{\mathcal{S}_n}^{-1} K_{\mathcal{S}_n,i}. \quad (8)$$

Nous allons montrer plus généralement que :

$$\forall n \forall i, j \quad \sum_{l=1}^n f_l(i) f_l(j) = \mathbf{K}_{\mathcal{S}_n, i}^T \mathbf{K}_{\mathcal{S}_n}^{-1} \mathbf{K}_{\mathcal{S}_n, j}. \quad (9)$$

Pour ce faire, nous proposons une récurrence.

Initialisation. C'est vrai pour $n = 1$, où \mathcal{S}_n est réduit à $\{s_1\}$:

$$\forall i, j \quad \mathbf{K}_{\mathcal{S}_n, i}^T \mathbf{K}_{\mathcal{S}_n}^{-1} \mathbf{K}_{\mathcal{S}_n, j} = \mathbf{K}_{s_1, i} \mathbf{K}_{s_1, j} / \mathbf{K}_{s_1, s_1} = f_1(i) f_1(j).$$

Hypothèse. Supposons que (9) est vraie à l'étape $n - 1$.

Récurrence. Montrons qu'elle est également vraie à l'étape n .

En utilisant l'identité de Woodbury sur $\mathbf{K}_{\mathcal{S}_n}^{-1}$, on montre que :

$$\mathbf{K}_{\mathcal{S}_n, i}^T \mathbf{K}_{\mathcal{S}_n}^{-1} \mathbf{K}_{\mathcal{S}_n, j} = \mathbf{K}_{\mathcal{S}_{n-1}, i}^T \mathbf{K}_{\mathcal{S}_{n-1}}^{-1} \mathbf{K}_{\mathcal{S}_{n-1}, j} + \frac{z_n(i) z_n(j)}{z_n(s_n)},$$

où $z_n(i) = \mathbf{K}_{\mathcal{S}_n, i} - \mathbf{K}_{\mathcal{S}_{n-1}, i}^T \mathbf{K}_{\mathcal{S}_{n-1}}^{-1} \mathbf{K}_{\mathcal{S}_{n-1}, i}$. En remplaçant $\mathbf{K}_{\mathcal{S}_{n-1}, i}^T \mathbf{K}_{\mathcal{S}_{n-1}}^{-1} \mathbf{K}_{\mathcal{S}_{n-1}, j}$ par $\sum_{l=1}^{n-1} f_l(i) f_l(j)$ grâce à l'hypothèse, il nous reste à montrer que :

$$\forall i, j \quad f_n(i) f_n(j) = \frac{z_n(i) z_n(j)}{z_n(s_n)}. \quad (10)$$

Or, par construction dans l'Algorithme 2, $f_n(i)$ s'écrit :

$$\forall i \quad f_n(i) = \frac{\mathbf{K}_{\mathcal{S}_n, i} - \sum_{l=1}^{n-1} f_l(i) f_l(s_n)}{\sqrt{\mathbf{K}_{\mathcal{S}_n} - \sum_{l=1}^{n-1} f_l(s_n)^2}}. \quad (11)$$

En utilisant une seconde fois l'hypothèse (2), on montre que :

$$\forall i \quad f_n(i) = \frac{z_n(i)}{\sqrt{z_n(s_n)}}, \quad (12)$$

ce qui prouve (10) et termine la preuve. \square

L'algorithme 2 est un algorithme général pour échantillonner un m -PPD à noyau de projection. Sa complexité est en $O(Nm^2)$, alors que la complexité de l'algorithme 1 est en $O(Nm^3)$. Notons que des idées similaires pour réduire la complexité d'un facteur m existent dans la littérature (par exemple dans [9]) mais sous des formes un peu cachées, et, à notre connaissance, n'ont jamais été vraiment explicitées dans le cas discret.

4.2 Approcher l'échantillonnage d'un PPD

Nous allons voir que la manière dont l'algorithme 2 fait appel à \mathbf{K} permet de tirer profit d'approximations polynomiales usuellement utilisées lors d'opérations de filtrage sur graphe. Rappelons que nous considérons le m -PPD associé au noyau \mathbf{K}_k . Or : $\mathbf{K}_k = \mathbf{U} h_k(\Lambda) \mathbf{U}^T$, où $h_k(\Lambda) = \text{diag}(h_k(\lambda_1), \dots, h_k(\lambda_N))$ et $h_k(\lambda)$ est tel que $h_k(\lambda) = 1$ si $\lambda \leq \lambda_k$ et $h_k(\lambda) = 0$ sinon. En traitement du signal sur graphes, \mathbf{K}_k est un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure λ_k .

Approximation polynomiale. [7] Considérons le polynôme de Tchebychev \tilde{h}_k de degré r qui approche au mieux h_k :

$$\forall \lambda \in [0, \lambda_N] \quad \tilde{h}_k(\lambda) = \sum_{l=1}^r \alpha_l \lambda^l \simeq h_k(\lambda).$$

$$\text{On a : } \mathbf{K}_k \simeq \mathbf{U} \tilde{h}_k(\Lambda) \mathbf{U}^T = \sum_{l=1}^r \alpha_l \mathbf{U} \Lambda^l \mathbf{U}^T = \sum_{l=1}^r \alpha_l \mathbf{L}^l = \tilde{h}_k(\mathbf{L}).$$

Filtrage rapide sur graphe. On ne calcule jamais explicitement $\tilde{h}_k(\mathbf{L})$ qui est en général dense de taille $N \times N$. En revanche, étant donné un signal \mathbf{x} défini sur le graphe, le signal filtré par h_k , $\mathbf{K}_k \mathbf{x}$, est approché par $\tilde{h}_k(\mathbf{L}) \mathbf{x} = \sum_{l=1}^r \alpha_l \mathbf{L}^l \mathbf{x}$,

Algorithm 3 Échantillonnage approché d'un m -PPD à noyau $\mathbf{K} = h_k(\mathbf{L})$

Entrée : \mathbf{L} , $h_k(\lambda)$, r , m

Calculer λ_N , la plus grande valeur propre de \mathbf{L}

Calculer le polynôme \tilde{h}_k de degré r approchant h_k sur $[0, \lambda_N]$

Estimer $\mathbf{p} = \text{diag}(\tilde{h}_k(\mathbf{L})) \in \mathbb{R}^N$ comme vu dans la Sec. 4.2

for $n = 1, \dots, m$ **do** :

• Tirer $s_n \leftarrow \text{argmax}(\mathbf{p})$

• Calculer $\mathbf{f}_n = \tilde{h}_k(\mathbf{L}) \boldsymbol{\delta}_{s_n} - \sum_{l=1}^{n-1} \mathbf{f}_l f_l(s_n)$

• Normaliser $\mathbf{f}_n \leftarrow \mathbf{f}_n / \sqrt{f_n(s_n)}$

• Mettre à jour $p(i) \leftarrow p(i) - f_n(i)^2$

end for

Output : $\mathcal{A} = \{s_1, \dots, s_m\}$

qui se calcule via r multiplications matrice-vecteur si bien que le nombre d'opérations nécessaires pour filtrer un signal est de l'ordre de $r|E|$ où $|E|$ est le nombre de liens du graphe.

Estimation de la diagonale de \mathbf{K}_k . Soit $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{N \times n}$ une matrice contenant n signaux aléatoires gaussiens de moyenne nulle et de variance $1/n$. Notons que :

$$\mathbb{E} \left(\left\| \boldsymbol{\delta}_i^T \tilde{h}_k(\mathbf{L}) \mathbf{R} \right\|^2 \right) = \boldsymbol{\delta}_i^T \tilde{h}_k(\mathbf{L}) \mathbb{E}(\mathbf{R} \mathbf{R}^T) \tilde{h}_k(\mathbf{L}) \boldsymbol{\delta}_i \quad (13)$$

$$= \boldsymbol{\delta}_i^T (\tilde{h}_k(\mathbf{L}))^2 \boldsymbol{\delta}_i \simeq \boldsymbol{\delta}_i^T \mathbf{K}_k^2 \boldsymbol{\delta}_i = \mathbf{K}_k(i, i) \quad (14)$$

La $i^{\text{ème}}$ valeur de la diagonale de \mathbf{K}_k , $p_0(i)$, est donc approchée par la norme de la $i^{\text{ème}}$ ligne de $\tilde{h}_k(\mathbf{L}) \mathbf{R}$, i.e. :

$$p_0(i) \simeq \left\| \boldsymbol{\delta}_i^T \tilde{h}_k(\mathbf{L}) \mathbf{R} \right\|^2, \quad (15)$$

et, via le lemme de Johnson-Lindenstrauss, on montre qu'un nombre de signaux aléatoires $n = O(\log N)$ est suffisant pour avoir une estimation convenable avec haute probabilité [10].

Algorithme d'approximation. On souhaite approcher l'algorithme 2 avec entrée \mathbf{K}_k sans avoir à calculer \mathbf{U}_k . Pour ce faire, on suit l'algorithme 3 en lui donnant comme entrée $^1 \mathbf{L}$, $h_k(\lambda)$, $r = 50$ et m le nombre d'échantillons souhaité. Au lieu d'accéder directement à la diagonale d'un noyau \mathbf{K} connu, on l'estime à l'aide de l'équation (15). Puis, au lieu d'accéder aux colonnes \mathbf{k}_s directement, on les estime via le filtrage rapide associé : $\mathbf{k}_s \simeq \tilde{h}_k(\mathbf{L}) \boldsymbol{\delta}_s$. Au vu des erreurs d'approximation successives, l'écart entre les $\{\mathbf{f}_i\}$ calculés au cours des algorithmes 2 et 3 ne cesse de s'accroître au fur et à mesure de la boucle. Pour stabiliser l'algorithme 3 : i) le nouvel échantillon est celui qui maximise \mathbf{p} (mise à part l'estimation de la diagonale de \mathbf{K} , l'algorithme n'est donc plus aléatoire); ii) et on s'autorise $m \geq k$ (ce qui n'a pas de sens pour l'algorithme 2 appliqué à \mathbf{K}_k qui est de rang k). Aussi, en pratique, on fait quelques modifications mineures : i) après la mise à jour de \mathbf{p} , on force $p(s_i) = 0$ pour tous les échantillons s_i déjà choisis; ii) lors de la normalisation de \mathbf{f}_n , si $\mathbf{f}_n(s_n) \leq 0$ à cause de l'approximation, alors on normalise \mathbf{f}_n par $\sqrt{\|\mathbf{f}_n\|/N}$. Ces choix sont cependant arbitraires : une comparaison rigoureuse des différentes possibilités de stabilisation fera l'objet de travaux futurs.

¹. pour avoir $h_k(\lambda)$, il faut λ_k , que nous estimons en suivant [4, Sec. 4.2].

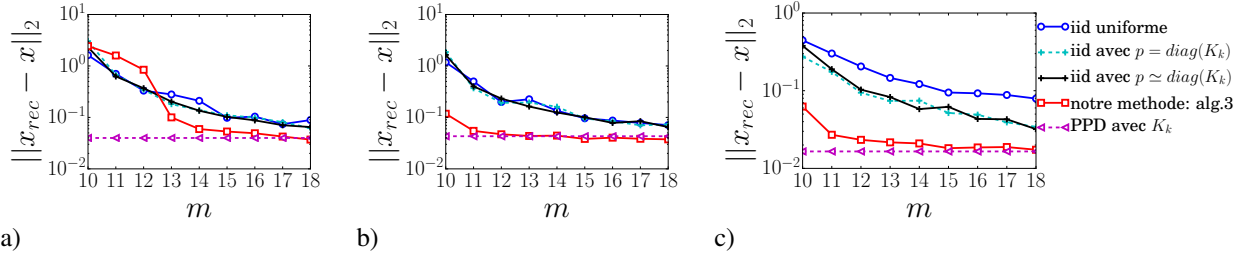


FIGURE 1 – Performance médiane obtenue en reconstruisant 100 signaux à bande limitée 10 sur a) le graphe du Minnesota, b) le graphe “Bunny”, c) une réalisation d’un MSB. Les méthodes en pointillés doivent calculer U_k pour échantillonner, les autres non. La méthode via le PPD à noyau K_k ne peut échantillonner que $m = 10$ nœuds : la droite horizontale associée est artificielle et sert uniquement à la comparaison.

5 Simulations

Trois graphes. Nous considérons le graphe routier du Minnesota ($N = 2642$), le graphe correspondant au maillage 3D d’un objet (graphe “Bunny” avec $N = 2503$), et une réalisation d’un graphe aléatoire avec communautés issue du modèle stochastique par blocs (MSB) avec $N = 1000$, 10 communautés de même taille et de paramètre de structure $\epsilon = \epsilon_c/4$, où ϵ_c correspond à la limite où les structures en communautés ne sont plus détectables ; et plus ϵ est petit, plus la structure en communautés est forte. Voir par exemple [5, sec. 4] pour des détails sur ϵ ; [4, Fig. 1] pour des illustrations des deux premiers graphes.

Pour générer les signaux à bande limitée. Dans tous ces exemples, nous choisissons $k = 10$. Chaque signal x à bande limitée k est généré en calculant U_k , puis en calculant $x = U_k \alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}^k$ est tiré aléatoirement selon une gaussienne $\mathcal{G}(0, 1)$, puis en normalisant x pour qu’il soit de norme 1.

Les différentes méthodes d’échantillonnage comparées. On compare 5 méthodes d’échantillonnage : i) l’échantillonnage iid uniforme sans remise, ii) l’échantillonnage iid selon $p = \text{diag}(K_k)$ sans remise (comme dans [4]), iii) la même stratégie mais avec une distribution $p \simeq \text{diag}(K_k)$ estimée via (15), iv) l’échantillonnage dépendant en suivant l’algorithme 3, et v) l’échantillonnage selon le PPD idéal, c’est-à-dire en suivant l’algorithme 1 avec la légère modification qu’à chaque itération de la boucle on tire l’échantillon qui maximise la probabilité (cela donne de meilleures performances de reconstruction dans les cas testés). Les quatre premières méthodes peuvent échantillonner un nombre quelconque de nœuds m ; la dernière échantillonne nécessairement k nœuds.

Le bruit de mesure $n \in \mathbb{R}^m$ est tiré selon une Gaussienne de moyenne nulle et d’écart-type σ , et est ajouté à la mesure du signal, comme dans (1). On fixe $\sigma = 10^{-3}$.

Reconstruction des signaux échantillonnés. Quelle que soit la méthode choisie, on reconstruit les signaux avec (2), c’est-à-dire avec la connaissance de U_k . Il existe des moyens de reconstruction qui ne nécessitent pas U_k (voir [4]) ; mais nous souhaitons ici comparer exclusivement l’échantillonnage.

Discussion des résultats. La Fig. 1 montre que notre méthode approche la performance du PPD à noyau K_k plus rapidement que les autres, dès $m = O(k)$. Pour le graphe du Minnesota, à petit m , notre performance est moindre. Ceci dit, nous retrouvons une meilleure performance pour d’autres choix de k . De nombreuses expériences ont été menées sur d’autres réalisations

du MSB, avec d’autres valeurs de k (différentes de $k = 10$ choisie ici), ϵ et σ , et des communautés de taille hétérogène : nous trouvons toujours des comportements similaires.

6 Conclusion

Nous proposons l’algorithme 2, une réécriture moins coûteuse de l’algorithme 1 d’échantillonnage de m -DPP à noyau de projection. Dans les cas où le noyau est de la forme $K = h_k(L)$ où L est une matrice diagonalisable (de préférence parcimonieuse), nous proposons l’algorithme 3 qui, via des approximations polynomiales, permet d’approcher l’échantillonnage du m -PPD associé à K sans jamais calculer explicitement K , potentiellement dense, et en évitant tout calcul de diagonalisation de L . Nous illustrons avec succès l’intérêt de cet algorithme pour l’échantillonnage de signaux sur graphe à bande limitée.

Remerciements. Ce travail a été en partie soutenu par le LabEx PERSYVAL-Lab (ANR-11-LABX-0025-01), l’ANR GenGP (ANR-16-CE23-0008), le LIA CNRS/Melbourne Univ Geodesic.

Références

- [1] A. Çivril, M. Magdon-Ismaïl. *On selecting a maximum volume sub-matrix of a matrix and related problems*. Theoretical Computer Science, no. 47, vol. 410, p. 4801–4811, 2009.
- [2] S. Chen, R. Varma, A. Sandryhaila, J. Kovacevic. *Discrete Signal Processing on Graphs : Sampling Theory*. IEEE Transactions on Signal Processing, no. 24, vol. 63, p. 6510–6523, 2015.
- [3] A. Anis, A. Gadde, A. Ortega. *Efficient Sampling Set Selection for Band-limited Graph Signals Using Graph Spectral Proxies*. IEEE Transactions on Signal Processing, no. 14, vol. 64, p. 3775–3789, 2016.
- [4] G. Puy, N. Tremblay, R. Gribonval, P. Vandergheynst. *Random sampling of bandlimited signals on graphs*. Applied and Computational Harmonic Analysis, in press, 2016.
- [5] N. Tremblay, P-O. Amblard, S. Barthélémy. *Graph sampling with determinantal processes*. arXiv preprint, 1703.01594, 2017.
- [6] A. Kulesza, B. Taskar. *Determinantal point processes for machine learning*. Found. and Trends in Mach. Learn., no. 2, vol. 5, p. 123–286, 2012.
- [7] D. Shuman, S. Narang, P. Frossard, A. Ortega, P. Vandergheynst. *The emerging field of signal processing on graphs : Extending high-dimensional data analysis to networks and other irregular domains*. IEEE Signal Processing Magazine, no. 3, vol. 30, p. 83–98, 2013.
- [8] R. Bardenet, A. Hardy. *Monte Carlo with determinantal point processes*. arXiv preprint, 1605.00361, 2016.
- [9] F. Lavancier, J. Moller, E. Rubak. *Determinantal point process models and statistical inference*. Journal of the Royal Statistical Society : Series B (Statistical Methodology), no. 4, vol. 77, p. 853–877, 2015.
- [10] N. Tremblay, G. Puy, R. Gribonval, P. Vandergheynst. *Accelerated spectral clustering using graph filtering of random signals*. ICASSP, 2016.