

# Analyse fréquentielle et filtrage sur graphes dirigés

Harry SEVI<sup>1,2</sup>, Gabriel RILLING<sup>1</sup>, Pierre BORGNAT<sup>2</sup>

<sup>1</sup>CEA, LIST, Laboratoire d'Analyse de Données et Intelligence des Systèmes, 91400 Gif-sur-Yvette, France

<sup>2</sup>Univ Lyon, Ens de Lyon, UCB Lyon 1, CNRS, Laboratoire de Physique, F-69342 Lyon, France  
harry.sevi@ens-lyon.fr, gabriel.rilling@cea.fr, pierre.borgnat@ens-lyon.fr

**Résumé** – Pour le traitement de signaux sur graphes, nous développons une analyse harmonique qui est opérante sur les graphes dirigés. Pour cela, nous montrons que l'opérateur de marche aléatoire permet de définir, sur graphe dirigé ou non, une notion désirable de fréquence liée aux valeurs propres associées aux fonctions propres de cet opérateur, et qui se connecte bien à une variation quadratique du signal. Nous montrons des applications de ce cadre en apprentissage semi-supervisé et pour l'apprentissage d'un filtre sur graphe dirigé.

**Abstract** – For Graph Signal Processing, we develop a new harmonic analysis for directed graphs. We show that the random walk operator allows us to define a desirable notion of frequency, even for directed graphs. This notion links the eigenvalues of this operator to a quadratic variation of the associated eigenfunctions. We show applications of this to semi-supervised learning and filter design on directed graphs.

## 1 Introduction

Bien des données peuvent être modélisées comme étant sur un graphe dont les arêtes décrivent des connexions ou des interactions entre les points de données, tandis que les nœuds portent une information valuée. Un nouveau cadre d'analyse propose de considérer cette information comme un signal, menant au traitement de signal sur graphe [1], dont une première approche fructueuse (par exemple pour définir des ondelettes sur graphes [2]) s'appuie sur la théorie spectrale du Laplacien de graphe pour définir une transformée de Fourier et les fréquences [3]. Soit  $\mathbf{W}$  la matrice d'adjacence (éventuellement pondérée) d'un graphe et  $\mathbf{D}$  sa matrice diagonale des degrés, on définit le Laplacien comme  $\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{W}$  et sa variante normalisée  $\mathcal{L} = \mathbf{D}^{-1/2}\mathbf{L}\mathbf{D}^{-1/2}$ . Un problème de cette approche est de ne pas s'appliquer aux graphes dirigés. Une seconde approche [4] se fonde sur la réduction de Jordan de la matrice d'adjacence  $\mathbf{W}$  qui joue alors le rôle d'opérateur de translation sur graphe. Elle permet une analyse harmonique de graphes dirigés. Cependant, outre la difficulté de travailler avec la réduction de Jordan, la notion de fréquence n'est retrouvée qu'a posteriori, en calculant la variation totale des fonctions propres de  $\mathbf{W}$  [5]. Pour construire une analyse harmonique plus complète à partir de matrice d'adjacence  $\mathbf{W}$ , il faut mentionner la proposition de [6] de passer par ses valeurs singulières.

Nous proposons ici une approche différente et nouvelle pour fonder l'analyse en fréquence de signaux sur graphe dirigé, en généralisant l'approche à partir du Laplacien [1]. Pour cela, nous partons d'une des approches indiquées dans [7] qui consiste dans le cas dirigé à utiliser l'opérateur  $\mathbf{P}$  de marche aléatoire sur graphe. Nous montrons qu'une forme de variation globale quadratique du signal sur graphe permet de définir une notion désirable de fréquence sur graphe. La section 2 introduit les no-

tations et outils utiles et la section 3 établit l'analyse fréquentielle sur graphe dirigé. Puis, nous en déduisons en section 4 comment construire une famille de filtres dans ce cadre, qui seront invariants par rapport à  $\mathbf{P}$  (adaptant la construction de [4]). En section 5 nous comparons, sur un problème d'apprentissage semi-supervisé sur graphe dirigé, la présente approche à celle fondée à partir de  $\mathbf{W}$  [4, 5] et nous montrons son efficacité.

## 2 Présentation du cadre dirigé

### 2.1 Notations

Un graphe dirigé  $\Gamma = (V, E)$  est défini par un ensemble de sommets  $V$  et un ensemble  $E$  d'arcs orientés entre ces sommets.  $\Gamma$  est caractérisé par sa matrice d'adjacence  $\mathbf{W}$  où  $\mathbf{W}_{u,v} = w(u, v) > 0$  si  $(u, v) \in E$  et  $\mathbf{W}_{u,v} = 0$  sinon. On définit le degré sortant  $d_v^{out}$  par  $d_v^{out} = \sum_{\{v|(u,v) \in E\}} w(u, v)$ .

### 2.2 Marche aléatoire sur graphe dirigé

Une marche aléatoire [8] sur un graphe dirigé  $\Gamma$  est caractérisée par une matrice de transition  $\mathbf{P} = (p_{u,v})_{(u,v) \in E}$ , où  $\mathbf{P} = \mathbf{D}_{out}^{-1}\mathbf{W}$ . Ici  $\mathbf{D}_{out}$  est la matrice diagonale des  $d_v^{out}$ . Nous supposons que la marche aléatoire sur  $\Gamma$  est **ergodique (irréductible et apériodique) et non nécessairement réversible**. Elle admet ainsi une distribution stationnaire  $\pi$ , définie par  $\pi^\top \mathbf{P} = \pi^\top$ . Par la propriété de non-réversibilité de la marche aléatoire, la matrice de transition  $\mathbf{P}$  associée est réelle, mais non symétrique. Elle peut ainsi admettre des paires conjuguées complexes de valeurs propres.

### 2.3 Laplacien sur graphe dirigé

Nous adoptons la définition de Laplacien normalisé sur le graphe dirigé  $\Gamma$  proposée par F. Chung dans [9] :

$$\mathcal{L} = \mathbf{I} - \frac{\Pi^{1/2}\mathbf{P}\Pi^{-1/2} + \Pi^{-1/2}\mathbf{P}^\top\Pi^{1/2}}{2},$$

où  $\Pi$  est la matrice diagonale portant  $\pi$  sur la diagonale.

Si le graphe est non dirigé, la marche aléatoire est réversible et les probabilités stationnaires  $\pi$  sont équivalentes aux degrés, i.e  $\Pi = \mathbf{D}_{out}$ . Nous retrouvons alors la définition du Laplacien normalisé habituelle du cas non dirigé.

## 3 Analyse fréquentielle associée à $\mathbf{P}$

### 3.1 Régularité de fonctions sur graphes

Nous considérerons les fonctions dans  $L^2(V)$ , l'espace de fonctions de carré intégrable définies sur  $V$ .

$$\ell^2(V) = \{f : V \rightarrow \mathbb{C} \text{ t.q. } \|f\|_2^2 = \sum_{v \in V} |f(v)|^2 < \infty\}$$

qui est un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \sum_{v \in V} f(v)\overline{g(v)},$$

où  $\overline{g(v)}$  est le conjugué de  $g$ .

Nous rappelons qu'on peut caractériser à quel point un signal sur graphe varie beaucoup en sommant les carrés des différences finies le long des arêtes, ce qui conduit à définir une variation globale (agrégée sur tous les nœuds) qui est la forme discrète de Dirichlet d'ordre deux [10], et qui se relie au cadre fonctionnel usuel car sa racine carrée est une semi-norme [11] :

**Definition 3.1** Soit  $f \in \ell^2(V)$  et une notion de poids sur les arêtes :  $\mu : E \rightarrow (0, \infty)$ . La variation globale de  $f$  sur  $V$  est :

$$\mathcal{E}_\mu^2(f) = \frac{1}{2} \sum_{(u,v) \in E} |f(u) - f(v)|^2 \mu(u,v) = \frac{1}{2} \|f\|_{E,2,\mu}^2.$$

Ce sera le point de départ pour définir une fréquence.

### 3.2 Fréquence sur graphes dirigés

Pour un graphe (dirigé ou non)  $\Gamma$ , où la matrice  $\mathbf{P}$  de marche aléatoire sur le graphe a des entrées  $p(u,v)$  et où  $\pi(u)$  est la probabilité stationnaire au sommet  $u$ , nous considérons la forme (ou énergie) de Dirichlet suivante [12] :

$$\mathcal{E}_{\pi,\mathbf{P}}^2(f) = \frac{1}{2} \sum_{(u,v) \in E} \pi(u)p(u,v) |f(u) - f(v)|^2.$$

Dans le cas non-dirigé, cette variation quadratique coïncide avec la pondération par le poids d'adjacence  $w(u,v)$ .

La proposition suivante établit un lien entre l'énergie de Dirichlet  $\mathcal{E}_{\pi,\mathbf{P}}^2$  d'une fonction  $f$  sur graphe dirigé et une forme quadratique faisant intervenir les matrices  $\Pi$  et  $\mathbf{P}$ .

**Proposition 3.1** L'énergie de Dirichlet  $\mathcal{E}_{\pi,\mathbf{P}}^2$  est égale à

$$\mathcal{E}_{\pi,\mathbf{P}}^2(f) = \langle f, \mathbf{Q}f \rangle. \quad (1)$$

où  $\mathbf{Q} = \Pi - \frac{\Pi\mathbf{P} + \mathbf{P}^\top\Pi}{2}$ ,

Cette proposition exprime l'énergie de Dirichlet de la fonction  $f$  en fonction de l'opérateur symétrique  $\mathbf{Q}$  qui est le Laplacien non normalisé sur graphe dirigé de [9]. Si on normalise à gauche et à droite de  $\mathbf{Q}$  par  $\Pi^{-1/2}$ , nous obtenons le Laplacien normalisé sur graphe dirigé :  $\mathcal{L} = \Pi^{-1/2}\mathbf{Q}\Pi^{-1/2}$ . Il conduit à une autre formule de variation, utilisée dans [7, 13] pour les graphes dirigés, et qui revient à normaliser  $f$  par  $\sqrt{\pi}$  :

$$\frac{1}{2} \sum_{(u,v) \in E} \pi(u)p(u,v) \left| \frac{f(u)}{\sqrt{\pi(u)}} - \frac{f(v)}{\sqrt{\pi(v)}} \right|^2 = \langle f, \mathcal{L}f \rangle. \quad (2)$$

Pour l'énergie de Dirichlet proposée, le résultat suivant est une étape clé permettant d'établir un lien entre la variation des fonctions propres de  $\mathbf{P}$  et les valeurs propres associées.

**Proposition 3.2** Soit  $\zeta : V \rightarrow \mathbb{C}$ , une fonction propre de l'opérateur de marche aléatoire  $\mathbf{P}$ , de valeur propre  $\eta \in \mathbb{C}$ . L'énergie de Dirichlet normalisée de  $\zeta$  satisfait :

$$\frac{\mathcal{E}_{\pi,\mathbf{P}}^2(\zeta)}{\|\Pi^{1/2}\zeta\|^2} = 1 - \Re(\eta).$$

où  $\Re(\eta)$  désigne la partie réelle de  $\eta \in \mathbb{C}$ ,

**Preuve** Soit  $\zeta$  une fonction propre de  $\mathbf{P}$  de valeur propre  $\eta$ . Par la proposition 3.1, nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\pi,\mathbf{P}}^2(\zeta) &= \langle \zeta, \Pi\zeta \rangle - \frac{1}{2} \langle \zeta, \Pi\mathbf{P}\zeta \rangle - \frac{1}{2} \langle \zeta, \mathbf{P}^\top\Pi\zeta \rangle \\ &= \langle \zeta, \Pi\zeta \rangle - \frac{1}{2} \eta \langle \zeta, \Pi\zeta \rangle - \frac{1}{2} \bar{\eta} \langle \zeta, \Pi\zeta \rangle \\ &= \langle \zeta, \Pi\zeta \rangle (1 - \Re(\eta)) \\ &\Rightarrow \frac{\mathcal{E}_{\pi,\mathbf{P}}^2(\zeta)}{\|\Pi^{1/2}\zeta\|^2} = 1 - \Re(\eta) \end{aligned}$$

■

Cette proposition établit un lien entre la variation quadratique d'une fonction propre  $\zeta$  de  $\mathbf{P}$  et la valeur propre associée  $\eta$ . Nous proposons alors un ordre en fréquence pour ces fonctions propres, en appelant **fréquence associée** à  $\zeta$  :

$$\omega = 1 - \Re(\eta). \quad \omega \in [0, 2]. \quad (3)$$

Cette définition est cohérente car plus une fonction propre varie avec des gradients forts, plus sa variation locale mesurée comme énergie de Dirichlet est importante, et plus la partie réelle de la valeur propre est petite selon la proposition 3.2.

## 4 Filtres sur graphe dirigé

Un filtre  $\mathbf{H}$  sur graphe dirigé est un opérateur linéaire qui agit sur une fonction  $s$  définie sur  $V$  afin de la modifier. Nous

adoptons le cadre de [4] en le généralisant : soit un opérateur de référence sur graphe dirigé, noté  $\mathbf{R}$  que nous supposons ici diagonalisable pour simplifier (dans [4],  $\mathbf{R}$  serait forcément  $\mathbf{W}$  mais nous nous plaçons ici dans un cadre plus général). Par analogie avec la propriété d'invariance par translation en traitement de signal classique, on définit qu'un filtre a comme caractéristique centrale d'être invariant par rapport à  $\mathbf{R}$ , ce qui se traduit par la propriété de commutativité suivante :

$$\mathbf{H}\mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{H}$$

$\mathbf{R}$  peut s'écrire notamment :

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{G}_i, \quad (4)$$

où  $\mathbf{G}_i$  est le projecteur spectral associé à la valeur propre  $\lambda_i$  avec  $\mathbf{G}_i \mathbf{G}_j = 0$ ,  $i \neq j$  et  $n$  est le nombre de valeurs propres distinctes. La commutativité entre  $\mathbf{H}$  et l'opérateur de référence  $\mathbf{R}$  implique qu'ils partagent les mêmes espaces propres. Ainsi, un tel filtre  $\mathbf{H}$  peut se définir par des paramètres  $\beta_i$  dans  $\mathbb{C}$  tels que :

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^n \beta_i \mathbf{G}_i, \quad \beta_i \in \mathbb{C}. \quad (5)$$

Par ailleurs, nous pouvons signifier aussi que tout filtre  $\mathbf{H}$  invariant à  $\mathbf{R}$  s'exprime comme un polynôme de  $\mathbf{R}$  [4] :

$$\mathbf{H} = h(\mathbf{R}) = \sum_{i=0}^{n-1} h_i \mathbf{R}^i, \quad h_i \in \mathbb{C}.$$

Nous avons défini les filtres sur un graphe (même dirigé) comme une combinaison linéaire des projecteurs spectraux d'un opérateur de référence  $\mathbf{R}$ . Par ailleurs, nous avons une notion désirable de fréquence sur graphe dirigé en partant de l'opérateur de marche aléatoire  $\mathbf{P}$ . Il est donc utile de connecter les deux et de prendre  $\mathbf{R} = \mathbf{P}$ . Nous pouvons alors caractériser les filtres invariants à  $\mathbf{P}$  selon leur réponse en fréquence. Un tel filtre  $\mathbf{H}$  peut s'écrire de la manière suivante :

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^n h(\omega_i) \mathbf{G}_i,$$

où  $\omega_i \in [0, 2]$  est la fréquence associée selon (3) au projecteur spectral  $\mathbf{G}_i$  et  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction ayant les propriétés de filtrage désirées. Plus précisément, plus la fréquence  $\omega_i$  augmente, plus l'espace propre associé est considéré comme haute fréquence. Ainsi, un signal sur graphe dirigé se peut être filtré de diverses manières, pour privilégier des basses ou hautes fréquences dans le signal. Un filtre passe-bas idéal aurait par exemple une fonction  $h$  telle que  $h(u) = 1$  si  $u \leq \epsilon$ ,  $h(u) = 0$  sinon, pour  $\epsilon$  donné dans  $[0, 2]$ . Un filtre passe-haut idéal serait obtenu avec par  $h(u) = 1$  si  $u \geq \epsilon$ ,  $h(u) = 0$  sinon, pour une fréquence de coupure  $\epsilon$  donnée dans  $[0, 2]$ .

## 5 Applications

### 5.1 Apprentissage semi-supervisé sur graphe

Ce premier exemple vise à illustrer la pertinence de l'énergie de Dirichlet (2) pour mesurer la régularité d'une fonction

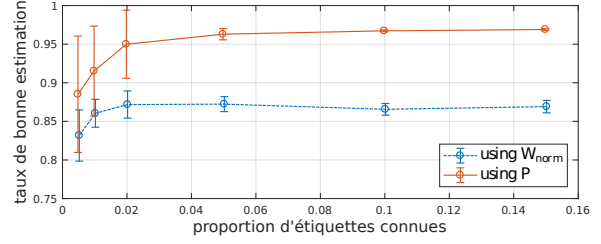


FIGURE 1 – Apprentissage semi-supervisé.

sur le graphe. Elle est comparée à la variation totale introduite dans [5], définie par  $\mathbf{TV}_W(f) = \|f - \mathbf{W}_{norm} f\|^2$  où  $\mathbf{W}_{norm}$  est la matrice d'adjacence normalisée, obtenue en divisant  $\mathbf{W}$  par sa valeur propre de plus grand module.

Soit  $\Gamma = (V, E)$  un graphe dirigé vérifiant les hypothèses de la partie 2 où chaque sommet appartient à une classe parmi deux, auxquelles nous associons les étiquettes «  $-1$  » et «  $1$  ». Le problème considéré est d'estimer la classe de chaque sommet à partir des classes d'un petit nombre de sommets  $S \subset V$  seulement. L'approche de [13], fondée sur l'énergie de Dirichlet normalisée, consiste à résoudre le problème suivant

$$f^* = \text{signe} \left( \underset{f \in \ell^2(V)}{\text{argmin}} \left\{ \langle f, \mathcal{L}f \rangle + c \|f - y\|^2 \right\} \right), \quad (6)$$

où  $y = -1$  ou  $1$  pour les étiquettes connues et  $0$  sinon.

L'approche de [5] utilise un problème proche basé sur  $\mathbf{W}$  :

$$f^* = \text{signe} \left( \underset{f \in \ell^2(V)}{\text{argmin}} \left\{ \|f - \mathbf{W}_{norm} f\|^2 + c \|f_S - y_S\|^2 \right\} \right). \quad (7)$$

Elle diffère de (6) par le terme de régularisation  $\|f - \mathbf{W}_{norm} f\|^2$  et par celui d'attache aux données  $\|f_S - y_S\|^2$  qui ne comprend que les sommets où les étiquettes sont connues initialement.

Les deux problèmes (6) et (7) étant quadratiques et convexes, ils ont des solutions analytiques simples [5, 13]. Leurs performances sont comparées en figure 1 sur un jeu de données correspondant à un ensemble de 1224 blogs politiques durant la campagne présidentielle US de 2004 [14], dont on a extrait un sous-graphe fortement connecté de 793 noeuds. À chaque blog est associé un sommet du graphe et un lien entre deux sommets indique la présence de liens hypertexte du premier blog vers le second. Le graphe est dirigé avec des poids 0 ou 1 sur chaque lien. Chaque blog est caractérisé par son orientation politique, dénotée par «  $-1$  » pour les blogs démocrates, «  $+1$  » pour les blogs républicains. Les performances des deux approches sont comparées à travers leur taux de prédictions exactes pour plusieurs proportions d'étiquettes connues. Chaque point représente la performance moyenne sur 100 réalisations avec des ensembles différents de sommets connus sélectionnés aléatoirement. Les barres d'erreur montrent les écarts type correspondants.

On constate, sur la figure 1, que le taux de prédiction est supérieur si on utilise l'énergie de Dirichlet, ce qui indique qu'elle représenterait une meilleure notion de variation pour les signaux sur le graphe. Cette différence de performance pourrait

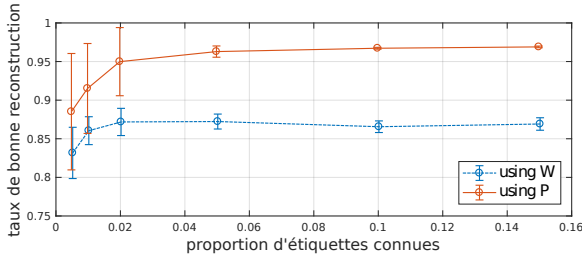


FIGURE 2 – Apprentissage d’un filtre de reconstruction.

a priori être aussi due aux différents termes d’attache aux données pour les deux problèmes d’optimisation. Il se trouve que dans les deux cas les performances sont fortement dégradées si on utilise le terme d’attache aux données de l’autre approche.

## 5.2 Apprentissage d’un filtre de reconstruction

Cette deuxième application utilise encore le jeu de données des blogs politiques mais vise cette fois-ci à apprendre comment reconstruire les étiquettes des blogs à partir d’un petit échantillon. On propose de reconstruire les étiquettes en utilisant un filtre défini comme un polynôme de l’opérateur  $\mathbf{P}$  :

$$\mathbf{H} = \sum_{k=0}^K \lambda_k \mathbf{P}^k, \quad (8)$$

que l’on applique à un signal sous-échantillonné  $y = -1$  ou  $1$  pour les étiquettes connues et  $0$  sinon.

L’apprentissage consiste en supposant  $f$  connu à trouver les coefficients  $\lambda_k$  minimisant l’erreur de reconstruction donnée par  $\sum_{i=1}^n \|\mathbf{H}y_i - f\|^2$  pour  $n$  sous-échantillonnages  $y_i$  différents ayant le même nombre de sommets connus. La solution de ce problème est similaire à celle exposée dans [4] pour la prédiction linéaire. L’évaluation du filtre obtenu consiste à mesurer l’erreur de reconstruction sur de nouveaux signaux sous-échantillonnés  $y_j$ . Les étiquettes attendues étant  $-1$  ou  $1$ , on mesure cette fois-ci l’erreur de reconstruction par la proportion de signes différents entre  $\mathbf{H}y_j$  et  $f$ . Les performances sont présentées figure 2 pour  $K = 10$  et comparées à la même approche mais en utilisant un polynôme de la matrice d’adjacence  $\mathbf{W}$ , comme proposé dans [4]. Les résultats montrent une meilleure performance des filtres fondés sur  $\mathbf{P}$ , ce qui indique que ceux-ci modélisent mieux le signal considéré. La même étude a été réalisée pour d’autres ordres de filtre avec les mêmes conclusions.

## 6 Conclusion

Nous avons développé la base d’un traitement du signal sur graphe dirigé, via le choix de l’opérateur de marche aléatoire  $\mathbf{P}$  comme élément de base de la construction. Nous avons défini une fréquence, bien connectée à l’espace spectral de référence pour définir des filtres (linéaires et invariants par rapport à  $\mathbf{P}$ ) et à la mesure de la variation d’un signal sur le graphe à travers l’énergie de Dirchlet. Deux exemples simples, en apprentissage

semi-supervisé et en apprentissage de filtre, montrent que le cadre se comporte bien et amène des performances meilleures que si on utilise la matrice d’adjacence pour faire les mêmes tâches. En perspectives, nous construirons des analyses multi-résolutions ancrées dans ce cadre, pour l’appliquer à des situations pratiques où la direction des arêtes est importante.

## Références

- [1] D. I. Shuman, S. K. Narang, P. Frossard, A. Ortega, and P. Vandergheynst, “The emerging field of signal processing on graphs : Extending high-dimensional data analysis to networks and other irregular domains,” *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 30, no. 3, pp. 83–98, 2013.
- [2] D. K. Hammond, P. Vandergheynst, and R. Gribonval, “Wavelets on graphs via spectral graph theory,” *Applied and Computational Harmonic Analysis*, vol. 30, no. 2, pp. 129–150, 2011.
- [3] F. R. Chung, *Spectral graph theory*, vol. 92. American Mathematical Soc., 1997.
- [4] A. Sandryhaila and J. M. Moura, “Discrete signal processing on graphs,” *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 61, no. 7, pp. 1644–1656, 2013.
- [5] A. Sandryhaila and J. M. Moura, “Discrete Signal Processing on Graphs : Frequency Analysis.,” *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 62, no. 12, pp. 3042–3054, 2014.
- [6] H. N. Mhaskar, “A unified framework for harmonic analysis of functions on directed graphs and changing data,” *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2016.
- [7] A. Anis, A. Gadde, and A. Ortega, “Efficient sampling set selection for bandlimited graph signals using graph spectral proxies,” *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 64, pp. 3775–3789, July 2016.
- [8] D. Aldous and J. Fill, *Reversible Markov chains and random walks on graphs*. Berkeley, 2002.
- [9] F. Chung, “Laplacians and the Cheeger inequality for directed graphs,” *Annals of Combinatorics*, vol. 9, no. 1, pp. 1–19, 2005.
- [10] A. Elmoataz, O. Lezoray, and S. Boughleux, “Nonlocal discrete regularization on weighted graphs : a framework for image and manifold processing,” *IEEE Trans. On Image Processing*, vol. 17, no. 7, pp. 1047–1060, 2008.
- [11] M. I. Ostrovskii, “Sobolev spaces on graphs,” *Quaestiones Mathematicae*, vol. 28, no. 4, pp. 501–523, 2005.
- [12] T. Coulhon and A. Grigoryan, “Random walks on graphs with regular volume growth,” *Geometric and Functional Analysis*, vol. 8, no. 4, pp. 656–701, 1998.
- [13] D. Zhou, J. Huang, and B. Schölkopf, “Learning from labeled and unlabeled data on a directed graph,” in *Proceedings of the 22nd international conference on Machine learning*, pp. 1036–1043, ACM, 2005.
- [14] L. A. Adamic and N. Glance, “The political blogosphere and the 2004 US election : divided they blog,” in *Proceedings of the 3rd international workshop on Link discovery*, pp. 36–43, ACM, 2005.