

Multiplexage des objets communiquant de façon asynchrone avec des modulations multi-porteuses filtrées

Mylène PISCHELLA, Rostom ZAKARIA, Didier LE RUYET

Conservatoire National des Métiers (CNAM), CEDRIC/LAETITIA
292 rue Saint-Martin, 75141 Paris Cedex 03, France
mylene.pischella@cnam.fr, rostom.zakaria@cnam.fr
leruyet@cnam.fr

Résumé – Cet article étudie le problème du multiplexage dans les communications Objet-à-Objet lorsque les interférences sont reçues asynchrones. L’asynchronisme entraîne l’apparition d’interférence inter-canaux (ICI) que le multiplexage doit gérer en plus des interférences co-canaux (ICC). Deux heuristiques sont proposées et leur performances sont évaluées avec des modulations multi-porteuses plus ou moins bien localisées en fréquence.

Abstract – This paper studies the multiplexing problem for Device-to-Device communications with asynchronous interferences at the receivers. Asynchronicity generates inter-channel interferences (ICI) that must be taken into account by multiplexing on top of co-channel interferences. Two heuristics are proposed and their performance is evaluated with multi-carrier modulation techniques of various ICI spread.

1 Introduction

Les transmissions Objet-à-Objet permettent d’augmenter les débits individuels et l’efficacité spectrale grâce au multiplexage des paires d’objets sur les mêmes ressources spectrales. Mais les gains espérés ne peuvent être obtenus que si une allocation des ressources efficace est mise en oeuvre afin de déterminer quelles paires d’objets doivent être allouées sur quels Resource Blocks (RB). De plus, le multiplexage ne peut pas être effectué indépendamment par RB si les récepteurs subissent des interférences asynchrones. Dans un contexte de communications Objet-à-Objet adapté aux futures transmissions 5G, il est préférable de lever la contrainte d’une référence de synchronisation globale pour les émetteurs et de plus, les délais de propagation entre un émetteur et un récepteur de deux paires d’objets différentes peuvent fortement varier en fonction de leurs positions respectives dans le réseau. En conséquence, nous faisons l’hypothèse dans cet article que tous les signaux interférents sont reçus de façon asynchrone au niveau de chaque récepteur, qui n’est synchronisé qu’avec son propre émetteur. L’asynchronisme génère des interférences inter-canaux (ICI) dont le poids a été évalué pour l’OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplex) et le FBMC (Filter Bank Multi Carrier) dans [1]. Un algorithme d’allocation de puissance tenant compte de l’ICI a été proposé dans [2], mais sans optimisation du multiplexage. Or, de nouvelles techniques de multiplexage tenant compte de l’ICI doivent être déterminées. Elles sont différentes des techniques basées sur la coloration de graphe qui ont jusqu’ici été présentées dans la littérature [3,4], et qui supposaient que tous les signaux reçus étaient synchrones. Nous nous intéressons

dans cet article au problème de la maximisation du multiplexage sous une contrainte de Rapport Signal à Bruit plus Interférence (RSBI) minimal par sous-porteuse. Deux bornes inférieures du problème initial de trop grande complexité sont proposées et comparées. La première permet de se ramener à un problème d’optimisation linéaire en nombres entiers ; la seconde fournit un algorithme distribué. Les performances de ces heuristiques sont évaluées en OFDM et FBMC.

2 Hypothèses et notations

Nous considérons K paires d’objets actives dans la même bande passante séparées en N RBs, eux mêmes formés de M sous-porteuses adjacentes. Le nombre total de sous-porteuses est $L = M \times N$. Les interférences sont reçues de façon asynchrone par chaque objet. En conséquence, la puissance émise par chaque objet dans le RB r crée de l’ICI aux récepteurs des autres paires, non seulement dans le RB r , mais aussi dans certaines sous-porteuses des RBs adjacents. L’ICI est modélisée par des poids d’interférence qui doivent être appliqués sur le vecteur des puissances émises \mathbf{p} [1]. Leur étendue et leur amplitude dépend de la modulation multi-porteuse. Ainsi, chaque sous-porteuse l génère des poids d’ICI sur au plus v sous-porteuses adjacentes l' , à gauche et à droite. Les poids d’ICI v sont groupés dans le vecteur \mathbf{V} de taille L , avec $V_{|l-l'|} = 0$ si $|l-l'| > v$.

Soit $\bar{\mathbf{G}}_{k,q}$ la matrice des gains de canaux de taille $L \times L$ entre l’émetteur de la q -ième paire d’objets et le récepteur de la k -

ième paire d'objets. Les éléments de la matrice $\bar{\mathbf{G}}_{kq}$ sont :

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{G}}_{kq}(i, j) = g_{kq}(j)V_{|i-j|} & \forall k \neq q \\ \bar{\mathbf{G}}_{kk}(i, j) = g_{kk}(j)\delta_{i-j} & \forall k \end{cases} \quad (1)$$

où $g_{kq}(j)$ est le gain de canal entre l'émetteur de la paire q et le récepteur de la paire k dans la j -ième sous-porteuse, et δ_x est le delta de Kronecker. Soit $p_q(j)$ la puissance transmise dans la j -ième sous-porteuse par q . Le vecteur $\bar{\mathbf{y}}_k$ contient les puissances reçues $y_k(l)$ dans la l -ième sous-porteuse par le k -ième récepteur, $\forall k \in \{0, \dots, K-1\}$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_k(0) \\ \vdots \\ y_k(L-1) \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{y}}_k} = \bar{\mathbf{G}}_{kk} \underbrace{\begin{bmatrix} p_k(0) \\ \vdots \\ p_k(L-1) \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{p}}_k} + \sum_{\substack{q=0 \\ q \neq k}}^{K-1} \bar{\mathbf{G}}_{kq} \underbrace{\begin{bmatrix} p_q(0) \\ \vdots \\ p_q(L-1) \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{p}}_q} \quad (2)$$

Soient $\bar{\mathbf{p}} = [\bar{\mathbf{p}}_0^T, \bar{\mathbf{p}}_1^T, \dots, \bar{\mathbf{p}}_{K-1}^T]^T$ et $\mathbf{y} = [\bar{\mathbf{y}}_0^T, \bar{\mathbf{y}}_1^T, \dots, \bar{\mathbf{y}}_{K-1}^T]^T$. L'équation (2) peut s'écrire de la façon suivante :

$$\mathbf{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{G}}_{00} & \bar{\mathbf{G}}_{01} & \cdots & \bar{\mathbf{G}}_{0(K-1)} \\ \bar{\mathbf{G}}_{10} & \bar{\mathbf{G}}_{11} & \cdots & \bar{\mathbf{G}}_{1(K-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\mathbf{G}}_{(K-1)0} & \bar{\mathbf{G}}_{(K-1)1} & \cdots & \bar{\mathbf{G}}_{(K-1)(K-1)} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{G}}} \bar{\mathbf{p}} \quad (3)$$

Comme l'allocation de puissance est effectuée par RB, le vecteur des puissances émises $\bar{\mathbf{p}}$ est contraint par :

$$\bar{\mathbf{p}} = (\mathbf{I}_{KN} \otimes \mathbf{1}_M) \mathbf{p} \quad (4)$$

où \otimes est le produit de Kronecker, \mathbf{I}_{KN} est la matrice d'identité de taille KN , $\mathbf{1}_M$ est un vecteur de taille $M \times 1$ dont tous les éléments sont égaux à 1, et \mathbf{p} est le vecteur des puissances émises par RB, de taille $KN \times 1$. L'équation (3) devient alors :

$$\mathbf{y} = \underbrace{\bar{\mathbf{G}} (\mathbf{I}_{KN} \otimes \mathbf{1}_M)}_{\mathbf{S}} \mathbf{p} = \mathbf{F} \mathbf{p} \quad (5)$$

où $\mathbf{F} = \bar{\mathbf{G}} \mathbf{S}$ est une matrice de taille $KL \times KN$.

Nous notons $P_j^r = \mathbf{p}(r + jN)$ la puissance émise par j dans le RB r , $F_{rj}^{lk} = \mathbf{F}(l + kL, r + jN)$, $I_k^l = \mathbf{I}(l + kL)$ la puissance de l'interférence reçue par k dans la sous-porteuse l , \mathbb{B}_j l'ensemble des RBs alloués à la paire j et \mathbb{R}_r l'ensemble des sous-porteuses du RB r . L'interférence reçue par k dans la sous-porteuse l vaut :

$$I_k^l = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{K-1} \sum_{r \in \mathbb{B}_j} F_{rj}^{lk} P_j^r \quad (6)$$

En notant n_k^l la puissance du bruit subit par k sans la sous-porteuse l , le débit maximal permis ou capacité de l'utilisateur k dans le RB r est :

$$R_k^r = \sum_{l \in \mathbb{R}_r} \log_2 \left(1 + \frac{F_{rk}^{lk} P_k^r}{n_k^l + I_k^l} \right) \quad (7)$$

3 Maximisation du multiplexage

Soit a_k^r un entier binaire. On note γ le RSBI de référence par sous-porteuse. Chaque paire Objet-à-Objet k est active dans le RB r si $a_k^r = 1$ et son RSBI dans toutes les sous-porteuses du RB r , $l \in \mathbb{R}_r$ vaut alors γ . L'objectif du multiplexage et de l'allocation des RB est de déterminer le vecteur \mathbf{a} tel que $a(r + kN) = a_k^r$ qui fournit la solution optimale d'un problème donné. \mathbf{a} doit être optimisé en tenant compte des interférences co-canaux et de l'ICI¹.

Pour $r \in \{0, \dots, N-1\}$, $l \in \mathbb{R}_r$, $k \in \{0, \dots, K-1\}$, les contraintes sur le RSBI s'écrivent de la façon suivante :

$$\frac{F_{rk}^{lk} P_k^r}{n_k^l + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{K-1} \sum_{r' \in \mathbb{B}_j} F_{r'j}^{lk} P_j^{r'}} = a_k^r \gamma \quad (8)$$

L'ensemble de ces contraintes est équivalent à KL équations :

$$P_k^r - a_k^r \gamma \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{K-1} \sum_{r' \in \mathbb{B}_j} \frac{F_{r'j}^{lk} P_j^{r'}}{F_{rk}^{lk}} = \frac{a_k^r \gamma n_k^l}{F_{rk}^{lk}} \quad (9)$$

Pour résoudre ce problème, il doit y avoir autant de variables que d'équations. Il faut donc utiliser le vecteur des puissances par sous-porteuse $\bar{\mathbf{p}}$, résoudre le problème avec ce vecteur, et imposer la contrainte de puissance constante par RB (4) en fin de traitement. Le vecteur $\tilde{\mathbf{a}}$ tel que $\tilde{a}(l + kL) = a_k^l$ est défini par sous-porteuse, avec la contrainte $\tilde{a}_k^l = a_k^r, \forall l \in \mathbb{R}_r$.

En se ramenant à un problème par sous-porteuse, la matrice \mathbf{F} est remplacée par $\tilde{\mathbf{G}}$ dans (9) et les KL équations s'écrivent finalement matriciellement comme suit :

$$\left(\mathbf{I}_{KL} - \Gamma \tilde{\mathbf{G}}_{\text{dir}}^{-1} \tilde{\mathbf{G}}_{\text{int}} \right) \tilde{\mathbf{p}} = \tilde{\mathbf{G}}_{\text{dir}}^{-1} \Gamma \mathbf{n} \quad (10)$$

où $\tilde{\mathbf{G}}_{\text{dir}}$ est la matrice diagonale $KL \times KL$ extraite de $\tilde{\mathbf{G}}$ en prenant seulement ses valeurs diagonales, $\tilde{\mathbf{G}}_{\text{int}} = \tilde{\mathbf{G}} - \tilde{\mathbf{G}}_{\text{dir}}$ est la matrice de gains interférents de taille $KL \times KL$, Γ est une matrice diagonale de taille $KL \times KL$ telle que $\Gamma(l + kL, l + kL) = \tilde{a}_k^l \gamma$, et \mathbf{n} est le vecteur de bruit de taille $KL \times 1$ tel que $\mathbf{n}(l + kL) = n_k^l$. Dans la suite, nous définissons $\Psi = \Gamma \tilde{\mathbf{G}}_{\text{dir}}^{-1} \tilde{\mathbf{G}}_{\text{int}}$. Par le théorème de Perron-Frobenius, il existe une allocation de puissances positive permettant d'atteindre les RSBI pour toutes les paires et dans toutes les sous-porteuses si et seulement si le rayon spectral de la matrice Ψ , noté $\rho(\Psi)$, est strictement inférieur à 1.

Le problème d'optimisation a pour objectif de maximiser le nombre de paires d'objets multiplexés sous une contrainte de RSBI minimum. Il s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} & \arg \max_{\tilde{\mathbf{a}} \in \{0,1\}^{K \times L}} \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{a}_k^l \\ & \text{s. t. } \rho(\Psi) < 1 \\ & \text{s. t. } \tilde{a}_k^l = a_k^r, \forall l \in \mathbb{R}_r \end{aligned} \quad (11)$$

1. Notons que le problème pourrait être généralisé à des RSBI multiples de γ , mais que dans ce cas le multiplexage peut mener à des débit très inéquitables

Sa résolution est extrêmement complexe puisqu'il existe 2^{KN} combinaisons de \mathbf{a} et que pour chacune d'elles, calculer le rayon spectral de Ψ nécessite $\mathcal{O}((KL)^3)$ opérations. En conséquence, nous proposons deux heuristiques de moindre complexité utilisant le fait que le rayon spectral est borné supérieurement par toute norme matricielle de Ψ .

3.1 Heuristique basée sur la norme de Frobenius

Nous considérons tout d'abord la norme de Frobenius. Soit la contrainte $\|\Psi\|_F^2 < 1$. Comme la norme au carré est positive, cette contrainte implique que $\|\Psi\|_F < 1$. Puis comme $\rho(\Psi) < \|\Psi\|_F$, nous obtenons que la contrainte sur le rayon spectral est vérifiée : $\rho(\Psi) < 1$. En conséquence, le problème suivant peut être étudié :

$$\begin{aligned} \arg \max_{\tilde{\mathbf{a}} \in \{0,1\}^{K \times L}} & \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{a}_k^l \\ \text{s. t. } & \|\Psi\|_F^2 < 1 \\ & \tilde{a}_k^l = a_k^r, \forall l \in \mathbb{R}_r \end{aligned} \quad (12)$$

La solution de (12) fournit une borne inférieure en terme de multiplexage à la solution du problème initial (11).

La norme de Frobenius au carré de la matrice Ψ est :

$$\begin{aligned} \|\Psi\|_F^2 &= \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{j=0}^{K-1} \sum_{l'=0}^{L-1} (\Psi)(l+kL, l'+jL) \\ &= \gamma^2 \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{a}_k^l \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{K-1} \sum_{l'=0}^{L-1} \left(\frac{\tilde{\mathbf{G}}(l+kL, l'+jL)}{\tilde{\mathbf{G}}(l+kL, l+kL)} \right)^2 \end{aligned} \quad (13)$$

car $(\tilde{a}_k^l)^2 = \tilde{a}_k^l$. De plus, en incluant la contrainte $\tilde{a}_k^l = a_k^r \forall l \in \mathbb{R}_r$ dans l'équation (13), nous obtenons :

$$\|\Psi\|_F^2 = \gamma^2 \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{r=0}^{N-1} a_k^r \sum_{\substack{l \in \mathbb{R}_r \\ j \neq k}} \sum_{j=0}^{K-1} \sum_{l'=0}^{L-1} \left(\frac{\tilde{\mathbf{G}}(l+kL, l'+jL)}{\tilde{\mathbf{G}}(l+kL, l+kL)} \right)^2 \quad (14)$$

En posant $\beta_k^r = \sum_{\substack{l \in \mathbb{R}_r \\ j \neq k}} \sum_{j=0}^{K-1} \sum_{l'=0}^{L-1} \left(\frac{\tilde{\mathbf{G}}(l+kL, l'+jL)}{\tilde{\mathbf{G}}(l+kL, l+kL)} \right)^2$, le problème d'optimisation (13) s'écrit finalement :

$$\begin{aligned} \arg \max_{\mathbf{a} \in \{0,1\}^{K \times N}} & \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{r=0}^{N-1} a_k^r \\ \text{s. t. } & \gamma^2 \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{r=0}^{N-1} \beta_k^r a_k^r < 1 \end{aligned} \quad (15)$$

Il s'agit d'un problème de sac à dos binaire avec des poids non entiers β . L'ensemble de ses variables a été réduit à KN éléments binaires. Il peut être résolu avec des techniques d'optimisation linéaires en nombres entiers tels que le Branch-and-Bound [5], dont la complexité est pseudo-polynomiale, bien que dans le pire cas, toutes les 2^{KN} combinaisons doivent être testées.

3.2 Heuristique basée sur la norme infinie

La deuxième heuristique est obtenue en utilisant la norme infinie comme borne supérieure au rayon spectral. L'heuristique menant à une borne inférieure de la solution du problème initial est :

$$\begin{aligned} \arg \max_{\tilde{\mathbf{a}} \in \{0,1\}^{K \times L}} & \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{a}_k^l \\ \text{s. t. } & \|\Psi\|_\infty < 1 \\ & \tilde{a}_k^l = a_k^r, \forall l \in \mathbb{R}_r \end{aligned} \quad (16)$$

La norme infinie de Ψ est définie comme suit :

$$\begin{aligned} \|\Psi\|_\infty &= \max_{\substack{0 \leq k \leq K-1 \\ 0 \leq l \leq L-1}} \sum_{j=0}^{K-1} \sum_{l'=0}^{L-1} (\Psi)(l+kL, l'+jL) \\ &= \max_{\substack{0 \leq k \leq K-1 \\ 0 \leq l \leq L-1}} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{K-1} \sum_{l'=0}^{L-1} \tilde{a}_k^l \gamma \frac{\tilde{\mathbf{G}}(l+kL, l'+jL)}{\tilde{\mathbf{G}}(l+kL, l+kL)} \end{aligned} \quad (17)$$

Pour simplifier les notations, nous définissons E_k^l :

$$E_k^l = \gamma \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{K-1} \sum_{l'=0}^{L-1} \frac{\tilde{\mathbf{G}}(l+kL, l'+jL)}{\tilde{\mathbf{G}}(l+kL, l+kL)} \quad (18)$$

La contrainte $\|\Psi\|_\infty < 1$ est équivalente à $\tilde{a}_k^l E_k^l < 1$ pour tous les (k, l) . Cette contrainte ne peut être valide que si $\tilde{a}_k^l = 0$ dès lors que $E_k^l \geq 1$. Cette solution est optimale car toutes les valeurs de \tilde{a}_k^l sont fixées à 1, à l'exception de celles qui iraient à l'encontre de la condition $\|\Psi\|_\infty < 1$. La somme des \tilde{a}_k^l sous cette condition est alors maximale. Enfin, comme l'allocation est effectuée par RB, si $E_k^l \geq 1$ sur au moins une sous-porteuse $l \in \mathbb{R}_r$, la paire k n'est pas multiplexée sur le RB r . La norme infinie permet d'obtenir une allocation distribuée : au niveau de chaque récepteur, E_k^l est calculé en fonction d'informations locales uniquement, qui sont déduites des gains interférents reçus. Cette caractéristique est très intéressante pour une implémentation pratique dans les réseaux d'objets communicants. De plus, la complexité de l'algorithme est faible car seuls KN tests doivent être effectués.

Notons qu'une fois que l'allocation des RBs est effectuée, le vecteur des puissances est simplement obtenu en inversant la matrice $(\mathbf{I}_{KL} - \Psi)$ dans l'équation (10) :

$$\tilde{\mathbf{p}}^* = (\mathbf{I}_{KL} - \Psi)^{-1} \tilde{\mathbf{G}}_{\text{dir}}^{-1} \Gamma \mathbf{n} \quad (19)$$

Ce vecteur de puissance étant défini par sous-porteuse, on choisit finalement la puissance par RB r et par objet émetteur k comme étant la puissance maximale de k dans toutes les sous-porteuses de r .

4 Analyse des résultats de simulations

Nous considérons de $K = 12$ à 24 paires d'objets dont les émetteurs sont uniformément répartis dans une cellule de

rayon 500 m. Les récepteurs sont situés dans un rayon de 50 m autour de leur émetteur. Le bruit est limité à un bruit thermique blanc, Gaussien et additif de densité spectrale de puissance -174 dBm/Hz. L'écart-type du shadowing de distribution log-normale vaut 4 dB et les pertes de propagation suivent le modèle $L_{dB} = 140 + 36.8 \log_{10}(d)$, avec d en km. Le fading est calculé avec le modèle Indoor Channel-B. γ est égal à 10 dB. Il y a $N = 25$ RB, ce qui correspond en LTE à une bande passante de 5 MHz. Les poids d'ICI sont calculés avec les paramètres LTE, le temps symbole valant $T = 66.6\mu s$ et le préfixe cyclique $\Delta = 4.69\mu s$. Leurs valeurs sont données dans [2]. Les performances des deux heuristiques sont comparées avec une solution basée sur le FDMA (Frequency Division Multiple Access), dans laquelle seule une paire d'objets est allouée par RB, et l'allocation est à la fois aléatoire et équitable entre les paires. La puissance est alors équitablement répartie sur tous les RBs alloués à un objet émetteur. L'apport du multiplexage sur le débit est clair d'après la Fig. 1.

Les performances avec la norme de Frobenius ('Fro') sont bien moins bonnes qu'avec la norme infinie ('Inf'), aussi bien concernant le débit moyen atteint que concernant le taux de multiplexage (voir la Fig. 2). En effet, l'algorithme a été obtenu en travaillant sur $\|\Psi\|_F^2$ qui est inférieur à $\|\Psi\|_F$ lorsque ce dernier est inférieur à 1. Ainsi, la contrainte $\|\Psi\|_F^2 < 1$ est trop stricte et diminue fortement le taux de multiplexage. Nous pouvons noter que toute autre norme l avec $l > 2$ fournirait des résultats encore plus dégradés. Seules la norme infinie et la norme 1 permettent d'éviter ce problème, mais la norme infinie fournit un critère distribué et est donc plus pertinente que la norme 1. De plus, avec la norme infinie, le débit moyen est moins élevé en OFDM qu'en FBMC à cause de l'étalement de l'ICI. Il est donc important d'utiliser des modulations multi-porteuses bien localisées en fréquence.

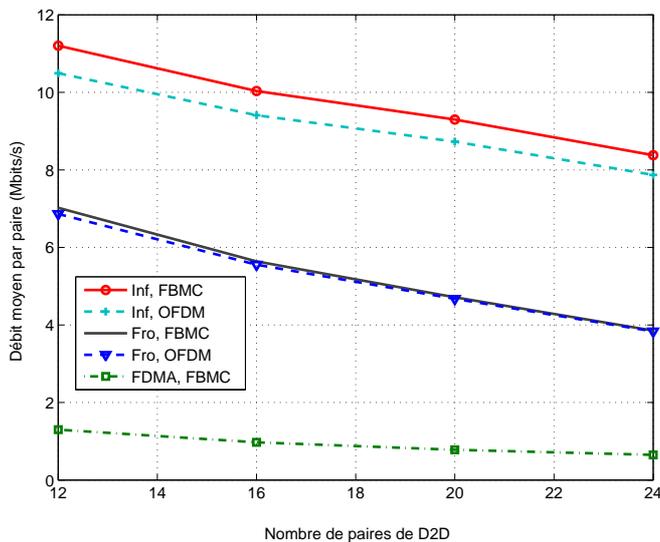


FIGURE 1 – Débit moyen par utilisateur

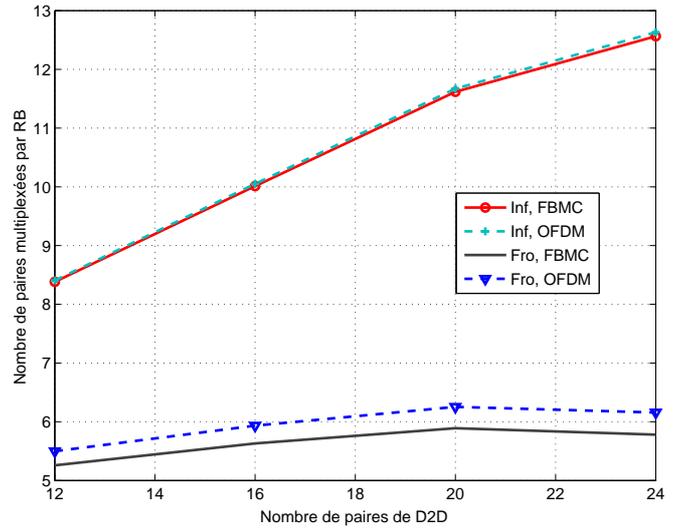


FIGURE 2 – Nombre de paires Objet-à-Objet multiplexées par RB

5 Conclusion

Cet article a considéré le problème du multiplexage des paires d'objets dans un contexte totalement asynchrone en tenant compte de l'ICI. La comparaison des deux heuristiques proposées montre que la norme infinie fournit des résultats bien meilleurs que la norme de Frobenius, et que les performances sont dégradées avec la norme infinie lorsque l'étalement des modulations multi-porteuses augmente.

Références

- [1] Y. Medjahdi, M. Terre, D. Le Ruyet, D. Roviras, J. A. Nossek, and L. Baltar, "Inter-cell Interference Analysis for OFDM / FBMC Systems," in *Proc. of 10th IEEE Signal Processing Workshop (SPAWC 2009)*, Perugia, Italy, June 2009.
- [2] M. Pischella, R. Zakaria, and D. Le Ruyet, "Resource Block level power allocation in asynchronous multi-carrier D2D communications," *IEEE Communication Letters*, vol. 21, no. 4, pp. 813–816, Apr. 2017.
- [3] R. Zhang, X. Cheng, L. Yang, and B. Jiao, "Interference graph-based resource allocation (InGRA) for D2D communications underlying cellular networks," *IEEE Trans. Vehicular Technology*, vol. 64, no. 8, pp. 3844–3850, Aug. 2015.
- [4] T. D. Hoang, L.B. Le, and T. Le-Ngoc, "Resource allocation for D2D communication underlaid cellular networks using graph-based approach," *IEEE Trans. Wireless Communications*, vol. 15, no. 10, pp. 7099–7113, Oct. 2016.
- [5] G.L. Nemhauser L. A Wolsey, *Integer and Combinatorial Optimization.*, Wiley-Interscience, New York, 1999.