

Translation sur graphe avec préservation du voisinage

Nicolas GRELIER, Bastien PASDELOUP, Jean-Charles VIALATTE, Vincent GRIPON

IMT Atlantique
655 Avenue du Technopôle, 29238 Brest, France
`prenom.nom@imt-atlantique.fr`

Résumé – Dans de nombreux domaines comme l’Internet des Objets ou la neuroimagerie, les signaux sont naturellement portés par des graphes. Ces derniers contiennent généralement des informations sur la similarité des valeurs de signaux observées aux différents sommets. L’un des intérêts à utiliser des graphes est qu’ils permettent de définir des opérateurs adaptés pour traiter les signaux qui y évoluent. Parmi ces opérateurs, un de prime importance pour de nombreux problèmes est la translation. Dans cet article, nous proposons de nouvelles définitions pour la translation sur graphe s’appuyant sur un nombre faible de propriétés simples. Plus précisément, nous proposons de définir ces translations comme des fonctions des sommets du graphe vers leurs voisins, préservant les relations de voisinage. Nous montrons que nos définitions, contrairement aux autres travaux sur le sujet, généralisent les translations usuelles sur des graphes grilles.

Abstract – In many domains (e.g. Internet of Things, neuroimaging) signals are naturally supported on graphs. These graphs usually convey information on similarity between the values taken by the signal at the corresponding vertices. An interest of using graphs is that it allows to define ad hoc operators to perform signal processing. Among them, ones of paramount importance in many tasks are translations. In this paper we propose new definitions of translations on graphs using a few simple properties. Namely we propose to define translations as functions from vertices to adjacent ones, that preserve neighborhood properties of the graph. We show that our definitions, contrary to other works on the subject, match usual translations on grid graphs.

1 Introduction

Le traitement de signal sur graphe (TSG) [7] propose un cadre définissant des opérateurs harmoniques sur des domaines caractérisés par des graphes. Par analogie avec le calcul de Fourier discret, il est en effet possible d’introduire des opérateurs adaptés aux graphes, comme la convolution ou les ondelettes. Les applications sont nombreuses, allant de la compression à l’apprentissage, et les outils du TSG peuvent être appliqués dans des domaines où chaque signal (typiquement un vecteur de \mathbb{R}^N) peut être vu comme un ensemble de scalaires distribués sur un réseau (typiquement représenté par la matrice d’adjacence d’un graphe). Entre autres, les opérateurs de translation présentent un intérêt particulier, car ils en sous-tendent d’autres, tels que la convolution [7]. Un exemple motivant l’utilisation du TSG est l’extension des réseaux de neurones convolutionnels à des signaux sur graphes, rendant possible l’identification d’un unique objet à différents endroits d’un graphe [1, 8]. Une autre application possible est l’identification de dynamiques de l’activité cérébrale [3].

Dans la littérature sont proposées des définitions de translation sur graphe s’appuyant sur le domaine spectral associé au graphe [7, 4]. Toutefois, les opérateurs correspondants ne coïncident pas avec les translations usuelles sur des espaces réguliers, comme des graphes grilles par exemple. Ce constat n’est pas surprenant, car les sommets

d’un graphe ne sont pas localisés, et seules les relations entre eux sont exploitées.

Fondamentalement, nous nous intéressons à la question suivante : est-il possible de proposer une définition de translation sur graphe qui corresponde aux translations usuelles sur des domaines métriques échantillonnés régulièrement ? Dans cet article, nous proposons des définitions simples, et montrons qu’elles correspondent aux translations usuelles sur des domaines réguliers. L’un des aspects clé de ces définitions est la préservation des voisinages des sommets.

Cet article est organisé comme suit : la section 2 introduit les travaux connexes et les définitions ; la section 3 présente nos résultats ; enfin, la section 4 conclut.

2 Définitions et travaux connexes

Soit un graphe $\mathcal{G} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{E} \rangle$, où \mathcal{V} est l’ensemble des sommets, et $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ est l’ensemble des arêtes. Nous considérons uniquement des graphes simples ($\forall v \in \mathcal{V} : (v, v) \notin \mathcal{E}$) et symétriques ($\forall v_1, v_2 \in \mathcal{V} : (v_1, v_2) \in \mathcal{E} \Rightarrow (v_2, v_1) \in \mathcal{E}$). Par abus de notation, nous ne distinguons pas les paires (v_1, v_2) et (v_2, v_1) . Pour tout sommet v_1 de \mathcal{V} , on note son *voisinage* $\mathcal{N}(v_1)$, c’est à dire l’ensemble des sommets $v_2 \in \mathcal{V}$ tels que $(v_1, v_2) \in \mathcal{E}$. L’ensemble des entiers compris entre A et B est noté $[[A, B]]$.

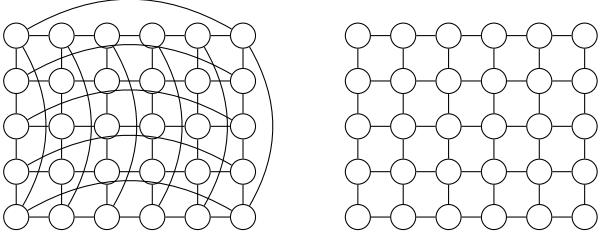


FIGURE 1 – Exemples de graphes grilles torique (gauche) et non torique (droite), chacun de paramètres $D = 2$ et $(L_1, L_2) = (6, 5)$.

2.1 Les graphes grilles

Nous concentrons notre analyse sur les graphes grilles, toriques ou non. Considérons un entier $D \in \mathbb{N}^*$ correspondant à la dimension du graphe grille. Soit $(L_i)_{1 \leq i \leq D}$ la longueur de chaque dimension. Pour le besoin de certaines preuves, nous supposons que $\forall i \in \llbracket 1, D \rrbracket, L_i \geq 5$.

Définition 1 (Graphe grille torique). Considérons le groupe produit $\langle \mathcal{V}_t \triangleq (\mathbb{Z}/L_1\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/L_2\mathbb{Z}) \times \dots \times (\mathbb{Z}/L_D\mathbb{Z}), + \rangle$. Notons $(\mathbf{e}_i)_{1 \leq i \leq D}$, avec $\mathbf{e}_i[j] = 1$ si $i = j$, et 0 autrement. Deux éléments $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ de \mathcal{V}_t sont dits adjacents s'il existe i tel que $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \pm \mathbf{e}_i$. Un *graphe grille torique* de paramètres D et $(L_i)_{1 \leq i \leq D}$ est un graphe $\mathcal{G}_t = \langle \mathcal{V}_t, \mathcal{E}_t \rangle$, où $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \mathcal{E}_t$ si et seulement si \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 sont adjacents.

Définition 2 (Graphe grille non torique). Considérons $\mathcal{V}_g \triangleq \llbracket 0, L_1 - 1 \rrbracket \times \llbracket 0, L_2 - 1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket 0, L_D - 1 \rrbracket$. Deux éléments $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ de \mathcal{V}_g sont dits adjacents si $d_{\text{taxi}}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 1$, où d_{taxi} est la taxi-distance. Un *graphe grille non torique* de paramètres D et $(L_i)_{1 \leq i \leq D}$ est un graphe $\mathcal{G}_g = \langle \mathcal{V}_g, \mathcal{E}_g \rangle$, où $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \mathcal{E}_g$ si et seulement si \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 sont adjacents.

La figure 1 présente un exemple d'un graphe grille torique et d'un graphe grille non torique, chacun de paramètres $D = 2$ et $(L_1, L_2) = (6, 5)$.

Considérant que les sommets sont indexés par des entiers de 1 à $|\mathcal{V}|$, où $|\cdot|$ dénote l'opérateur de cardinalité, un graphe peut être représenté par une matrice d'adjacence binaire \mathbf{W} carrée de dimension $|\mathcal{V}|$, telle que $\mathbf{W}[i, j] = \mathbf{W}[j, i] = 1$ si et seulement si le $i^{\text{ème}}$ sommet est connecté au $j^{\text{ème}}$ sommet par une arête.

2.2 Les signaux sur graphes

Un signal \mathbf{x} sur un graphe $\mathcal{G} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{E} \rangle$ est un vecteur de $\mathbb{R}^{|\mathcal{V}|}$. Il peut être vu comme un ensemble de scalaires attachés aux différents sommets du graphe. Notre objectif est de définir une translation d'un signal \mathbf{x} sur \mathcal{G} .

2.3 Travaux connexes

Les auteurs de [7] proposent tout d'abord de définir un opérateur de convolution. Ils utilisent la matrice Laplacienne du graphe, définie par $\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{W}$, où \mathbf{D} est une matrice diagonale telle que $\mathbf{D}[i, i]$ est le degré du $i^{\text{ème}}$ sommet. Comme \mathbf{W} est symétrique, \mathbf{L} l'est aussi, et il existe \mathbf{U} une matrice orthonormale, et $\mathbf{\Lambda}$ une matrice diagonale, telles que $\mathbf{L} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^\top$, où \cdot^\top est l'opérateur de transposition. Ils définissent ensuite $\hat{\mathbf{x}} \triangleq \mathbf{U}^\top \mathbf{x}$, la transformée de Fourier sur graphe d'un signal \mathbf{x} , et $\mathbf{x} \triangleq \mathbf{U}\hat{\mathbf{x}}$ sa transformée inverse. Les auteurs introduisent un opérateur de convolution pour deux signaux \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 comme suit : $\mathbf{x}_1 * \mathbf{x}_2 \triangleq \mathbf{U}(\mathbf{U}^\top \mathbf{x}_1 \odot \mathbf{U}^\top \mathbf{x}_2)$, où \odot est le produit de Hadamard. La translation est ensuite considérée comme un cas particulier de la convolution, où le signal à traduire \mathbf{x} est convolué avec un vecteur \mathbf{e}_v de la base canonique. La translation n'est donc pas vue comme un décalage du signal, mais comme son déplacement en un sommet v .

La translation introduite en [4] est définie comme un opérateur isométrique relativement à la norme ℓ_2 . La translation d'un signal \mathbf{x} consiste en la multiplication de \mathbf{x} par une exponentielle d'une matrice diagonale imaginaire.

Enfin, d'autres définitions de la translation existent pour des puissance d'un graphe anneau [2], pour lequel le résultat est relativement direct.

Comme mentionné en introduction, les opérateurs existants ne correspondent pas à la translation usuelle sur des graphes réguliers comme des graphes grilles. Cela motive les définitions introduites dans la prochaine section.

2.4 Définitions proposées

Définition 3 (Translation graphique parfaite). Une application f de \mathcal{V} vers \mathcal{V} est une *translation graphique parfaite* si :

1. f est bijective ;
2. $\forall v \in \mathcal{V} : f(v) \in \mathcal{N}(v)$;
3. $\forall v_1, v_2 \in \mathcal{V} : (v_1, v_2) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow (f(v_1), f(v_2)) \in \mathcal{E}$.

En pratique, les translations graphiques parfaites sont difficile à obtenir (peu de graphes en admettent). Afin de définir des translations pour tout graphe, nous proposons une généralisation des translations graphiques. Pour cela, nous définissons un *trou noir* $\perp \notin \mathcal{V}$ auquel nous pouvons associer des sommets. Soit f une application de \mathcal{V} vers $\mathcal{V} \cup \{\perp\}$. On note $\mathcal{V}^{(f)}$ l'ensemble des sommets de \mathcal{V} ayant leur image dans \mathcal{V} par f .

Définition 4 (Translation graphique candidate). Une application f de \mathcal{V} vers $\mathcal{V} \cup \{\perp\}$ est une *translation graphique candidate* si :

1. $f|_{\mathcal{V}^{(f)}}$ est injective ;
2. $\forall v \in \mathcal{V}^{(f)} : f(v) \in \mathcal{N}(v)$;
3. $\forall v_1, v_2 \in \mathcal{V}^{(f)} : (v_1, v_2) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow (f(v_1), f(v_2)) \in \mathcal{E}$.

Définition 5 (Translation graphique (généralisée)). Une application f de \mathcal{V} vers $\mathcal{V} \cup \{\perp\}$ est une *translation graphique* si :

1. f est une translation graphique candidate ;
2. $\forall v \in \mathcal{V}^{(f)}$, pour toute translation graphique candidate g telle que $g(v) = f(v) : |\mathcal{V}^{(g)}| \leq |\mathcal{V}^{(f)}|$.

En gardant à l'esprit les translations sur des domaines métriques, nous introduisons la définition suivante :

Définition 6 (Translation géométrique). Une application f de \mathcal{V} vers $\mathcal{V} \cup \{\perp\}$ est une *translation géométrique* sur un graphe grille (torique ou non torique) $\mathcal{G} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{E} \rangle$ s'il existe $\mathbf{e} = \pm \mathbf{e}_i$ tel que :

$$\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} : f(\mathbf{v}) = \begin{cases} \mathbf{v} + \mathbf{e} & \text{si } \mathbf{v} + \mathbf{e} \in \mathcal{V} \\ \perp & \text{sinon} \end{cases}.$$

Cette définition des translations géométriques ne considère que les translations élémentaires, où la longueur du décalage est minimale. Des translations plus génériques peuvent être obtenues par composition de celles-ci.

3 Résultats

Dans la suite de cet article, nous nous intéressons à montrer les points suivants :

- Sur des graphes grilles toriques, les translations graphiques sont les translations géométriques, et sont parfaites ;
- Sur des graphes grilles non toriques, les translations graphiques sont les translations géométriques.

Par souci de concision, les preuves sont omises ici et peuvent être trouvées dans [5].

3.1 Graphes grilles toriques

Tout d'abord, nous montrons par double inclusion l'identité entre translations graphiques parfaites et translations géométriques pour les graphes grilles toriques.

Lemme 1 (Lemme de contamination). Soit f une translation graphique parfaite sur un graphe grille torique $\mathcal{G}_t = \langle \mathcal{V}_t, \mathcal{E}_t \rangle$. Soit $\mathbf{v}_1 \in \mathcal{V}_t$, et notons $\mathbf{e} = f(\mathbf{v}_1) - \mathbf{v}_1$. Alors, $\forall \mathbf{v}_2 \in \mathcal{N}(\mathbf{v}_1) : f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2 + \mathbf{e}$.

Ce lemme permet de déduire le résultat suivant :

Proposition 1. Soit f une translation graphique parfaite sur un graphe grille torique. Alors, f est une translation géométrique.

Par ailleurs, nous avons la propriété suivante :

Proposition 2. Soit f une translation géométrique sur un graphe grille torique \mathcal{G}_t . Alors, f est une translation graphique parfaite sur \mathcal{G}_t .

Une conséquence directe des preuves de ces propositions [5] est qu'il existe autant de translations graphiques parfaites qu'il y a de voisins par sommet du graphe \mathcal{G}_t .

3.2 Graphes grilles non toriques

Dans le cas de graphes grilles non toriques $\mathcal{G}_g = \langle \mathcal{V}_g, \mathcal{E}_g \rangle$, nous conjecturons que les résultats sont valides pour tous graphes suffisamment grands. Cependant, les résultats présentés ci-dessous ne fonctionnent que dans le cas de graphes grilles larges, tels que $L_D \geq 3$ et

$$\forall i \in \llbracket 1, D-1 \rrbracket : L_i \geq \left(2 \prod_{k=i+1}^D L_k \right) + 2.$$

Remarquons tout d'abord que la fonction

$$f_{\perp} : \begin{cases} \mathcal{V}_g & \rightarrow \mathcal{V}_g \cup \{\perp\} \\ \mathbf{v} & \mapsto \perp \end{cases}$$

est une translation graphique.

Plus généralement, un graphe peut admettre de nombreuses translations graphiques f pour différentes tailles de $\mathcal{V}^{(f)}$. On parle alors de translations C -graphiques, avec $C = |\mathcal{V}^{(f)}|$.

Lemme 2. Soit f une translation graphique candidate pour un graphe quelconque $\mathcal{G} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{E} \rangle$. Pour tout sommet $v \in \mathcal{V}$, la séquence $(f^n(v))_n$ est soit périodique, soit finie de dernier élément \perp .

Pour faciliter la lecture des résultats suivants, nous introduisons la notion de tranche d'un graphe grille.

Définition 7 (Tranche d'un graphe grille). Une *tranche* $\mathcal{T}_{i,A}$ d'un graphe grille $\mathcal{G} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{E} \rangle$ est un sous-ensemble maximal des sommets de \mathcal{V} tel que $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{T}_{i,A} : \mathbf{v}[i] = A$. Deux tranches $\mathcal{T}_{i,A}$ et $\mathcal{T}_{i,B}$ sont adjacentes si $|A - B| = 1$.

Remarque 1. Le cardinal de $\mathcal{T}_{i,A}$ est $\prod_{k=1, k \neq i}^D L_k$.

Lemme 3. Soient un graphe grille non torique \mathcal{G}_g de paramètres D et $(L_i)_{1 \leq i \leq D}$, et f une translation C -graphique telle que C maximal. Alors, $C \geq (L_1 - 1) \prod_{k=2}^D L_k$.

Par utilisation des lemmes 1 et 3, on montre :

Lemme 4. Soit $\mathcal{T}_{i,A,B}$ l'union de deux tranches adjacentes $\mathcal{T}_{i,A}$ et $\mathcal{T}_{i,B}$ d'un graphe grille non torique $\mathcal{G}_g = \langle \mathcal{V}_g, \mathcal{E}_g \rangle$. Soit f une translation C -graphique, pour C maximal. S'il existe un sommet $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_g$ tel que $(f^n(\mathbf{v}))_n$ est périodique, alors $\mathcal{T}_{i,A,B} \not\subset \mathcal{V}_g^{(f)}$.

Par utilisation des lemmes 2, 3 et 4, on montre :

Lemme 5. Soit f une translation C -graphique, pour C maximal. Alors, il existe A tel que $\mathcal{T}_{1,A} \subset \mathcal{V}^{(f)}$ et $\mathcal{T}_{1,A+1} \subset \mathcal{V}^{(f)}$. De plus, $f(\mathcal{T}_{1,A} \cup \mathcal{T}_{1,A+1}) \not\subset \mathcal{T}_{1,A} \cup \mathcal{T}_{1,A+1}$.

Les lemmes précédents permettent de montrer les propositions suivantes :

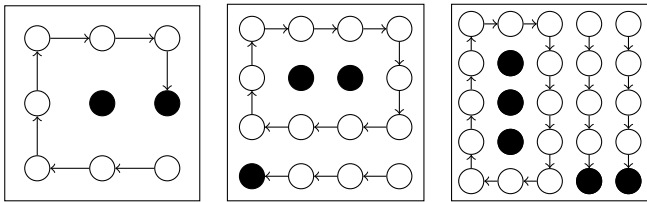


FIGURE 2 – Exemples de graphes grilles non toriques à deux dimensions pour lesquels des translations graphiques ne sont pas des translations géométriques. Les arêtes ne sont pas dessinées. Les translations graphiques sont représentées par des flèches dont la pointe indique l'image du sommet à la base par la translation graphique. Les sommets envoyés sur \perp sont colorés en noir.

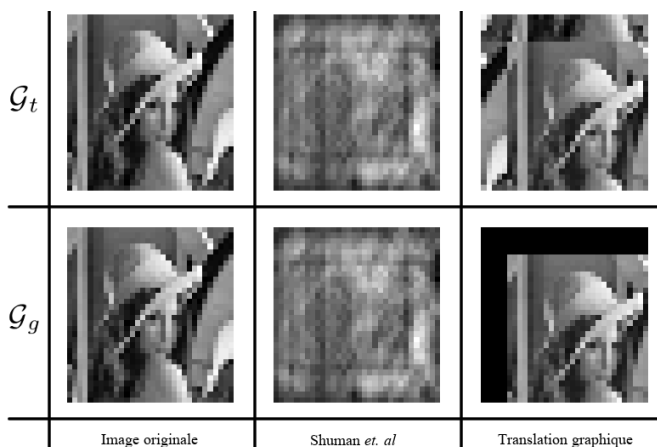


FIGURE 3 – Comparaison de l'effet d'une translation comme définie en [7] avec la translation préservant les voisinages introduite dans cet article.

Proposition 3. Soit f une translation C -graphique, pour C maximal. Alors, f est une translation géométrique par \mathbf{e}_1 ou $-\mathbf{e}_1$.

Proposition 4. Les translations graphiques sur des graphes grilles toriques sont les translations géométriques et f_{\perp} .

Généraliser ces résultats à d'autres graphes grilles non toriques ne semble pas trivial. La figure 2 présente des exemples de translations graphiques obtenues pour des graphes grilles non toriques à deux dimensions, qui ne sont pas des translations géométriques. Nous n'avons pas pu trouver de contre-exemples pour de tels graphes quand les longueurs de leurs dimensions dépassent 5.

Enfin, pour illustrer les translations que nous proposons sur un exemple graphique, la figure 3 compare nos résultats avec la translation de la photographie 32×32 de Lena Söderberg par la méthode introduite en [7], implémentée dans la bibliothèque GSPBOX [6].

4 Conclusion

Nous avons introduit une définition de la translation sur graphe se basant sur la propriété de préservation du voisinage. Utilisées sur des graphes toriques, ces translations correspondent aux translations usuelles. Nous avons aussi obtenu des résultats pour un sous-ensemble des graphes grilles non toriques. Ces définitions sont simples et capturent l'intuition derrière les translations classiques.

Cette étude s'est principalement concentrée sur les graphes grilles. Trouver des translations sur des graphes arbitraires est difficile, considérant l'explosion combinatoire du nombre de translations graphiques candidates. Dans la suite de nos travaux, nous nous intéresserons à d'autres graphes, ce qui nécessitera probablement une adaptation des définitions, ainsi que l'obtention d'algorithmes peu complexes afin d'identifier les translations.

Remerciements

Ce travail a été partiellement financé par le projet Labex CominLabs *Neural Communications*.

Références

- [1] J. Bruna, W. Zaremba, A. Szlam, et Y. LeCun. *Spectral networks and locally connected networks on graphs*. arXiv preprint arXiv :1312.6203, 2013.
- [2] V. Ekambara. *Graph structured data viewed through a fourier lens*. Ph.D. dissertation, EECS Department, University of California, Berkeley, 2013.
- [3] K.J. Friston, L. Harrison et W. Penny. *Dynamic causal modelling*. Neuroimage, vol. 19, no. 4, pp. 1273–1302, 2003.
- [4] B. Girault. *Stationary graph signals using an isometric graph translation*. 23rd IEEE European Signal Processing Conference, 2015, pp. 1516–1520.
- [5] N. Grelier, B. Pasdeloup, J.-C. Vialatte, V. Gripon. *Neighborhood-Preserving Translations on Graphs*. GlobalSIP, 2016, pp. 410–414.
- [6] N. Perraudin, J. Paratte, D. Shuman, L. Martin, V. Kalofolias, P. Vandergheynst et D.K. Hammond. *GSPBOX : A toolbox for signal processing on graphs*. ArXiv e-prints, 2014.
- [7] D.I. Shuman, S.K. Narang, P. Frossard, A. Ortega et P. Vandergheynst. *The emerging field of signal processing on graphs : Extending high-dimensional data analysis to networks and other irregular domains*. IEEE Signal Processing Magazine, vol. 30, no. 3, pp. 83–98, 2013.
- [8] J.-C. Vialatte, V. Gripon, et G. Mercier. *Generalizing the convolution operator to extend cnns to irregular domains*. arXiv preprint arXiv :1606.01166, 2016.