

Variation totale discrète en schéma décentré symétrique

Sonia TABTI*, Julien RABIN*, Abderrahim ELMOATAZ-BILLAH*

Normandie Univ, ENSICAEN, CNRS, GREYC
6 Bd du Maréchal Juin, Caen, France

{ Sonia.Tabti, Julien.Rabin, Abderrahim.Elmoataz-billah }@unicaen.fr

Résumé – Nous nous intéressons dans cet article à l’étude des formulations discrètes de la variation totale (TV) dites en “schémas décentrés” qui ont été proposées pour les images en formulation locale dans [2] et pour les graphes en formulation non locale dans [7]. En particulier, nous nous focalisons sur deux nouvelles formulations symétriques utilisant les normes ℓ^∞ et ℓ^2 respectivement pour lesquelles nous proposons un algorithme d’optimisation dont nous illustrons les propriétés.

Abstract – In this paper, we are interested in the study of the discrete formulations of the Total Variation (TV) based on “upwind scheme” that have been proposed for imaging problems in a local setting in [2] and in a non local setting for graphs and point-clouds in [7]. More precisely, we focus on two new symmetric formulations using the ℓ^∞ and the ℓ^2 norms respectively and propose a dedicated optimization algorithm with a study of its properties.

1 Introduction et motivation

Contexte Dans cet article nous nous intéressons à la formulation discrète de la variation totale (TV) pour les images numériques. Il s’agit d’un thème qui a été largement abordé dans la littérature depuis les travaux fondateurs de Rudin-Osher-Fatemi (ROF) [11] et qui reste encore aujourd’hui un domaine de recherche très actif, dont on citera pour exemple parmi les plus récentes contributions sa formulation non locale [9] et la variation totale généralisée (TGV) [1]. L’intérêt pratique de la variation totale n’est plus à démontrer, avec de nombreuses applications aux problèmes d’imagerie : segmentation d’image [4], inpainting et deconvolution [3], filtrage des images [8] et traitement des nuages de points et des maillages [10].

Motivation Dans [2], une nouvelle formulation discrète de la variation totale TV_u est proposée, inspirée des schémas « décentrés en amont » (ou *upwind*), utilisés en résolution numérique des équations aux dérivées partielles par éléments finis. Cette définition a été analysée récemment par Condat [5] qui démontre que, si le schéma décentré proposé par [2] est effectivement « plus isotrope » que les formulations usuelles, il souffre en contrepartie d’un manque d’invariance aux inversions de contraste. Ainsi, TV_u favorise l’apparition d’artefacts, en particulier des points lumineux isolés, ce qui est très pénalisant pour des applications de débruitage par exemple. Pour y remédier, Condat propose une nouvelle et élégante formulation duale de la variation totale TV_c qui s’affranchit de ce défaut. Toutefois, le prix à payer est l’absence de formulation explicite de TV_c . Par ailleurs, ces approches ne vérifient pas la

formule discrète de la co-aire. Ce principe, vérifié par la définition discrète usuelle de la TV anisotrope (notée par la suite $TV_{|1}$), permet de résoudre certains problèmes non convexes par relaxation convexe, comme en segmentation par exemple [4].

Dans cet article, nous étudions deux formulations non locales de la variation totale, ce type de formulation étant initialement proposé dans [7], qui reposent sur une définition symétrique combinant un schéma décentré en aval (*downwind*) avec un schéma décentré en amont (*upwind*) exprimés en norme ℓ^∞ et ℓ^2 respectivement. Nous proposons une manière efficace d’exprimer ces normes permettant de résoudre des problèmes d’optimisation convexes exploitant ce type de régularisation et d’en illustrer les propriétés sur quelques exemples numériques.

Organisation de l’article Dans la section 2, nous rappelons les définitions discrètes locales et non locales usuelles de la variation totale pour des schémas centrés et décentrés avant d’introduire les définitions symétriques étudiées. Nous nous intéressons ensuite, en section 3, à l’optimisation de ces formulations dans le cas d’un problème de débruitage. Les résultats numériques sont suivis par une discussion en conclusion.

2 Formulations variationnelles discrètes décentrées de la variation totale

Dans le paragraphe suivant, nous rappelons les notations standards liées à la formulation discrète de la variation totale non locale pour les images définies sur graphe.

*Ce travail a été financé par l’ANR-14-CE27-0001 GRAPH SIP et le FEDER/FSE 2014/2020 (projet GRAPH SIP).

2.1 Notations

Un graphe $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \omega)$ est défini par un ensemble de sommets \mathcal{V} liés par des arcs $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$, et une fonction de poids $\omega : \mathcal{E} \mapsto \mathbb{R}_+$. On parle de graphe symétrique ou non-orienté lorsque ω vérifie $\omega(v, u) = \omega(u, v) \forall (u, v) \in \mathcal{E}$. En pratique, cette relation est généralement vérifiée pour des applications en imagerie, sauf éventuellement aux bords du domaine où il existe des conditions particulières (par exemple, condition de Neumann).

On considère dans la suite une image scalaire f définie sur une grille régulière cartésienne $\Omega \subset \mathbb{Z}^2 : u : x \in \Omega \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$. On note $\partial\Omega$ le bord du domaine. Le graphe à n -connexité associé est noté $\mathcal{G}(\Omega, \mathcal{E}, \omega)$ où $\mathcal{E} = \{(x, x+t), \forall x \in \Omega \setminus \partial\Omega, t \in \mathcal{N}_n\}$ avec en pratique $\mathcal{N}_2 = \{(1, 0), (0, 1)\}$ ou $\mathcal{N}_4 = \{(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)\}$, et ω qui est constant.

Pour un champ $p : \mathcal{E} \mapsto \mathbb{R}$ associé à un graphe, le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la norme canonique $\|\cdot\|$ s'écrivent

$$\langle p, q \rangle = \sum_{(v,u) \in \mathcal{E}} p(v, u)q(v, u), \quad \|p\| = \sqrt{\langle p, p \rangle}. \quad (1)$$

Nous définissons également la norme composée $\|\cdot\|_{1,k}$:

$$\|p\|_{1,k} := \begin{cases} \left(\sum_{v \in \mathcal{V}} \left(\sum_{u: (u,v) \in \mathcal{E}} |p(v, u)|^k \right)^{\frac{1}{k}} \right)^{\frac{1}{k}}, & \text{si } 1 \leq k < \infty \\ \sum_{v \in \mathcal{V}} \max_{u: (u,v) \in \mathcal{E}} |p(v, u)|, & \text{si } k = \infty \end{cases} \quad (2)$$

qui sera utile pour unifier les différentes formulations de la variation totale étudiées. La norme duale correspond alors à :

$$\|p\|_{1,k}^* = \max_{\|q\|_{1,k^*} \leq 1} \langle p, q \rangle = \|p\|_{\infty, k^*} \text{ avec } \frac{1}{k} + \frac{1}{k^*} = 1. \quad (3)$$

On note **1** (respectivement **0**) les champs vectoriels où chaque composante est égale à 1 (resp. 0).

L'adjoint d'un opérateur linéaire K est noté K^* , tel que :

$$\langle Kp, q \rangle = \langle p, K^*q \rangle.$$

On note $(p)_+ = \max\{\mathbf{0}, p\}$ et $(p)_- = \min\{\mathbf{0}, p\}$ les opérateurs de seuillage appliqués à chaque composante de p . De même, la notation $p \geq \mathbf{0}$ signifie que chaque composante de p est positive ou nulle.

La fonction caractéristique d'un ensemble \mathcal{C} se note $\chi_{\mathcal{C}}$, et la fonction indicatrice $\mathbb{1}_{\mathcal{C}}$. L'opérateur proximal d'une application f est :

$$\text{Prox}_f(x) := \underset{y}{\text{argmin}} \frac{1}{2} \|x - y\|^2 + f(y). \quad (4)$$

2.2 Les opérateurs de différentiation décentrés

Nous rappelons ici différents opérateurs de différences sur graphe en suivant le cadre proposé dans [7]. Sans perte de généralité, et afin d'alléger les notations, nous considérerons par la suite des graphes complets $\mathcal{E} = \mathcal{V} \times \mathcal{V}$, où l'absence d'une arête est simplement indiquée par un poids ω nul. L'opérateur de différence centré s'écrit pour une fonction vectorielle sur \mathcal{G} :

$$\nabla_{\omega} f : v \in \mathcal{V} \mapsto \left(\sqrt{\omega(v, u)} (f(u) - f(v)) \right)_{u \in \mathcal{V}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{V}}. \quad (5)$$

Les opérateurs de différences décentrés en amont et en aval s'écrivent alors respectivement :

$$\begin{aligned} \nabla_{\omega}^{-} f : v \in \mathcal{V} &\mapsto (\nabla_{\omega} f(v))_{-} && \text{(upwind)} \\ \nabla_{\omega}^{+} f : v \in \mathcal{V} &\mapsto (\nabla_{\omega} f(v))_{+} && \text{(downwind)} \end{aligned} \quad (6)$$

L'adjoint de l'opérateur de différence noté $\nabla_{\omega}^* : \mathbb{R}^{\mathcal{E}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{V}}$ s'écrit dans le cas général :

$$\nabla_{\omega}^* p(v) = \sum_{u \in \mathcal{V}} \sqrt{\omega(u, v)} p(u, v) - \sum_{u \in \mathcal{V}} \sqrt{\omega(v, u)} p(v, u). \quad (7)$$

2.3 Formulations usuelles de la TV et propriétés

Formulation discrète de la co-aire Comme indiqué dans l'introduction, une propriété importante vérifiée par la définition continue de la variation totale est la formule de la co-aire, qui permet notamment de lier la notion de périmètre à la TV d'une image continue. En pratique, il est intéressant de vérifier que la formulation discrète de la variation totale vérifie également cette propriété, qui s'écrit dans notre cadre :

$$\text{TV}(f) = \int_{\mathbb{R}} \text{TV}(\chi_{\{f \geq t\}}) dt. \quad (8)$$

Formulations de la TV La plupart des formulations discrètes usuelles peuvent s'écrire sous la forme canonique suivante :

$$\text{TV}_{\omega|k}^{\diamond}(\cdot) := \|\nabla_{\omega}^{\diamond}\|_{1,k} \text{ avec } \diamond \in \{, +, -\}. \quad (9)$$

Lorsque l'on considère la définition locale de la variation totale scalaire sur le graphe en n -connexité $\mathcal{G}(\Omega, \mathcal{E}, \omega)$ où $\omega = \mathbf{1}$, on retrouve les définitions suivantes ¹

- $\text{TV}_{|2}$ avec $n = 2$: la variation totale isotrope [11],
- $\text{TV}_{|1}$ avec $n = 2$: la variation totale anisotrope,
- $\text{TV}_u = \text{TV}_{|2}^{-}$ avec $n = 4$: la variation totale isotrope *upwind* [2].

Notons que, parmi l'ensemble de ces définitions, seule $\text{TV}_{|1}$ vérifie la formule de la co-aire discrète (8).

Dans le cadre plus général des formulations non locales (NL-TV) où la fonction de poids ω est quelconque, nous retrouvons :

- $\text{TV}_{\omega|2}$: la variation totale isotrope non locale [9, 10],
- $\text{TV}_{\omega|k}, \text{TV}_{\omega|k}^{-}$ et $\text{TV}_{\omega|k}^{+}$ avec $k \in [1, \infty)$ [7].

Notons que parmi ces définitions, seules $\text{TV}_{\omega|1}^{\diamond}$ vérifient la co-aire discrète définie en équation (8).

Biais des schémas décentrés La proposition suivante montre que, contrairement aux formulations centrées usuelles $\text{TV}_{\omega|k}$, les schémas décentrés présentent un biais, sauf dans le cas particulier des graphes non-orientés avec $k = 1$.

Proposition 1 (Inversion de contraste). *On a la relation d'inversion de contraste suivante $\forall k \geq 1$ et $\forall \omega$*

$$\text{TV}_{\omega|k}^{-}(-f) = \text{TV}_{\omega|k}^{+}(f) \neq \text{TV}_{\omega|k}^{-}(f). \quad (10)$$

1. à des facteurs de normalisation près liés au choix du voisinage \mathcal{N}_n .

Dans le cas particulier $k = 1$, les schémas décentrés vérifient

$$\text{TV}_{\omega|1} = \frac{1}{2}\text{TV}_{\omega|1}^- + \frac{1}{2}\text{TV}_{\omega|1}^+ \quad (11)$$

$$\text{TV}_{\omega|1}^-(f) = \frac{1}{2}\text{TV}_{\omega|1}(f) - \frac{1}{2}\langle f, \nabla_{\omega}^* \mathbf{1} \rangle \quad (12)$$

où le second terme est nul dans le cas d'un graphe non-orienté.

Démonstration. L'équation (10) est la conséquence immédiate de la définition (6). L'équation (12) est une simple réécriture utilisant la propriété $2 \min(0, x) = x - |x|$, où

$$\nabla_{\omega}^* \mathbf{1} = \sum_u \sqrt{\omega(u, v)} - \sqrt{\omega(v, u)}$$

est nul si ω est symétrique. \square

Cette propriété de non-invariance à l'inversion de contraste est illustrée dans [5], qui montre que les structures claires ont une valeur de $\text{TV}_{\omega|2}^-$ plus faible que les pixels sombres, ce qui est très dommageable pour des applications de débruitage.

2.4 Formulation décentrée symétrique

S'inspirant de la relation (11), qui montre que l'on peut éliminer le biais en définissant un schéma décentré symétrique, nous nous intéressons maintenant à une définition symétrique de la variation totale pour ℓ^∞ et ℓ^2 .

Définition Nous proposons de considérer la formulation

$$\text{TV}_{\omega|k}^\pm := \frac{1}{2}\text{TV}_{\omega|k}^- + \frac{1}{2}\text{TV}_{\omega|k}^+ \text{ pour } k \in \{2, \infty\}. \quad (13)$$

Cette définition a été proposée dans [12] dans le cas $k = \infty$ mais n'a jamais été utilisée en pratique. On remarquera d'après l'équation (11) que $\text{TV}_{\omega|1}^\pm = \text{TV}_{\omega|1}$.

Propriétés La formulation symétrique (13) est une semi-norme et vérifie la proposition suivante dans le cas $k = \infty$.

Proposition 2 (Co-aire [12]). *Une condition suffisante pour que $\text{TV}_{\omega|k}^\pm$ vérifie la formule discrète de la co-aire (8) est que $\omega(v, u)$ soit constant en chaque sommet $v \in \mathcal{V}$.*

En utilisant les définitions de la section § 2.1, et notamment (3), on démontre la proposition suivante :

Proposition 3 (Formulation duale de $\text{TV}_{\omega|k}^\pm$ (13)).

$$\begin{aligned} \text{TV}_{\omega|k}^\pm(f) = \max_{r_1 \geq 0, r_2 \geq 0} & \frac{1}{2} \langle \nabla_{\omega} f, r_1 - r_2 \rangle \\ & - \chi_{\|r_1\|_{\infty, k^*} \leq 1} - \chi_{\|r_2\|_{\infty, k^*} \leq 1} \end{aligned}$$

où k^* vérifie $\frac{1}{k} + \frac{1}{k^*} = 1$.

3 Application et Optimisation

Problème inverse Afin de démontrer l'intérêt pratique des formulations décentrées symétriques étudiées auparavant, nous nous intéressons aux problèmes inverses de type ROF [11] :

$$\min_f \frac{1}{2} \|f - g\|^2 + \lambda \text{TV}_{\omega|k}^\pm(f). \quad (14)$$

Formulation duale En utilisant la proposition 3 on obtient le problème primal-dual suivant :

$$\min_{f \in \mathbb{R}^{\mathcal{V}}} \max_{r=(r_1, r_2)} \frac{1}{2} \|f - g\|^2 + \langle Kf, r \rangle - \chi_{r \in \mathcal{S}_{k^*}}, \quad (15)$$

où $K = \frac{\lambda}{2} [\nabla_{\omega}; -\nabla_{\omega}]$ (de telle sorte que $\|K\|^2 \leq 16\lambda^2$ avec le voisinage \mathcal{N}_4 et $\omega = 1$) et où on note l'ensemble convexe

$$\mathcal{S}_{k^*} = \{(r_1, r_2) : r_i \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{E}}, \|r_i\|_{\infty, k^*} \leq 1 \forall i \in \{1, 2\}\}.$$

Algorithme Le problème (15) peut être résolu avec l'algorithme de [3] en suivant ce schéma à l'itération t :

$$\begin{cases} r^{t+1} &= \text{Proj}_{\mathcal{S}_{k^*}}(r^t + \gamma^t K \bar{f}^t) \\ f^{t+1} &= \text{Prox}_{\frac{\tau^t}{2} \|\cdot - g\|^2}(f^t - \tau^t K^* r^{t+1}) \\ \bar{f}^{t+1} &= f^{t+1} + \theta^t (f^{t+1} - f^t) \\ \text{où } \theta^t &= 1/\sqrt{1 + 2\rho\tau^t}, \tau^{t+1} = \theta^t \tau^t, \gamma^{t+1} = \gamma^t / \theta^t \end{cases}$$

avec les conditions et réglages de paramètres suivants : $\tau^0, \gamma^0 > 0, \theta^0 \in [0, 1], \bar{f}^0 = g, \rho = 0.7/\lambda, \tau^0 = 0.99/\|K\|, \tau^t \gamma^t \|K\|^2 < 1$.

L'opérateur proximal s'écrit (voir par exemple [3]) :

$$\text{Prox}_{\frac{\tau}{2} \|\cdot - g\|^2}(f) = \frac{1}{1+\tau}(f + \tau g).$$

La proposition suivante exprime le projecteur sur \mathcal{S}_{k^*} comme le projecteur des parties positives sur la boule unité de ℓ^{k^*} .

Proposition 4 (Projection sur \mathcal{S}_{k^*}). *Pour $k^* \in \{1, 2\}$,*

$$\text{Proj}_{\mathcal{S}_{k^*}}(r_1, r_2) = (\hat{r}_1, \hat{r}_2) \text{ où } \hat{r}_i(v) = \text{Proj}_{\|\cdot\|_{k^*} \leq 1}((r_i(v))_+).$$

Démonstration. La projection sur \mathcal{S}_{k^*} est séparable en chaque sommet v de sorte que pour $x = r_i(v)$ on cherche

$$\underset{y \geq 0, \|y\|_{k^*} \leq 1}{\text{argmin}} \|y - x\| = \underset{y \geq 0}{\text{argmin}} \max_{\alpha \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{V}}, \beta \in \mathbb{R}_+} \mathcal{L}(y, \alpha, \beta),$$

où α et β sont les multiplicateurs positifs du lagrangien :

$$\mathcal{L}(y, \alpha, \beta) = \frac{1}{2} \|y - x\|^2 - \langle \alpha, y \rangle + \beta (\sum_u y(u)^{k^*} - 1).$$

En écrivant les conditions d'optimalité au premier ordre, on obtient les relations suivantes :

$$\begin{aligned} y(u) + \beta &= x(u) + \alpha(u) \text{ pour } k^* = 1 \\ (1 + 2\beta)y(u) &= x(u) + \alpha(u) \text{ pour } k^* = 2 \end{aligned}$$

En utilisant la condition d'optimalité $y(u) \geq 0 \Rightarrow \alpha(u) = 0$, un raisonnement par l'absurde montre alors que :

$$x(u) \leq 0 \Rightarrow y(u) = 0$$

ce qui permet d'obtenir le résultat souhaité. \square

Ainsi, pour $k^* = 2$, on retrouve le résultat de [2] avec

$$\text{Proj}_{\|\cdot\| \leq 1}(x) = \frac{x}{\max\{1, \|x\|\}}.$$

Pour $k^* = 1$, la projection sur la boule ℓ_1 se calcule en complexité linéaire (voir par exemple [6]).

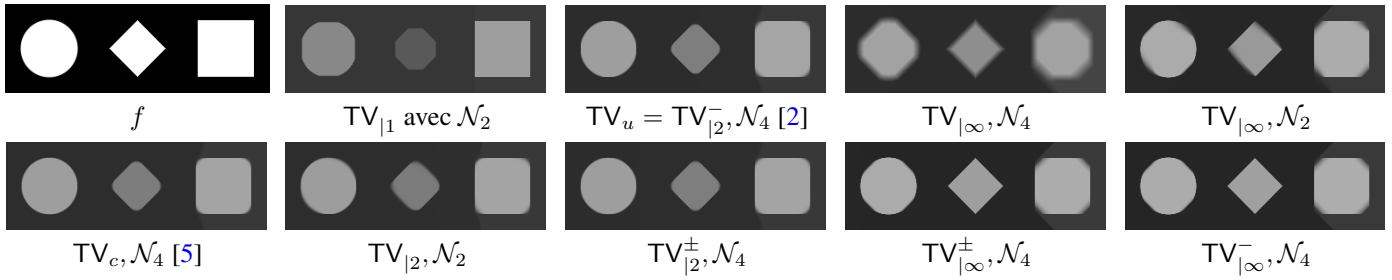


FIGURE 1 – Régularisations de l'image f avec 10^3 itérations et $\lambda = 6$.

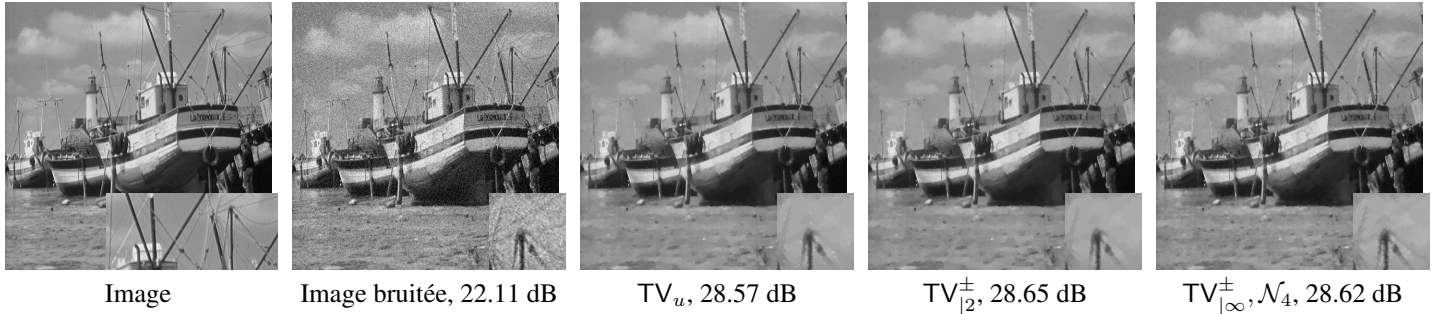


FIGURE 2 – Débruitage d'une image sur la même réalisation de bruit gaussien (d'écart-type $\sigma = 20$), avec 4000 itérations et $\lambda = 0.08$. Les formulations proposées ($TV_{|k}^{\pm}$) ne souffrent pas du biais observé avec TV_u , obtenant ainsi un meilleur PSNR.

4 Expérimentations et discussion

Étude de la préservation des bords En figure 1 est illustré la régularisation d'une image synthétique composée des éléments structurants des différentes formulations de TV étudiées. Comme attendu, la formulation isotrope proposée $TV_{|2}^{\pm}$, à l'instar de TV_u et TV_c , améliore notablement le résultat obtenu sur le disque, alors que $TV_{|2}$ produit systématiquement du flou dans une certaine direction. On observe le même phénomène pour les autres formulations symétriques, à l'égard du carré pour $TV_{|1}$, et du losange pour $TV_{|\infty}^{\pm}$ en comparaison avec $TV_{|\infty}$. On notera enfin que $TV_{|\infty}^{\pm}$ préserve mieux le contraste que les autres approches.

Expérimentation sur le biais La figure 2 illustre dans le cadre d'une application simple (problème de débruitage (14)) l'intérêt des formulations proposées ($TV_{|2}^{\pm}$ et $TV_{|\infty}^{\pm}$) pour éliminer le biais des schémas décentrés (TV_u). Comme annoncé en section 2.2, on observe un biais se manifestant principalement par des pixels isolés clairs non traités avec TV_u , tandis que les méthodes proposées n'en souffrent pas.

Conclusion Nous avons formulé deux schémas décentrés symétriques pour la variation totale discrète sur graphe pondéré et les algorithmes d'optimisation associés. Nous avons montré qu'il s'agit de semi-normes formulées explicitement qui évitent le biais observé sur TV_u . De plus, $TV_{|\infty}^{\pm}$ vérifie la formule de la co-aire, ce qui est utile pour un certain nombre de problèmes d'optimisation. Nos futurs travaux concernent l'extension de cette analyse aux traitements non locaux des images couleurs.

Références

- [1] BREDIES, K., KUNISCH, K., AND POCK, T. Total generalized variation. *SIAM Journal on Imaging Sciences* 3, 3 (2010), 492–526. 1
- [2] CHAMBOLLE, A., LEVINE, S. E., AND LUCIER, B. J. An upwind finite-difference method for total variation-based image smoothing. *SIAM Journal on Imaging Sciences* 4, 1 (2011), 277–299. 1, 2, 3, 4
- [3] CHAMBOLLE, A., AND POCK, T. A first-order primal-dual algorithm for convex problems with applications to imaging. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 40, 1 (2011), 120–145. 1, 3
- [4] CHAN, T. F., ESEDOGLU, S., AND NIKOLOVA, M. Algorithms for finding global minimizers of image segmentation and denoising models. *SIAM journal on applied mathematics* 66, 5 (2006), 1632–1648. 1
- [5] CONDAT, L. Discrete total variation : New definition and minimization. *preprint hal-01309685* (2016). 1, 3, 4
- [6] CONDAT, L. Fast projection onto the simplex and the 11 ball. *Mathematical Programming* 158, 1 (2016), 575–585. 3
- [7] ELMOATAZ, A., LEZORAY, O., AND BOUGLEUX, S. Nonlocal discrete regularization on weighted graphs : a framework for image and manifold processing. *IEEE transactions on Image Processing* 17, 7 (2008), 1047–1060. 1, 2
- [8] GILBOA, G. A total variation spectral framework for scale and texture analysis. *SIAM Journal on Imaging Sciences* 7, 4 (2014), 1937–1961. 1
- [9] GILBOA, G., AND OSHER, S. Nonlocal operators with applications to image processing. *Multiscale Modeling & Simulation* 7, 3 (2008), 1005–1028. 1, 2
- [10] HIDANE, M., LÉZORAY, O., AND ELMOATAZ, A. Nonlinear multilayered representation of graph-signals. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 45, 2 (2013), 114–137. 1, 2
- [11] RUDIN, L. I., OSHER, S., AND FATEMI, E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D : Nonlinear Phenomena* 60, 1-4 (1992), 259–268. 1, 2, 3
- [12] TENBRINCK, D., LOZES, F., AND ELMOATAZ, A. Solving minimal surface problems on surfaces and point clouds. In *International Conference on Scale Space and Variational Methods in Computer Vision* (2015), Springer, pp. 601–612. 3