

# Technique de factorisation en matrices semi non-négatives pour acquisition d'images par caméra mono-pixel

Florian ROUSSET, Nicolas DUCROS, Françoise PEYRIN

Univ Lyon, INSA Lyon, UCBL, CNRS 5220 INSERM, U1206, CREATIS  
7 avenue Jean Capelle, 69621 Villeurbanne Cedex, France  
florian.rousset@creatis.insa-lyon.fr

**Résumé** – La caméra mono-pixel est un dispositif d'imagerie émergent qui se compose d'un filtre spatial modulant la lumière et d'un détecteur ponctuel. Celui-ci mesure la projection de l'image de la scène observée sur le motif chargé sur le filtre spatial. Différentes approches (acquisition comprimée, ondelettes, etc.) permettent de restaurer l'image à partir d'une série de mesures obtenues par différents motifs. En pratique, les motifs chargés sur le filtre sont nécessairement à valeurs positives, alors que les méthodes de restauration nécessitent bien souvent des valeurs négatives. Afin de palier cette contrainte, nous proposons d'exprimer nos motifs comme une combinaison linéaire de motifs à valeurs réelles positives. Ce problème peut-être résolu par une méthode de factorisation en matrices semi non-négatives.

**Abstract** – The single-pixel camera is an emerging imaging device composed of a spatial light modulator and a single point detector. The latter one measures the inner product of the image of the scene under view with a pattern loaded on the spatial modulator. Several approaches (compressive sensing, wavelets, etc.) permit to recover the image from sequential measurements obtained with different patterns. In practice, the patterns loaded on the spatial filter have necessarily positive values, whereas most image restoration techniques often need to employ negative values. To deal with this experimental constraint, we propose to express our patterns as a linear combination of real-valued positive patterns. This problem can be solved using a semi nonnegative matrix factorization algorithm.

## 1 Introduction

La caméra mono-pixel (*single-pixel camera*, SPC) [1] permet de réaliser des systèmes d'imagerie performants peu coûteux pour différents types d'applications allant de la vidéo au domaine biomédical. Le montage optique associé est composé d'un filtre spatial modulant la lumière (*spatial light modulator*, SLM) et d'un détecteur ponctuel. Ce dernier acquiert la projection de l'image de la scène observée sur le motif chargé au niveau du SLM. Le post-traitement des mesures obtenues en considérant plusieurs motifs permet de remonter à l'image de l'objet [1, 2, 3, 4].

Quelle que soit la technique d'acquisition/restauration des images employée, les motifs à envoyer au SLM comportent des valeurs négatives ce qui ne peut pas être physiquement mis en œuvre sur un SLM. L'approche la plus classique consiste à décomposer un motif en sa partie positive et sa partie négative prise en valeur absolue [2, 4]. Une autre approche courante consiste à décaler chaque valeur du motif de telle sorte que tous ses éléments deviennent positifs [1]. Dans les deux cas, la soustraction des deux mesures correspondantes permet l'obtention de la mesure désirée. En pratique, la méthode par décalage est affectée par le bruit alors que la séparation positive/négative double le nombre de mesures à réaliser et donc le temps d'acquisition.

Pour palier ce problème, nous proposons de créer des motifs à valeurs positives qui, combinés linéairement, donnent les mo-

tifs désirés à valeurs positives et négatives. Nous montrons que ceux-ci peuvent être obtenus par un algorithme de factorisation en matrices semi non-négatives qui permet de décomposer une matrice en un produit de deux autres matrices dont l'une n'a que des éléments positifs [5, 6, 7]. Nous présentons des résultats obtenus dans différentes conditions de simulation.

## 2 Acquisition SPC conventionnelle

### 2.1 Acquisition

On note  $N_0$  (en photons par seconde, ph/s) la puissance émise par la source lumineuse et  $\alpha$  (en ph/s) la composante continue mesurée au niveau du capteur quand  $N_0 = 0$  ph/s. Soit  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{D \times 1}$  l'image  $N \times N$  de la scène observée avec  $D = N^2$ . La mesure  $m_k$  (ph) obtenue au niveau du détecteur durant le temps d'intégration  $\Delta t$  (en s) peut-être modélisée par

$$m_k = \Delta t(N_0 \mathbf{p}_k^\top \mathbf{f} + \alpha) \quad (1)$$

où  $\mathbf{p}_k \in \mathbb{R}_+^{D \times 1}$  est un motif chargé sur le SLM. On note  $\mathbf{P} = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_K)^\top \in \mathbb{R}_+^{K \times P}$  la matrice regroupant la séquence de  $K$  motifs à charger sur le SLM. Le vecteur de mesure  $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_K)^\top \in \mathbb{R}_+^{K \times 1}$  (ph) contient la séquence des  $K$  mesures correspondantes obtenues. Mathématiquement,

$$\mathbf{m} = \Delta t(N_0 \mathbf{P} \mathbf{f} + \alpha \mathbf{v}) \quad (2)$$

avec  $\mathbf{v} = (1, \dots, 1)^\top \in \mathbb{R}^{K \times 1}$ .

## 2.2 Contrainte de positivité

Différentes approches ont été proposées pour le choix de la séquence de motifs  $\mathbf{P}$  et la restauration de l'image  $\mathbf{f}$  à partir des mesures  $\mathbf{m}$ . Bien que ces approches soient hors de la portée de cet article, la plupart des techniques considérées utilisent des motifs ayant des valeurs positives et négatives ce qui est physiquement impossible à mettre en œuvre sur un SLM.

Dans la suite, on note  $\mathbf{Q} = (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_I)^\top \in \mathbb{R}^{I \times D}$  la matrice contenant les  $I$  motifs désirés  $\mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^{D \times 1}$ , c'est-à-dire ayant des valeurs positives et négatives. Le vecteur regroupant les mesures désirées correspondantes est noté  $\tilde{\mathbf{m}} = (\tilde{m}_1, \dots, \tilde{m}_I)^\top \in \mathbb{R}^{I \times 1}$  avec :

$$\tilde{\mathbf{m}} = N_0 \Delta t \mathbf{Q} \mathbf{f}. \quad (3)$$

Il est à noter que le terme additif  $\Delta t \alpha \mathbf{v}$  de (2) est supprimé de cette équation puisque qu'il ajoute une information supplémentaire dans (2) qui perturbe les mesures.

**Méthode *pos/neg*** Pour contourner le problème de positivité, une solution consiste à séparer la séquence de motifs désirés  $\mathbf{Q}$  en sa partie positive  $\mathbf{P}^+$  et sa partie négative prise en valeur absolue  $\mathbf{P}^-$  [2, 4]. La soustraction des deux vecteurs de mesures correspondants donne le vecteur des mesures désirées :

$$\mathbf{P}^+ - \mathbf{P}^- = \mathbf{Q} \Rightarrow \mathbf{m}^+ - \mathbf{m}^- = N_0 \Delta t \mathbf{Q} \mathbf{f} = \tilde{\mathbf{m}}. \quad (4)$$

Le terme additif  $\Delta t \alpha \mathbf{v}$  est bien supprimé par la soustraction des deux vecteurs mais l'inconvénient de cette méthode est que deux mesures doivent être réalisées afin d'obtenir une mesure désirée, i.e.  $K = 2I$  augmentant ainsi les temps d'acquisition.

**Méthode *shift*** Une seconde approche consiste à ajouter à la séquence de motif désiré  $\mathbf{Q}$  une certaine valeur  $b$  telle que les éléments de tous les motifs deviennent positifs [1]. Mathématiquement,  $\mathbf{P}^s = \mathbf{Q} + \mathbf{P}^b$  avec  $\mathbf{P}^b \in \mathbb{R}_+^{I \times D}$  la matrice dont toutes les colonnes sont  $\mathbf{p}^b = (b, \dots, b)^\top \in \mathbb{R}_+^{D \times 1}$  et  $b = |\min(\mathbf{Q})| \geq 0$  :

$$\mathbf{P}^s - \mathbf{P}^b = \mathbf{Q} \Rightarrow \mathbf{m}^s - \mathbf{m}^b = N_0 \Delta t \mathbf{Q} \mathbf{f} = \tilde{\mathbf{m}}. \quad (5)$$

Contrairement à la méthode *pos/neg*, il n'est pas nécessaire de répéter  $K$  fois la mesure avec le motif d'arrière-plan  $\mathbf{p}^b$  qui est la même pour tous, i.e.  $K = I + 1$  peut-être obtenu. Nous montrerons cependant que cette méthode s'avère inefficace pour des acquisitions réelles bruitées.

## 3 Méthode proposée par SNMF pour motifs généralisés

### 3.1 Transformation des motifs

Pour obtenir une solution générale et robuste au problème de positivité, notre idée est de factoriser la matrice  $\mathbf{Q}$  en un produit de deux matrices  $\mathbf{T}$  et  $\mathbf{P}$  telles que

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T} \mathbf{P} \quad (6)$$

où  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}_+^{K \times D}$  contient une séquence de motifs positifs et  $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{I \times K}$  est une matrice de transformation permettant de combiner les motifs de  $\mathbf{P}$  pour retrouver ceux de  $\mathbf{Q}$ . Si une telle factorisation peut se trouver, l'idée est alors d'appliquer la même matrice de transformation  $\mathbf{T}$  sur le vecteur de mesure  $\mathbf{m}$  pour obtenir  $\tilde{\mathbf{m}}$ , soit

$$\tilde{\mathbf{m}} = \mathbf{T} \mathbf{m}. \quad (7)$$

Les mesures désirées sont donc obtenues par la combinaison linéaire de mesures réalisables avec les motifs positifs de  $\mathbf{P}$ . Or, si l'on développe  $\mathbf{T} \mathbf{m}$  en utilisant (2), on obtient :

$$\mathbf{T} \mathbf{m} = \Delta t (N_0 \mathbf{T} \mathbf{P} \mathbf{f} + \alpha \mathbf{T} \mathbf{v}) = N_0 \Delta t \mathbf{Q} \mathbf{f} + \alpha \Delta t \mathbf{T} \mathbf{v} \quad (8)$$

Afin d'obtenir (3) par (7), le second terme de (8) doit s'annuler. Nous choisissons ainsi d'imposer la contrainte suivante :

$$\mathbf{T} \mathbf{v} = \mathbf{0}_I \quad (9)$$

où  $\mathbf{0}_I = (0, \dots, 0)^\top \in \mathbb{R}^{I \times 1}$ .

### 3.2 Formulation du problème

Afin de trouver une solution à (6), nous proposons de résoudre le système suivant :

$$\min_{\mathbf{T}, \mathbf{P}} \|\mathbf{Q} - \mathbf{T} \mathbf{P}\|_F^2 \quad \text{tel que} \quad \mathbf{P} \geq 0 \text{ et } \mathbf{T} \mathbf{v} = \mathbf{0}_I \quad (10)$$

où  $\mathbf{P} \geq 0$  signifie que  $\forall (k, d) \in (1 \dots K) \times (1 \dots D)$ ,  $(\mathbf{P})_{k,d} \geq 0$  et  $\|\mathbf{M}\|_F$  est la norme de Frobenius de la matrice  $\mathbf{M}$ .

### 3.3 Algorithme SNMF

Le problème (10) peut-être résolu par un algorithme de factorisation en matrice semi non-négatives. En pratique, notre but est d'avoir une valeur de  $K$  la plus petite possible afin de limiter le nombre de mesures nécessaires tout en ayant une faible erreur de factorisation. Étant donné que les deux matrices  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{T}$  sont inconnues, la plupart des méthodes sont itératives et résolvent (10) alternativement pour  $\mathbf{P}$  puis  $\mathbf{T}$  avec leurs contraintes respectives  $\mathbf{P} \geq 0$  et  $\mathbf{T} \mathbf{v} = \mathbf{0}_I$ . Une telle approche peut donc être décrite par l'algorithme 1.

---

**Algorithme 1** Trouver  $\mathbf{Q} \approx \mathbf{T} \mathbf{P}$  suivant (10)

---

**Initialization:**  $\mathbf{P} = \text{rand}(K, D)$

**while**  $\|\mathbf{Q} - \mathbf{T} \mathbf{P}\|_F^2 > \epsilon$  **do**

    1: Résoudre pour  $\mathbf{T}$  considérant  $\mathbf{P}$  fixe tel que  $\mathbf{T} \mathbf{v} = \mathbf{0}_I$

    2: Résoudre pour  $\mathbf{P}$  considérant  $\mathbf{T}$  fixe tel que  $\mathbf{P} \geq 0$

**end while**

---

Afin d'avoir un calcul et une convergence rapides, nous considérons une méthode basée sur les moindres carrés pour résoudre (10).

### 3.4 Solution pour $\mathbf{T}$

La résolution de (10) pour  $\mathbf{T}$  considère  $\mathbf{P}$  fixe, il s'agit donc de résoudre

$$\min_{\mathbf{T}} \|\mathbf{Q} - \mathbf{T} \mathbf{P}\|_F^2 \quad \text{tel que} \quad \mathbf{T} \mathbf{v} = \mathbf{0}_I. \quad (11)$$

La condition (9) donne un problème d'optimisation sous contrainte d'égalité dont la solution analytique à (11) trouvée en utilisant la propriété de dualité est donnée par :

$$\mathbf{T} = \mathbf{Q}\mathbf{P}^\top (\mathbf{P}\mathbf{P}^\top)^{-1} \left( \mathbf{I} - \frac{1}{\mathbf{v}^\top (\mathbf{P}\mathbf{P}^\top)^{-1} \mathbf{v}} \mathbf{V} (\mathbf{P}\mathbf{P}^\top)^{-1} \right) \quad (12)$$

avec  $\mathbf{I}$  la matrice identité de taille  $K \times K$ ,  $\mathbf{v}^\top (\mathbf{P}\mathbf{P}^\top)^{-1} \mathbf{v} \in \mathbb{R}$  et  $\mathbf{V} = \mathbf{v}\mathbf{v}^\top$  est la matrice de taille  $K \times K$  dont tous les éléments sont égaux à 1. Si  $(\mathbf{P}\mathbf{P}^\top)$  n'est pas inversible, la matrice pseudo-inverse de Moore-Penrose est employée.

### 3.5 Solution pour $\mathbf{P}$

On cherche à présent à trouver une solution à (10) pour  $\mathbf{P}$  considérant  $\mathbf{T}$  fixe, on cherche donc

$$\min_{\mathbf{P}} \|\mathbf{Q} - \mathbf{TP}\|_F^2 \quad \text{tel que} \quad \mathbf{P} \geq 0. \quad (13)$$

Pour cela, Gillis a proposé dans [7] un algorithme de descente par blocs sur les lignes de  $\mathbf{P}$  qui amène à une solution analytique et un calcul rapide en choisissant  $K = I + 1$ . De plus, la méthode donne  $\mathbf{Q} \approx \mathbf{TP}$  avec une très faible erreur de factorisation.

Pour résoudre ce problème par la méthode de Gillis, la fonction coût  $\mathcal{F}(\mathbf{P}) = \|\mathbf{Q} - \mathbf{TP}\|_F^2$  est réécrite de la manière suivante :

$$\mathcal{F}(\mathbf{p}_k) = \|\mathbf{Q} - \mathbf{TP}\|_F^2 = \|\mathbf{Q} - \mathbf{T}_{|k}\mathbf{P}_{-k} - \mathbf{t}_k\mathbf{p}_k^\top\|_F^2 \quad (14)$$

où  $\mathbf{T}_{|k}$  (resp.  $\mathbf{P}_{-k}$ ) est la matrice  $\mathbf{T}$  (resp.  $\mathbf{P}$ ) privée de sa colonne (resp. ligne)  $k$  et  $\mathbf{t}_k \in \mathbb{R}^{I \times 1}$  (resp.  $\mathbf{p}_k \in \mathbb{R}^{D \times 1}$ ) est la  $k$ -ième colonne (resp. ligne) de  $\mathbf{T}$  (resp.  $\mathbf{P}$ ). En écrivant le Lagrangien de la fonction coût (14) puis les conditions de KKT<sup>1</sup>, la solution analytique minimisant (14) est donnée par :

$$\mathbf{p}_k = \max \left( \mathbf{0}_D, \frac{(\mathbf{Q} - \mathbf{T}_{|k}\mathbf{P}_{-k})^\top \mathbf{t}_k}{\|\mathbf{t}_k\|_2^2} \right) \quad (15)$$

où la fonction  $\max(\cdot)$  s'applique sur chaque composante des deux vecteurs et  $\mathbf{0}_D$  est le vecteur nul de taille  $D$ . La solution au problème (13) est finalement obtenue en itérant (15) sur chaque ligne de  $\mathbf{P}$ .

### 3.6 Algorithme final

En utilisant la solution analytique  $\mathbf{T}$  de (12) et celle de (15) pour minimiser chaque ligne de  $\mathbf{P}$ , l'algorithme 1 peut maintenant être réécrit suivant l'algorithme 2.

## 4 Simulations numériques et résultats

Pour l'acquisition et la restauration d'images par une SPC, notre technique *Adaptive Basis Scan by Wavelet Prediction* (ABS-WP) [4] est employée. En quelques mots, cette méthode permet

---

### Algorithme 2 Trouver $\mathbf{Q} \approx \mathbf{TP}$ suivant (10)

---

**Initialisation :** Prendre  $K = I + 1$  et  $\mathbf{P} = \text{rand}(K, D)$

**while**  $\|\mathbf{Q} - \mathbf{TP}\|_F^2 > \epsilon$  **do**

1: Mettre à jour  $\mathbf{T}$  avec (12)

2: Mettre à jour  $\mathbf{P}$

**for**  $k = 1 : K$  **do**

2.1:  $\mathbf{p}_k \leftarrow \max \left( \mathbf{0}_D, \frac{(\mathbf{Q} - \mathbf{T}_{|k}\mathbf{P}_{-k})^\top \mathbf{t}_k}{\|\mathbf{t}_k\|_2^2} \right)$

2.2: Mettre à jour la  $k$ -ième ligne de  $\mathbf{P}$  avec  $\mathbf{p}_k$

**end for**

**end while**

---

de prédire les coefficients significatifs d'ondelettes de l'image observée puis de les acquérir. Un coefficient d'ondelettes correspondant à un motif  $\mathbf{q}_i$  particulier, ABS-WP permet donc la création de la matrice  $\mathbf{Q}$ . Une fois les mesures collectées, l'image est obtenue par transformée en ondelettes inverse sur les coefficients acquis.

Pour juger des performances de la méthode SNMF proposée, nous comparons les images SPC obtenues par cette technique avec les méthodes *pos/neg* et *shift* présentées en Section 2.2. La factorisation de la même matrice  $\mathbf{Q}$  en  $\mathbf{TP}$  est donc effectuée de trois manières différentes.

Les simulations suivantes ont été corrompues par un bruit de Poisson, bruit généralement obtenu sur une mesure optique. Ce dernier est appliqué sur le vecteur de mesure  $\mathbf{m}$  de (2) :

$$\mathbf{m} = \mathcal{P}(\Delta t(N_0\mathbf{P}\mathbf{f} + \alpha\mathbf{v})) \quad (16)$$

où  $\mathcal{P}(\cdot)$  est une distribution de Poisson appliquée sur chaque entrée du vecteur. Changer les paramètres  $N_0$  et/ou  $\Delta t$  dans (16) permet de simuler plusieurs niveaux de bruit.

La Fig. 1 présente un exemple des motifs obtenus par les trois méthodes de factorisation pour une matrice  $\mathbf{Q}$  de taille  $I \times D = 16 \times 4096$  obtenue par ABS-WP pour l'acquisition d'une image SPC  $64 \times 64$  avec l'ondelette de Le Gall. La matrice  $\mathbf{P}$  obtenue pour *pos/neg* est de taille  $K \times D = 32 \times 4096$  et  $K \times D = 17 \times 4096$  pour *shift* et SNMF. On donne en Fig. 1 pour un motif donné  $\mathbf{q}$  de  $\mathbf{Q}$ , les deux motifs  $\mathbf{p}$  pour recréer  $\mathbf{q}$  par *pos/neg* et *shift* et 4 des 17 motifs utiles pour SNMF.

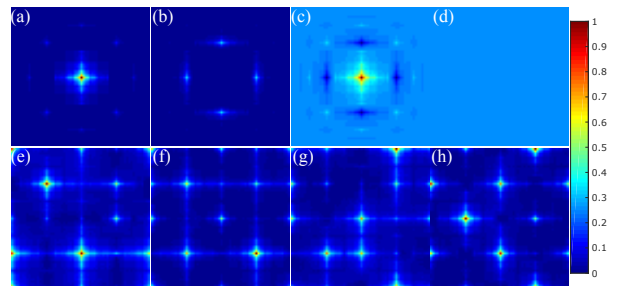


FIG. 1: Exemple de motifs obtenus par la méthode *pos/neg* ((a) partie positive  $\mathbf{p}^+$ , (b) partie négative  $\mathbf{p}^-$ ), *shift* ((c) motif décalé  $\mathbf{p}^s$ , (d) motif d'arrière plan  $\mathbf{p}^b$ )) et SNMF ((e)-(h) 4/17 motifs SNMF).

On donne en Fig. 2, les courbes du PSNR des images restau-

<sup>1</sup>Karush-Kuhn-Tucker

rées par ABS-WP avec les trois techniques (SNMF, *pos/neg*, *shift*) en fonction de différentes valeurs  $N_0$  et deux valeurs de la composante continue  $\alpha$ . Pour ces cas,  $\Delta t$  est fixé à 1 s et l'image test choisie est la cible de Jaszczak.

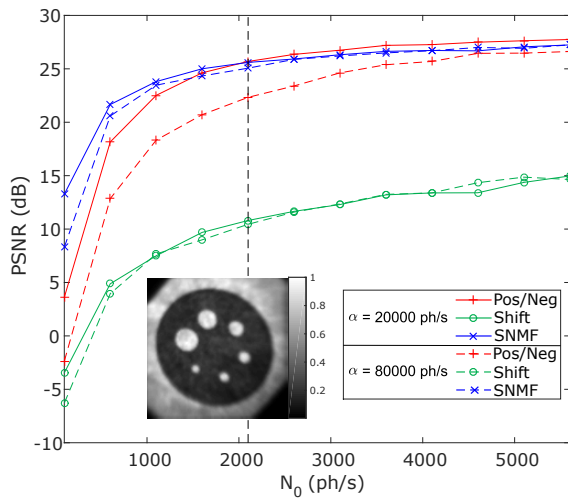


FIG. 2: Image test et courbes du PSNR des images restaurées en fonction de  $N_0$  pour  $\Delta t = 1$  s avec deux valeurs de  $\alpha$ . La barre en pointillée correspond aux résultats de la Fig. 3.

La Fig. 3 montre les 6 images  $64 \times 64$  restaurées par ABS-WP pour le cas  $N_0 = 2100$  ph/s de la Fig. 2.

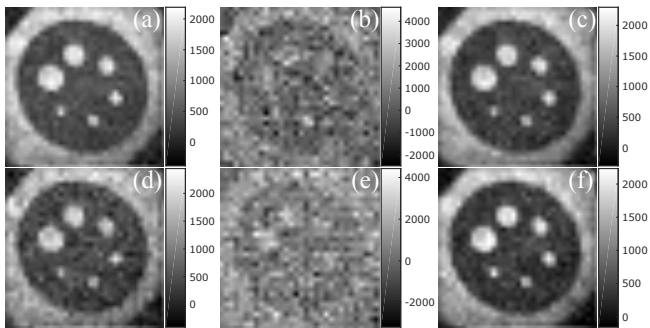


FIG. 3: Images restaurées par ABS-WP pour les trois techniques de factorisation pour  $N_0 = 2100$  ph/s et  $\Delta t = 1$  s sur l'image test de la Fig. 2. Images obtenues pour  $\alpha = 20000$  ph/s avec (a) *pos/neg*, (b) *shift*, (c) SNMF et pour  $\alpha = 80000$  ph/s avec (d) *pos/neg*, (e) *shift*, (f) SNMF. Les PSNRs correspondants peuvent être lus sur la Fig. 2 (barre en pointillée).

## 5 Discussion et conclusion

L'avantage principal de l'algorithme SNMF proposé par rapport au cas *pos/neg* est le nombre  $K$  de motifs créés qui est égal à  $I + 1$  pour SNMF alors qu'il vaut  $2I$  pour *pos/neg*, les acquisitions sont donc plus rapides avec notre méthode. Pour la technique *shift*,  $K = I + 1$  peut également être obtenu mais les résultats des deux figures suivantes montrent que cette méthode souffre énormément du bruit de mesure.

Ceci peut être vu sur la Fig. 2 où la méthode *shift* donne tou-

jours des restaurations d'images de qualité bien inférieure aux deux autres techniques. Une explication est que l'information utile du motif décalé est en quelque sorte noyée dans celle ajoutée par l'arrière-plan (Fig. 1-(c) et (d)). La méthode SNMF quant à elle donne de très bons résultats et ceci quelle que soit la valeur de la composante continue  $\alpha$ . La technique *pos/neg* est impactée par cette composante pour des valeurs faibles de  $N_0$ . Ceci s'explique par le fait que les motifs *pos/neg* ont de nombreux coefficients nuls et une composante continue  $\alpha$  importante diminue l'effet des parties actives (i.e. coefficients non nuls) du motif, effet moins présent pour SNMF où la partie active est plus considérable (voir Fig. 1).

Ces résultats numériques sont confirmés par les images visibles en Fig. 3 où la méthode *shift* donne des images très bruitées ((b) et (e)). SNMF et *pos/neg* donne des résultats similaires avec un avantage certain pour SNMF où le nombre de mesures effectives est quasiment égal au nombre de mesures désirées.

En conclusion, nous avons proposé une technique de factorisation en matrice semi non-négatives pour contourner une contrainte expérimentale de positivité lors de l'acquisition d'images par une SPC. La méthode permet de ne pas doubler le nombre de mesures comme la méthode *pos/neg* et est peu affectée par le bruit de mesure contrairement à la technique *shift*.

## Remerciements

Travail financé par l'Université Franco-Italienne, réalisé au sein du Labex Primes ANR-11-LABX-0063/ANR-11-IDEX-0007 et dans le cadre du projet Monopix+ (CNRS AAP 2017).

## References

- [1] M. F. Duarte and al., "Single-pixel imaging via compressive sampling," *IEEE SPM*, vol. 25, pp. 83–91, March 2008.
- [2] H. Dai and al., "Adaptive compressed sampling based on extended wavelet trees," *Appl. Opt.*, vol. 53, pp. 6619–6628, Oct 2014.
- [3] Z. Zhang and al., "Single-pixel imaging by means of fourier spectrum acquisition," *Nature communications*, vol. 6, 2015.
- [4] F. Rousset and al., "Adaptive basis scan by wavelet prediction for single-pixel imaging," *IEEE TCI*, vol. 3, pp. 36–46, March 2017.
- [5] D. D. Lee and H. S. Seung, "Learning the parts of objects by nonnegative matrix factorization," *Nature*, vol. 401, pp. 788–791, 1999.
- [6] C. Ding and al., "Convex and semi-nonnegative matrix factorizations," *IEEE TPAMI*, vol. 32, pp. 45–55, Jan 2010.
- [7] N. Gillis and A. Kumar, "Exact and heuristic algorithms for semi-nonnegative matrix factorization," *SIAM JMMA*, vol. 36, no. 4, pp. 1404–1424, 2015.